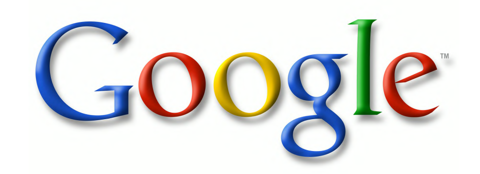


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

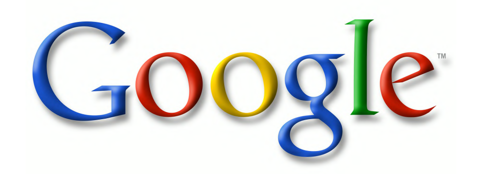
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

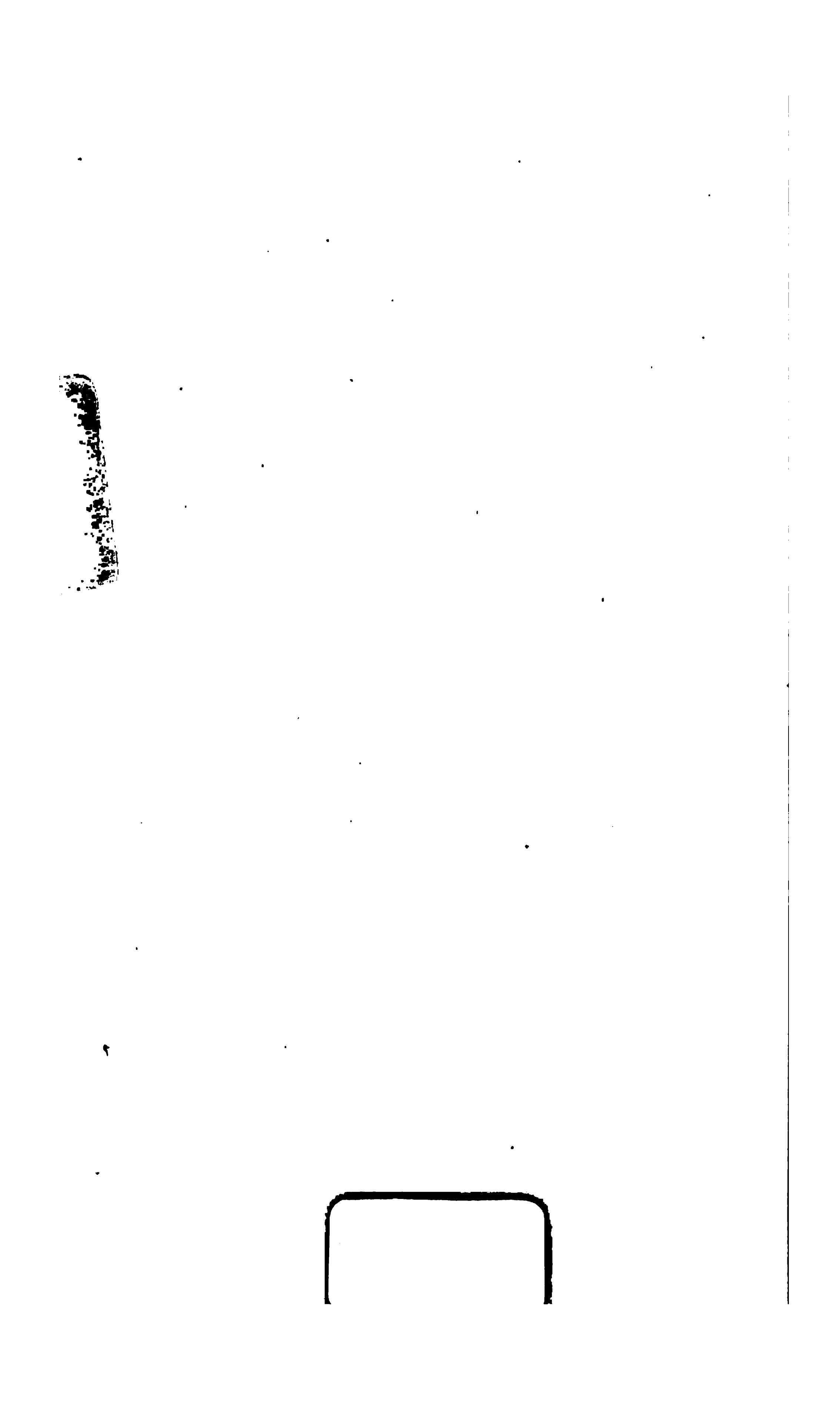
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

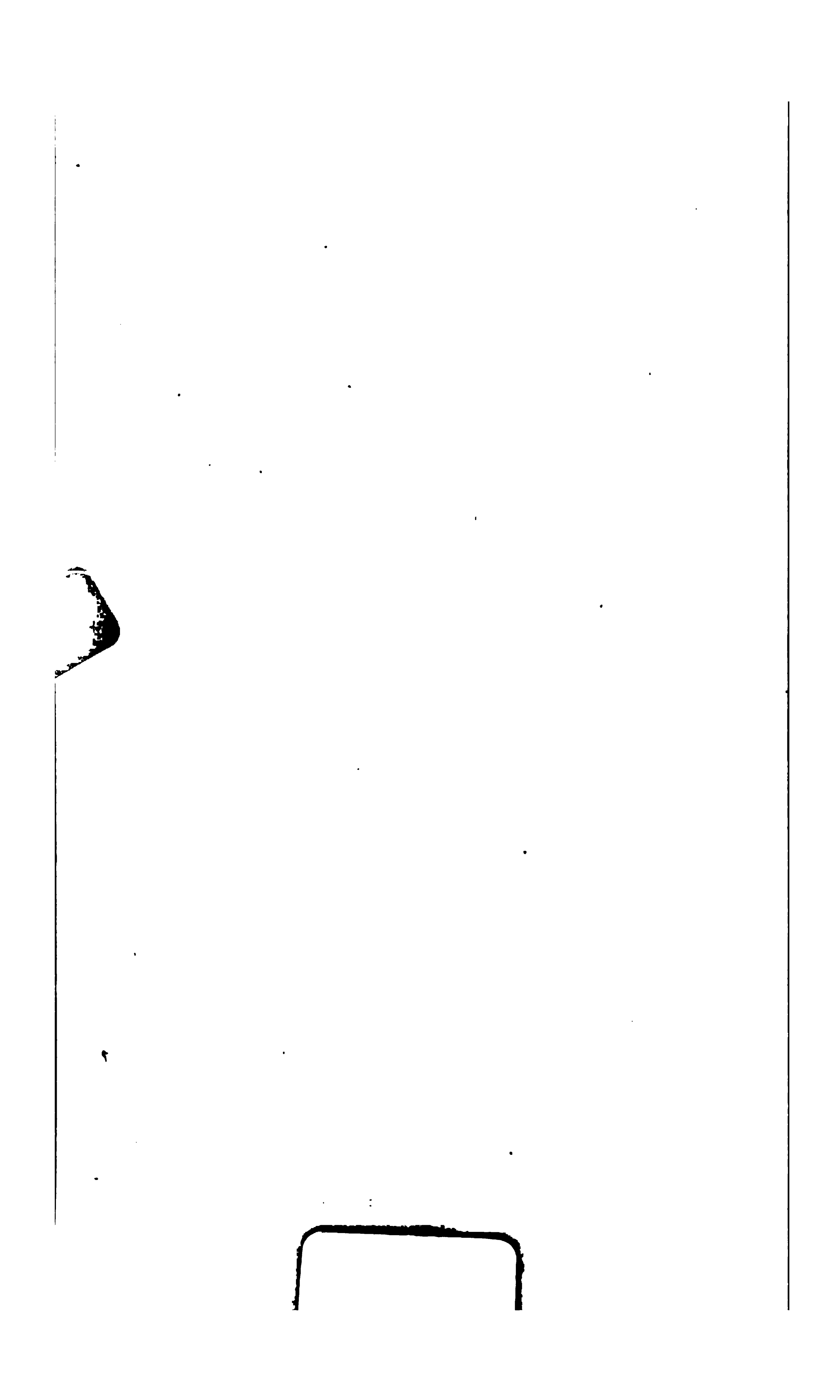
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

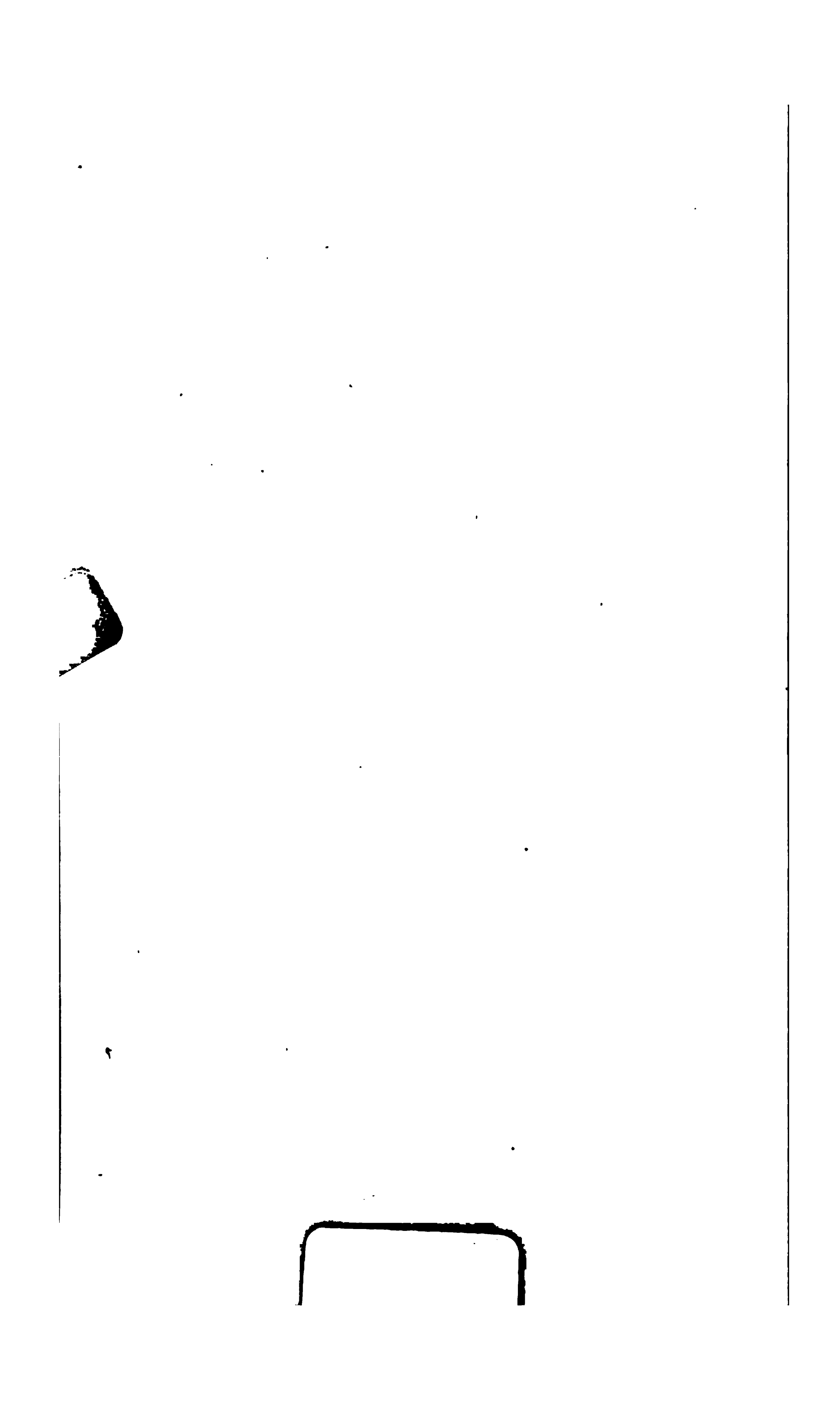





ENGINEERING LIBRAR




ENGINEERING LIBRARY




ENGINEERING LIBRARY

VORLESUNGEN

UEBER DIE

PRINCIPE DER MECHANIK.

VON

LUDWIG BOLTZMANN,
PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK A. D. UNIVERSITÄT WIEN.

I. THEIL

enthaltend die Principe, bei denen nicht Ausdrücke nach der Zeit integrirt werden, welche Variationen der Coordinaten oder ihrer Ableitungen nach der Zeit enthalten.

MIT SECHSZEHN FIGUREN.



LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1897.

VORLESUNGEN

UEBER DIE

PRINCIPE DER MECHANIK.

VON

LUDWIG BOLTZMANN,

PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK A. D. UNIVERSITÄT WIEN.

I. THEIL

enthaltend die Principe, bei denen nicht Ausdrücke nach der Zeit integrirt werden, welche Variationen der Coordinaten oder ihrer Ableitungen nach der Zeit enthalten.

MIT SECHSZEHN FIGUREN.



LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1897.

Verlag von **Johann Ambrosius Barth** in **Leipzig.**

BARUS, C., Die physikalische Behandlung und die Messung hoher Temperaturen. VIII, 92 Seiten mit 80 Figuren und 2 Tafeln. 1892. M. 3.—

Die vorliegende Arbeit zeichnet sich durch grosse Gründlichkeit aus. Dieselbe dokumentiert sich auch schon äusserlich durch die grosse Zahl der Citate, welche der Verfasser dem ersten, die Geschichte der Pyrometrie behandelnden Kapitel beigegeben hat. Im zweiten Kapitel wird die Kalibrierung der Kalorimeter durch bekannte Siede- und Schmelzpunkte behandelt.

BEZOLD, W. von, Hermann von Helmholtz. Gedächtnissrede, gehalten in der Singakademie zu Berlin. 32 Seiten. Mit einem Porträt H.'s nach einem Ölgemälde von F. von Lenbach. 1895. M. 1.50

CHRISTIANSEN, C., Elemente der theoretischen Physik. Deutsch herausgegeben von Joh. Müller. Mit einem Vorwort von E. Wiedemann. VIII, 458 Seiten mit 134 Figuren. 1894. M. 10.—

Es fehlte bisher ein kurzes Lehrbuch der theoretischen Physik, in dem auf beschränktem Raume die wichtigsten Lehren dieses Gebietes soweit entwickelt werden, dass es nach Durcharbeiten desselben möglich ist, Originalarbeiten, die nicht gerade allzu spezielle Probleme betreffen, zu verstehen. Wie nöthig und nützlich eine solche Einführung in die theoretische Physik ist, werden Viele empfunden haben und Christiansens Werk, vom Verfasser und von Fachgelehrten umgearbeitet und deutschen Verhältnissen angepasst, wird zweifelsohne den jungen Physiker und Mathematiker bei seinen Studien wesentlich fördern.

CLAUSIUS, R., Die Potentialfunktion und das Potential. Ein Beitrag zur mathematischen Physik. 4. verm. Auflage. 178 Seiten. 1885. M. 4.—

EBERT, H., Magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus und der Induktion, dargestellt auf Grund des Kraftlinien-Begriffes. Zwei Theile in einem Bande. XXVIII, 499 Seiten mit 140 Abbildungen und 3 Tafeln. 1897. M. 18.—, geb. M. 19.—

Der Verfasser hat es versucht, die Lehre vom Magnetismus und der Elektricität durchweg dem neuesten Stande der theoretischen Erkenntnis entsprechend aus den Fundamenten zu entwickeln. Noch fehlte es an einem Lehrbuche, welches die neueren Anschauungen in leicht fasslicher Weise in dem Umfange entwickelte, in welchem sie etwa in den Rahmen einer Vorlesung über Experimentalphysik aufzunehmen sind. Das vorliegende Werk hat, nach dem Urteile der Kritik, diese Lücke ausgefüllt.

EBERT, H., Anleitung zum Glasblasen. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. VIII, 104 Seiten mit 58 Abbildungen. 1895. M. 2.—

Chemiker-Zeitung: Die Erfahrungen, welche der Verfasser sowohl beim Glasblasen wie beim Unterricht gesammelt hat, haben ihn auf den fruchtbaren Gedanken gebracht, die Anleitung zum Glasblasen in die Form eines systematischen, aus fünf Übungsstufen bestehenden Unterrichtskursus zu bringen, welcher alle im Laboratorium gewöhnlich zur Anwendung kommenden Glasbläserarbeiten berücksichtigt... Die Darstellung ist knapp und überaus klar und lässt überall erkennen, dass der Verfasser, welcher es in seiner Wissenschaft zu hohem Ansehen gebracht hat, auch in der Kunst des Glasblasens Meister ist. Wir wünschen dem Werkchen, das sich einer gefälligen Ausstattung zu erfreuen hat, eine weite Verbreitung und sind überzeugt, dass kein Chemiker und Physiker es unbefriedigt aus der Hand legen wird.

ELBS, KARL, Die Akkumulatoren. Eine gemeinfassliche Darlegung ihrer Wirkungsweise, Leistung u. Behandlung. 2. Aufl. 48 S. mit 3 Fig. 1896. M. 1.—

Das Schriftchen giebt eine äusserst klare und gemeinverständliche Erklärung des Princips der Akkumulatoren, sowie die Regeln für deren Behandlung und Benutzung. Es wendet sich nicht nur an Chemiker und Physiker, sondern ebenso an Physiologen, Gymnasial- und Mittelschullehrer, Ärzte und Zahnärzte, welche aus Unkenntnis oft schlimme Erfahrungen mit Akkumulatoren machen.

ERHARD, TH., Einführung in die Elektrotechnik. Die Erzeugung starker elektrischer Ströme und ihre Anwendung zur Kraftübertragung. VI, 183 Seiten mit 96 Abbildungen. geh. M. 4.—, geb. M. 4.80

Das vorliegende Buch soll angehenden Ingenieuren in kurzer Form und genügend begründet die Hauptsätze vorführen, auf denen die heutige Starkstromtechnik beruht, und gewissermassen die Mitte halten zwischen einerseits denjenigen Werken, welche, für die Bedürfnisse ausführender Elektrotechniker geschrieben, tief in die Einzelheiten des Gebietes eingehen, und andererseits denjenigen Büchern, welche von den geringsten Vorkenntnissen ausgehend für den Ingenieur zu wenig bieten.

VORLESUNGEN

UEBER DIE

PRINCIPE DER MECHANIK.

I. THEIL.

ENG
QA805
B69
v.1-2
TIMO
COLL

VORLESUNGEN

UEBER DIE

PRINCIPE DER MECHANIK.

VON

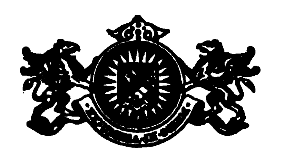
LUDWIG BOLTZMANN,

PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK A. D. UNIVERSITÄT WIEN.

I. THEIL

enthaltend die Principe, bei denen nicht Ausdrücke nach der Zeit integrirt werden, welche Variationen der Coordinaten oder ihrer Ableitungen nach der Zeit enthalten.

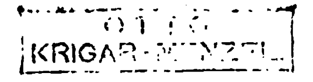
MIT SECHSZEHN FIGUREN.



LEIPZIG,

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1897.



Uebersetzungsrecht vorbehalten.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Bring' vor, was wahr ist;
Schreib' so, dass es klar ist
Und verficht's, bis es mit dir gar ist!

Wenn ich nun wieder statt des zweiten Theiles der Gastheorie den ersten der Mechanik publicire, so will ich das nicht mit dem Hinweise auf berühmte Muster für die Reihenfolge des Erscheinens der Bände entschuldigen. Das kam vielmehr so. Im zweiten Theile der Gastheorie häuften sich die nothwendigen Einschaltungen über Mechanik so, dass sie erst einen ganzen Paragraph, dann einen Abschnitt auszufüllen schienen und ich mich zuletzt entschloss, ein ganzes Buch daraus zu machen, indem ich noch ein Vorlesungsheft hinzunahm, das ich in den vorigen Ferien für Vorlesungen über Mechanik im folgenden Wintersemester ausgearbeitet hatte. Als ich mir aber mein Auditorium betrachtete, glaubte ich die ganze Methode desselben mit einer einfacheren vertauschen zu sollen. Dafür nahm ich den Inhalt des betreffenden Heftes, damit doch meine Mühe nicht ganz verloren sei, in das vorliegende Buch auf, welches ich also als Vorlesungen bezeichnen könnte, die ich an der Wiener Universität nicht gehalten habe.

Man sprach in neuerer Zeit viel über die Dunkelheiten in den Principien der Mechanik und suchte sie dadurch zu beseitigen, dass man der Mechanik ein ganz neues, fremdartiges Gewand gab. Ich habe hier den entgegengesetzten Weg eingeschlagen und versucht, ob sich nicht bei möglichst treuer Darstellung der Mechanik in ihrer alten classischen Form die Dunkelheiten ebenfalls vermeiden liessen, theils

indem ich gewisse Dinge, die man früher überging oder als selbstverständlich nur obenhin berührte, ausführlich behandelte, theils indem ich jede berechtigte Kritik sorgfältig berücksichtigte. Besonders kann ich da den Bemerkungen Hertz' über den Ideenreichthum der einschlägigen Schriften Mach's nur aufs Wärmste zustimmen, wenn ich auch keineswegs überall derselben Ansicht bin, wie Mach.

Gerne hätte ich mich der Bezeichnungsweise der Quaternionen angeschlossen; doch wäre dies meinem Bestreben, alles dem deutschen Publikum fremdartige auszuschliessen, zuwidergelaufen.

Der zweite Theil der Vorlesungen über Mechanik, der erst die gastheoretisch wichtigen Principe bringen wird, soll in kürzester Zeit und dann, sobald es mir möglich sein wird, auch der zweite Theil der Gastheorie erscheinen. Ein dritter Theil der Mechanik soll die Elasticitätslehre und Hydrodynamik enthalten, und so wieder zur Gastheorie zurückleiten.

Von Vollständigkeit und wesentlich Neuem kann natürlich bei einem so umfangreichen und vielbearbeiteten Gebiete, wie die Mechanik, nicht die Rede sein. Trotzdem stellte es sich vom Abschnitte über das Kräftenparallelogramm (§ 10) bis zur Definition des Gleichgewichtes eines Systems, dem d'Alembert'schen Principe und der allgemeinen Form der Bewegungsgleichungen (§§ 72, 73 und 74) heraus, dass auch manche specielle Sätze der Mechanik noch der schärferen Präcisirung bedürfen. Natürlich konnte hier keine dieser Fragen zum Abschlusse gebracht werden; das wäre nur in einer Monographie möglich; aber ich bin zufrieden, wenn ich auf Lücken hingewiesen und Anregung zu weiterer Forschung gegeben habe.

Abbazia, den 3. August 1897.

Ludwig Boltzmann.

Inhaltsverzeichniss.

III. Allgemeine Integrale der Bewegungsgleichungen.

IV. Das Princip der virtuellen Verschiebungen.

Seite

V. Anwendung auf feste Körper.

VI. Vergleich der Principe, die durch Variation des Zustandes zu einer bestimmten Zeit gewonnen werden.

I. Grundbegriffe.

§ 1. Charakterisirung der gewählten Methode.

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung der Naturkörper, d. h. der Ortsveränderung (relativen Lagenänderung) derselben, welche mit keinerlei Aenderung ihrer übrigen Eigenschaften verbunden ist. Sie hat nach dieser Definition auch die Bedingungen zu erforschen, unter denen ein Körper seinen Ort nicht verändert, d. h. ruht.

Da die Ortsveränderungen die allereinfachsten Erscheinungen sind, so ist die Mechanik das Fundament der gesammten Naturwissenschaft. Es kann uns daher nicht wundern, dass sie schon früh (durch Newton, Lagrange, Euler etc.) hoch entwickelt und gegenwärtig zu immer grösserer Vollendung gebracht wurde. Diese Vollendung besteht aber mehr in der Sicherheit, specielle Aufgaben zu behandeln, als in der ihrer Grundprincipien. Letztere wurden vielmehr gerade in der neuesten Zeit vielfach angegriffen.

Ich citire da nur das bekannte Buch Hertz's[1]), welcher freilich dann zugiebt, dass die Unklarheit der Grundprincipien der Mechanik hauptsächlich durch die mangelhafte Darstellung in den Lehrbüchern verschuldet sei. Auf meine Ansicht über die Ursache, welche zu dieser mangelhaften Art der Darstellung verleitete, werde ich alsbald zu sprechen kommen.

Es wurde wohl niemals bezweifelt und wird von Hertz in dem angeführten Buche besonders hervorgehoben, dass

[1]) Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt von Heinrich Hertz. Leipzig, J. A. Barth, 1894.

unsere Gedanken blosse Bilder der Objecte (besser Zeichen für dieselben) sind, welche mit diesen höchstens eine gewisse Verwandtschaft haben, sich aber mit ihnen niemals decken können, sondern sich zu ihnen verhalten, wie die Buchstaben zu den Lauten oder die Noten zu den Tönen. Sie vermögen auch wegen der Beschränktheit unseres Intellects immer nur einen kleinen Theil der Objecte wiederzuspiegeln.

Wir können nun in zweierlei Weise verfahren: 1. Wir können die Bilder mehr allgemein lassen. Wir laufen dann weniger Gefahr, dass sie sich später als falsch erweisen werden, da sie sich neuentdeckten Thatsachen leichter anpassen lassen; allein durch ihre Allgemeinheit werden die Bilder mehr unbestimmt und verwaschen und ihre Weiterentwicklung wird mit einer gewissen Unsicherheit und Vieldeutigkeit verknüpft sein. 2. Wir specialisiren die Bilder und führen sie bis zu einem gewissen Grade ins Detail aus. Dann werden wir viel mehr Willkürliches (Hypothetisches) hineintragen müssen, was vielleicht auf neue Erfahrungen nicht passt; dagegen haben wir den Vortheil, dass die Bilder möglichst klar und deutlich sind, und wir alle Consequenzen aus denselben mit voller Bestimmtheit und Eindeutigkeit zu ziehen vermögen.

Gerade die Unklarheiten in den Principien der Mechanik scheinen mir daher zu stammen, dass man nicht sogleich mit hypothetischen Bildern unseres Geistes beginnen, sondern anfangs an die Erfahrung anknüpfen wollte. Den Uebergang zu den Hypothesen suchte man dann mehr zu verdecken, wenn nicht gar einen Beweis zu erkünsteln, dass das ganze Gebäude nothwendig und hypothesenfrei sei, verfiel aber gerade dadurch in Unklarheit.

Vollends in der neuesten Zeit wird häufig die Forderung aufgestellt, man solle nur die direct gegebenen Erscheinungen erfassen und ihnen nichts Willkürliches hinzufügen. So sehr es sich empfiehlt, das Thatsächliche vom Hypothetischen zu trennen und letzteres nie grundlos zu häufen, so glaube ich doch, dass man ohne alles Hypothetische über eine unvereinfachte Markirung jeder einzelnen Erscheinung im Gedächtnisse gar nicht hinauskommen könnte. Alle Verein-

fachungen der Gedächtnissbilder, alle Erfassung von Gesetzmässigkeiten, alle Regeln, complicirte Erscheinungen kurz zusammen zu fassen und nach einfachen Vorschriften voraus zu bestimmen, beruhen auf der Anwendung von Bildern, die von fremden einfachen Erscheinungen und Willensacten hergenommen sind.

Man hat als Ideal die blosse Aufstellung von partiellen Differentialgleichungen und Vorhersagung der Erscheinungen aus denselben hingestellt. Allein auch diese sind nichts anderes, als Regeln zur Construction fremder Vorstellungsbilder, der Zahlenreihen. Partielle Differentialgleichungen fordern die Construction von Zahlenzusammenstellungen, die eine Mannigfaltigkeit von mehreren Dimensionen bilden. Sie sind, wenn man sich der Bedeutung ihrer Symbolik erinnert, absolut nichts anderes als die Forderung, sich sehr viele Punkte solcher Mannigfaltigkeiten (d. h. Stellen, die durch mehrere Zahlen der Mannigfaltigkeit, wie Raumpunkte durch die Coordinaten charakterisirt sind) vorzustellen und daraus nach bestimmten Regeln fortwährend neue Mannigfaltigkeitspunkte abzuleiten, gewissermaassen eine Fortbewegung der Punkte in der Mannigfaltigkeit zu denken.[1]

So enthalten, wenn man auf den Grund geht, auch die Maxwell'schen elektromagnetischen Gleichungen in der Form, in der sie Hertz reproducirt, Hypothetisches, der Erfahrung Hinzugefügtes, das wie immer durch Uebertragung der an endlichen Körpern beobachteten Gesetze auf von uns fingirte Elemente gebildet wird. Sie sowie alle partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, welche zudem beim gleichzeitigen Zusammenwirken mehrerer Naturkräfte (Elektricität, Magnetismus, Elasticität, Wärme, Chemismus) eine fast unübersehbare Complication haben, sind ebenfalls nur, wenn auch aus etwas anderen Elementen als den uns gewohnten Atomen zusammengesetzte, unexacte, schematische Bilder für bestimmte Thatsachengebiete. Ihre Rechtfertigung sucht Hertz erst nachträglich in der Ueber-

[1]) Vgl. Boltzmann, Ueber die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft. Wien. Sitzber. Bd. 105, S. 907, 7. Nov. 1896. Wied. Ann. Bd. 60, S. 231, 1897.

einstimmung mit der Erfahrung, geradeso wie wir es für die atomistischen Bilder thun werden.

Die Behauptung, dass durch die Atomistik, nicht aber durch die partiellen Differentialgleichungen den Thatsachen Fremdes hinzugefügt werde, scheint mir unbegründet. Allerdings darf man nicht aus der häufig durch Thatsachen so nahe gelegten Anwendbarkeit der Atomistik schliessen, dass ihre Bilder überall ausreichen müssen. Wo ihre ungezwungene Anwendung noch nicht gelang, soll man andere, von anderen Elementen ausgehende Bilder beiziehen. Man darf nur in den Thatsachen selbst wohlbegründete atomistische Bilder anwenden, niemals durch Willkürliches, Phantastisches der Natur Gewalt anthun.

In dieser Hinsicht wird gewiss Niemand die Atomistik für alle Phantastereien verantwortlich machen, welche von Unberufenen auf ihrem Gebiete getrieben wurden. Wer weiss, ob die Energetik, wenn sie je das heutige Alter der Atomistik erreichen sollte, an solchen Auswüchsen ärmer sein würde?

Man darf auch nie metaphysische Gründe für das Bild suchen oder daraus voreilige Schlüsse, wie dass die chemischen Atome materielle Punkte seien, ziehen. Ebenso wenig darf man die Möglichkeit aus dem Auge verlieren, dass es noch einmal durch ganz andere Bilder verdrängt werden könne, sagen wir, um ja nicht engherzig zu erscheinen, sogar von Mannigfaltigkeiten hergenommene, die nicht einmal die Eigenschaften unseres dreidimensionalen Raumes haben, so dass also z. B. die einfachen geometrischen Constructionen der Atomistik durch Manipulationen mit Zahlen zu ersetzen wären, die eine complicirte Mannigfaltigkeit bilden.

Ich bin somit der Letzte, der die Möglichkeit, auf anderem als atomistischem Wege ein besseres Bild der Natur zu gewinnen, leugnen würde. Gerade um für den Werth eines etwaigen anderen derartigen Naturbildes einen Maassstab zu gewinnen, will ich in diesem Buche danach streben, die alten Bilder der Mechanik so klar und consequent, als es mir möglich ist, zu entwickeln. Nun versuche man es, ein anderes hypothesenfreieres Weltbild,

sei es auf energetischer oder rein phänomenologischer Basis, nicht blos in einigen unbestimmten Andeutungen als möglich hinzustellen, sondern vom Anfange bis zum Ende mit der gleichen Klarheit zu entwickeln, wie im Folgenden das mechanische Bild dargestellt werden wird. Hic Rhodus, hic salta!

So lange dies noch nicht gelungen ist, gebe ich die Möglichkeit, nicht aber die Gewissheit zu, dass ein anderes Weltbild das mechanische verdrängen wird.

Bildern aber, welche unbestimmter und verschwommener als das nun zu entwickelnde sind, werden wir blos einen Platz neben diesem zuerkennen, da jenen zwar grössere Anpassungsfähigkeit, diesem aber die grösste innere Vollkommenheit zukommt, wodurch es gewissermaassen zum Musterbilde wird, mit dem sich an Klarheit und Deutlichkeit jede neue theoretische Vorstellung wird messen müssen.

Wir werden ferner von der Grundannahme einer wenn auch grossen, so doch endlichen Zahl von materiellen Punkten ausgehen. Man sagt gewöhnlich, durch die Differentialgleichungen werde ein zuerst von einer endlichen Zahl ausgehendes Bild ganz vermieden; allein das ist wieder Täuschung. Die Differentialgleichungen fordern gerade so wie die Atomistik zunächst die Vorstellung einer grossen endlichen Zahl von Zahlenwerthen und Mannigfaltigkeitspunkten, d. h. Stellen in der Zahlenmannigfaltigkeit. Sie behaupten nur hinterdrein, dass das Bild die Erscheinungen niemals exact darstelle, sondern nur um so mehr angenähert, je grösser man die Zahl dieser Mannigfaltigkeitspunkte und je kleiner man ihren Abstand wählt und da scheint mir wieder vorläufig die Möglichkeit noch gar nicht ausgeschlossen, dass das Bild bei einer gewissen sehr grossen Zahl der Mannigfaltigkeitspunkte die Erscheinungen am besten darstelle und bei weiterer Vergrösserung dieser Zahl sich wieder von ihnen entferne, dass die Atome in einer grossen aber endlichen Zahl existiren.

Die qualitativen Gesetze der Naturerscheinungen und auch die quantitativen Beziehungen unter sehr einfachen Verhältnissen, z. B. die Bedingungen des Gleichgewichts eines

schweren Parallelepipeds, dessen Kanten sich wie 1:2:3 verhalten, kann man freilich auch im Geiste abbilden, ohne von einer sehr grossen endlichen Zahl von Elementen auszugehen. Sobald man aber die Gesetze bei complicirten Bedingungen quantitativ angeben will, muss man immer von Differentialgleichungen ausgehen, d. h. zuerst eine grosse endliche Zahl von Mannigfaltigkeitspunkten sich vorstellen, also atomistisch denken, woran dadurch nichts geändert wird, dass man sich hinterher durch Vermehrung der Zahl der vorgestellten Punkte dem Continuum beliebig nähern kann, ohne es jemals zu erreichen.

Doch wie dem auch sei, gerade heute hat es einen Reiz, die durchsichtigste naturwissenschaftliche Disciplin, die Mechanik nach einer Methode zu behandeln, welche der momentan modernen gerade entgegengesetzt ist und von vornherein ganz specielle Vorstellungsbilder zu Grunde zu legen. Der Leser wird sich vielleicht anfangs des Gefühls nicht erwehren können, dass wir blos ein Spiel mit Gedankenbildern treiben und die Wirklichkeit aus dem Auge verlieren. Unbekümmert darum werden wir zunächst trachten, das Vorstellungsgebäude möglichst klar und widerspruchslos zu gestalten. Zeigt es sich dann in Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit, so ist damit das Willkürliche in den Grundvorstellungen entschuldigt. Wir wollten ja nichts, als ein Bild der Natur haben und dadurch, dass wir uns dessen klar bewusst sind, laufen wir nicht Gefahr, dem Bilde mehr als der Erfahrung zu trauen und gegen letztere blind zu werden.

§ 2. Die der Lehre von Raum und Zeit entlehnten Grundbegriffe. Erste Grundannahme. Continuität der Bewegung.

Jede Ortsveränderung geschieht im Verlaufe der Zeit und spielt sich im Raume ab. Die Lehre vom Raume als solchen und der Zeit als solcher haben wir daher vorauszusetzen, ehe wir die Mechanik in Angriff nehmen. Die Zeit als Mannigfaltigkeit einer Dimension ist durch die in einer Dimension angeordnete Mannigfaltigkeit der Zahlen darstellbar, dagegen geben die Raumverhältnisse zu einer

besonderen Wissenschaft, der Geometrie, Veranlassung. Die gesammte Lehre der rationalen und irrationalen reellen Zahlen mit Einschluss der Infinitesimalrechnung sowie die gesammte Geometrie setzen wir daher als bekannt voraus. Zwar involviren auch diese Wissenschaften manche principielle Schwierigkeiten. Doch dieselben übertragen sich gleichmässig auf alle Ansichten über die Principien der Mechanik, da alle von Raum und Zeit ausgehen müssen. Da wir hier aber nur die der Mechanik eigenthümlichen principiellen Schwierigkeiten besprechen wollen, so wollen wir uns um die der Arithmetik und Geometrie nicht kümmern.

Wir können offenbar kein Bild von Körpern und Bewegungen derselben erhalten, wenn wir alle Theile des gesammten unendlichen Raumes gleichmässig ins Auge fassen. Wir wollen daher zahlreiche einzelne Punkte desselben vor den übrigen hervorheben. Diese vor den übrigen ausgezeichneten Raumpunkte nennen wir materielle Punkte.

Um die Lage irgend eines der materiellen Punkte zu irgend einer Zeit zu definiren, denken wir uns zu allen Zeiten im Raume ein bestimmtes rechtwinkeliges Coordinatensystem vorhanden. Unter dem Orte unseres materiellen Punktes zur gegebenen Zeit verstehen wir dessen Lage relativ gegen jenes Coordinatensystem, welche wir in bekannter Weise durch cartesische oder Polarcoordinaten oder sonst wie bestimmen.

Das Coordinatensystem ist freilich nichts Reelles, allein darin liegt nach den hier zu Grunde gelegten Anschauungen keine Schwierigkeit, da es sich ja gegenwärtig blos um Construction eines Vorstellungsbildes handelt. Wir werden später sehen, dass dieses Coordinatensystem in verschiedener Weise gewählt werden kann. Wir werden auch sehen, dass der Ort eines materiellen Punktes statt durch seine relative Lage gegen dieses Coordinatensystem durch die gegen drei besonders hervorzuhebende materielle Punkte oder einen Körper, welche gewisse Eigenschaften besitzen müssen, definirt werden kann oder auch gegen gewisse aus der Gesammtheit der Punkte abzuleitende Gerade oder Ebenen, so dass man in das Gedankenbild blos Gleichartiges (lauter materielle Punkte), nicht

auch dazu noch ein Coordinatensystem aufzunehmen braucht. Doch es würde unser Bild nur verwirren, wenn wir dies jetzt berücksichtigen würden. Unser Bild besteht daher aus dem Coordinatensysteme und sämmtlichen materiellen Punkten, welche zu jeder Zeit eine gegebene Lage relativ gegen das Coordinatensystem haben. Dass wir noch andere Coordinatensysteme wählen können, ohne dass das Bild von seiner Uebereinstimmung mit der Erfahrung etwas einbüssen würde, kümmert uns einstweilen nicht.

Ebenso wenig als die Frage nach der Möglichkeit, Lagen im Raume absolut zu bestimmen, macht uns die nach dem Kriterium der Gleichheit verschiedener Zeitintervalle von unserem Standpunkte Schwierigkeiten. Wir fingiren die Möglichkeit der Construction eines vollkommen sich gleich bleibenden Chronometers, der genügenden Abhaltung aller störenden Einflüsse von demselben und seiner Ersetzung durch ein anderes gleich beschaffenes, noch bevor es sich im Mindesten abgenutzt hat. Ein Blick auf das Chronometer belehrt uns dann über den Werth derjenigen independenten Variabeln, welche wir die Zeit nannten.

Ich bin weit entfernt mir einzubilden, dass es möglich sei, hier und im Folgenden jedes Wort vor dem Gebrauche exact zu definiren. (Vgl. die erste Seite meiner Abhandlung „über die Frage nach der objectiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur".)[1] Die Ursache der Klarheit obiger Bilder liegt auf der Hand; es sind Vorschriften, räumliche Verhältnisse zu denken, welche sich jeder leicht angenähert mit Lineal und Bleistift oder Holzstäben und Stricknadeln sichtbar und greifbar darstellen kann und welche so geläufig sind, dass ihre blosse Vorstellung meist schon ohne Zeichnung ausreichend klar ist. Dabei wird von einem Minimum von Vorstellungen Gebrauch gemacht. Der Uebergang von wenigen einzeln vorstellbaren Punkten zu sehr vielen wird durch allgemeine Regeln übersichtlich vermittelt. Je mehr sich durch diese einfachen Bilder, die wir doch zur Darstellung gewisser Phänomene gegenwärtig sicher nicht ent-

---

[1]) Wien. Sitzber., Bd. 106, S. 83, 7. Januar 1897.

behren können, darstellen lässt, desto begreiflicher muss uns die Natur erscheinen.

Was nur durch Zuziehung anderer Vorstellungen erklärt werden kann, erscheint uns weit unbegreiflicher. Jedenfalls aber soll man auch bei Darlegung derartiger anderer Vorstellungen die Elemente, von denen man ausgeht, nicht blos unbestimmt andeuten, sondern ebenso aufrichtig und klar präcisiren, wie ich dies hier versuche.

Wir wollen nun unser Bild weiter ausführen dadurch, dass wir uns bestimmte Gesetze für die Ortsveränderung aller dieser materiellen Punkte mit der Zeit fingiren. Annahme 1. Wir stellen uns vor, dass zur selben Zeit niemals zwei verschiedene materielle Punkte zusammenfallen resp. unendlich nahe aneinander liegen, dass dagegen jedesmal, wenn sich zu irgend einer Zeit irgend ein materieller Punkt an irgend einem Orte (natürlich relativ gegen unser Coordinatensystem) befindet, dann zu einer unendlich benachbarten Zeit sich ebenfalls ein und nur ein materieller Punkt an einem dem ersteren Orte unendlich benachbarten Orte befindet. Wir sagen, der letztere materielle Punkt ist derselbe wie der erstere und nennen dies das Gesetz der Continuität der Bewegung. Es giebt uns allein die Möglichkeit, denselben materiellen Punkt zu verschiedenen Zeiten wieder zu erkennen. Den Inbegriff aller Orte, an denen sich ein und derselbe materielle Punkt im Verlaufe aller Zeiten befindet, heisst die Bahn dieses materiellen Punktes, der Inbegriff derjenigen Orte, welche er während einer endlich begrenzten Zeit durchlief, heisst der Weg während dieser Zeit.

Wir können das Gesetz der Continuität auch so formuliren: Jedem materiellen Punkte, der zu einer gewissen Zeit gewisse Coordinaten hatte, entspricht zu einer unendlich wenig verschiedenen Zeit ein und nur ein materieller Punkt mit je unendlich wenig verschiedenen Coordinaten, welcher derselbe materielle Punkt heisst, d. h. die Coordinaten jedes materiellen Punktes sind continuirliche Functionen der Zeit, $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, $z = \psi(t)$.

§ 3. Zweite Grundannahme. Existenz der Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit. Begriff der Geschwindigkeit und deren Componenten.

Wir wollen unser Bild weiter dahin ergänzen, dass die eben besprochenen Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ und $\chi(t)$, welche die Abhängigkeit der Coordinaten jedes materiellen Punktes von der Zeit ausdrücken, erste und zweite Differentialquotienten haben sollen, die nirgends unendlich werden, was wir die Grundannahme 2 nennen wollen. Wir wollen mit x, y, z resp. $x_1 = x + \xi$, $y_1 = y + \eta$, $z_1 = z + \zeta$ die Coordinaten der beiden Raumpunkte A und A' bezeichnen, wo sich ein bestimmter materieller Punkt zur Zeit t resp. $t + \tau$ befand. σ sei die Länge der Geraden AA'. Wenn dann t constant bleibt und τ immer mehr abnimmt, so muss also Folgendes eintreten:

1. Der Quotient ξ/τ nähert sich einer bestimmten endlichen Grenze, welche wir mit u bezeichnen. Nach der Symbolik der Differentialrechnung wird sie mit dx/dt oder $\varphi'(t)$ bezeichnet. Dasselbe gilt für η/τ und ζ/τ. Es ist also

$$1) \left\{ \begin{aligned} &\lim \frac{\xi}{\tau} = u = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \quad \lim \frac{\eta}{\tau} = v = \frac{dy}{dt} = \psi'(t), \\ &\qquad\qquad \lim \frac{\zeta}{\tau} = w = \frac{dz}{dt} = \chi'(t), \end{aligned} \right.$$

welche Grössen positiv und negativ und auch gleich Null sein können und die Componenten der Geschwindigkeit des materiellen Punktes in den drei Coordinatenrichtungen heissen.

2. Da für jeden Wert von τ die Gleichung

$$\sigma = +\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

besteht, so nähert sich der Quotient σ/τ der Limite

$$2) \left\{ \begin{aligned} c &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}, \end{aligned} \right.$$

welche die Geschwindigkeit des materiellen Punktes zur Zeit t heisst und nur einen endlichen positiven Wert einschliesslich der Null haben kann.

3. Wenn die letztere Limite nicht gleich Null ist, so nähert sich die Richtung der von A gegen A' gezogenen Geraden jedenfalls einer bestimmten, in einem bestimmten Sinne gezogenen Richtung im Raume, welche die Richtung der Geschwindigkeit des materiellen Punktes zur Zeit t heisst. Wir wollen allgemein die Winkel einer beliebigen gerichteten (in einem bestimmten Sinne gezogenen) Geraden G mit den positiven Coordinatenaxen mit (G, x), (G, y) und (G, z), den Winkel zweier gerichteter Geraden G und H mit (G, H) bezeichnen. Da für jeden Werth von τ die Gleichung $\xi = \sigma \cos(\sigma, x)$ mit zwei analogen, für die beiden übrigen Coordinatenaxen geltenden besteht, so ist auch:

$$3)\qquad u = c\cos(c, x),\quad v = c\cos(c, y),\quad w = c\cos(c, z).$$

Seien A'', A''', ... $A^{(n)}$ die Raumpunkte, wo sich der materielle Punkt zu den Zeiten $t + 2\tau$, $t + 3\tau$, ... $t + n\tau = T$ befindet, so nähert sich dann, wie die Integralrechnung lehrt, auch die Summe der Geraden AA', $A'A''$, ... $A^{(n-1)}A^{(n)}$, wenn τ immer mehr abnimmt, dagegen t und das Product $n\tau$ constante endliche Grössen sind, einer bestimmten Limite, welche der in der Zeit $T - t$ zurückgelegte Weg heisst und nach der in der Integralrechnung üblichen Symbolik mit $\int_t^T c\,dt$ bezeichnet wird, wobei man noch häufig ds für $c\,dt$ schreibt, so dass

$$4)\qquad \frac{ds}{dt} = c = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

ist. Die erste der Gleichungen 1) hat keine andere Bedeutung, als dass der Zuwachs ξ der Abscisse sich von dem mit u multiplicirten Zuwachse τ der Zeit nur um eine Grösse unterscheidet, welche durch τ dividirt sich mit abnehmendem τ der Grenze Null nähert. Die Bedeutung solcher Gleichungen wird besonders kurz und anschaulich ausgedrückt, wenn man die Zuwächse der Variabeln gleich anfangs durch den betreffenden Variabeln vorangestellte Differentialzeichen bezeichnet. Die Gleichheit zweier Differentialausdrücke bedeutet dann nichts anderes, als dass sich dieselben nur um

eine Grösse unterscheiden, welche durch eines der Differentiale (wenn der Coefficient eines derselben Null ist, muss dieses gewählt werden) dividirt, sich mit abnehmendem Werthe des Nenners der Grenze Null nähert (unendlich klein höherer Ordnung ist). Die Gleichheit zweier Differentialausdrücke ist daher erwiesen, wenn man geometrisch oder sonst wie zeigen kann, dass ihr Unterschied unendlich klein höherer Ordnung ist.

Wir wollen uns sehr häufig der Gleichungen zwischen Differentialausdrücken in diesem Sinne bedienen und schreiben daher die Gleichungen 1), 2), 4) einfacher in der Form:

$$4\text{a)}\qquad \begin{cases} dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt, \\ ds = c\,dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \end{cases}$$

Die letzte dieser Gleichungen besagt, dass sich der Unterschied zwischen dem sehr kleinen Wege ds und der mit c multiplicirten Zeit dt, während welcher er zurückgelegt wurde, durch dt dividirt der Grenze Null nähert, woraus sofort folgt, dass die Summe $\int ds$ aller während einer endlichen Zeit zurückgelegten Wege gleich dem Integrale $\int c\,dt$ ist, wenn c als Function der Zeit gegeben ist.

Es giebt wie bekannt auch Functionen, welche bei jedem unendlich kleinen Zuwachs des Argumentes unendlich wenig wachsen, ohne dass sich für irgend einen Werth des Argumentes der Quotient des Zuwachses des Argumentes in den der Function bei unendlicher Abnahme des ersteren irgend einer bestimmten Grenze nähert; daher folgt aus der Annahme 1 noch keineswegs die Annahme 2. Jeder, der einmal Mechanik studirte, wird sich wohl erinnern, welche Schwierigkeiten ihm das Verständniss der Beweise machte, dass die Bewegung während einer sehr kurzen Zeit als geradlinig und gleichförmig, die Kräfte während einer solchen als unveränderlich betrachtet werden können. Diese Schwierigkeiten liegen einfach darin, dass die betreffenden Beweise gar nicht richtig sind.

Die analytischen Functionen haben wir ja gerade zur Darstellung der Erfahrungsthatsachen gemacht. Ihre Differentiirbarkeit kann nicht als Beweis für die Differentiirbar-

keit empirisch gegebener Functionen gelten, da ja die Zahl der denkbaren undifferentiirbaren Functionen gerade so unendlich gross ist, wie die der differentiirbaren. Ebenso ist die Thatsache, dass jeder mit der Hand oder einer Maschine gezogene Strich dem Habitus einer differenzirbaren Function entspricht, nur ein Beweis, dass, so weit heute unsere Beobachtungsmittel gehen, die Differentiirbarkeit der in der Mechanik empirisch gegebenen Functionen eben etwas erfahrungsmässig Gegebenes ist.

Deshalb haben wir ohne jede Beschönigung die Differentiirbarkeit einfach als Annahme hingestellt, welche mit den bisherigen Erfahrungsthatsachen übereinstimmt.

§ 4. Einführung der Vectoren.

Im Folgenden wird uns die Vectorrechnung oft nützlich sein. Wir wollen daher ihre Grundbegriffe schon an diesem einfachen Falle erörtern. Unter einem Vector verstehen wir eine endliche Gerade von bestimmter Länge, bestimmter Richtung und bestimmtem Sinne (Angabe, welcher ihrer Endpunkte als Anfangs-, welcher als Endpunkt anzusehen ist). Da der Zweck des Vectors nur der sein soll, uns diese drei Dinge zu versinnlichen, so ist es, so lange der Vector nicht noch etwas anderes ausdrücken soll, gleichgültig, von welchem Punkte des Raumes aus er gezogen wird. Am häufigsten wollen wir einen Vector vom Coordinatenursprunge O aus ziehen (diesen als Anfangspunkt der betreffenden Geraden wählen).

Unter der Summe zweier Vectoren (Vectorsumme) verstehen wir einen dritten, den wir erhalten, wenn wir vom Endpunkte des einen Vectors aus den zweiten Vector auftragen und den Anfangspunkt des ersten mit dem Endpunkte des so erhaltenen zweiten Vectors verbinden. Die Summe wird also aus den beiden Vectoren so erhalten, wie nach dem Kräfteparallelogramme die Resultirende zweier Kräfte. Ein Vector, dessen Summe mit einem zweiten einen dritten Vector liefert, heisst die Differenz (Vectordifferenz) des dritten und zweiten Vectors. Wenn die Projection eines Vectors auf die Abscissenaxe gleich der Summe der Pro-

jectionen zweier anderer Vectoren auf die Abscissenaxe ist und dasselbe von den beiden anderen Coordinatenaxen gilt, so ist, wie man sofort sieht, der erste Vector die Summe der beiden anderen. Dasselbe gilt für die Differenz zweier Vectoren und für die Summe von mehr als zwei Vectoren. Um letztere zu finden, muss man zur Summe des ersten und zweiten den dritten addiren u. s. w., daher vom Endpunkte B des ersten Vectors AB eine Gerade BC gleich lang und gleich gerichtet wie der zweite Vector, vom Endpunkte C dieser Geraden eine Gerade CD gleich lang und gleich gerichtet wie der dritte Vector u. s. w. ziehen. Die vom Anfangspunkte A des ersten Vectors zum Endpunkte M der letzten dieser Geraden gezogene Gerade ist dann die Summe aller Vectoren. Die Figur

$$5)\qquad ABCD\ldots M,$$

die natürlich nicht in einer Ebene zu liegen braucht, heisst das Vectorpolygon, speciell, wenn die Vectoren Kräfte darstellen, das Kräftepolygon.

Wir können offenbar die Lage beliebiger materieller Punkte zu einer beliebigen Zeit auch durch die Vectoren darstellen, welche man von irgend einem Raumpunkte, z. B. vom Coordinatenursprunge gegen diejenigen Raumpunkte ziehen kann, in denen sich die materiellen Punkte zur betreffenden Zeit befinden. Die Entfernung AA' der Raumpunkte A und A', wo sich ein materieller Punkt zu den Zeiten t und $t+\tau$ befindet, kann dann ebenfalls als Vector betrachtet werden und zwar ist derselbe die Differenz der Vektoren OA' und OA, welche die Punkte A und A' mit dem Coordinatenursprunge O verbinden. Wir können von einem beliebigen Punkte, z. B. vom Coordinatenursprung O aus auch einen Vector Ob ziehen, welcher gleich gerichtet und gleich lang wie AA' ist. Da jedoch die Länge von AA' mit abnehmendem τ selbst bis ins Unendliche abnimmt, so können wir auch die Länge dieses Vectors Ob im Verhältnisse von τ zu irgend einer ein für allemal unveränderlich gewählten Zeit (der Zeiteinheit) vergrössern. Die Grenze OB, welcher sich der so vergrösserte Vector mit abnehmendem τ

nähert, nennen wir den Geschwindigkeitsvector des betreffenden materiellen Punktes zur Zeit t. Er selbst stellt die Geschwindigkeit des betreffenden materiellen Punktes in Grösse und Richtung, seine Projectionen auf die drei Coordinatenaxen, deren Componenten u, v, w dar, und zwar gleichgültig, von welchem Punkte des Raumes aus er gezogen wird.

§ 5. Begriff der Beschleunigung und deren Componenten.

Wir haben in die Grundannahme 2 auch die Bedingung aufgenommen, dass die Coordinaten zweite Differentialquotienten nach der Zeit besitzen. Wenn diese Differentialquotienten während einer endlichen Zeit $n\tau$ gleich Null sind, so liegen die Verbindungslinien AA', $A'A''$, $A''A'''$ ... der Raumpunkte, wo sich der materielle Punkt zu den Zeiten t, $t+\tau$, $t+2\tau$, ... $t+n\tau$ befindet, alle in ein und derselben Geraden und sind alle untereinander gleich lang; die Bahn des materiellen Punktes ist also eine Gerade und es werden in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt. Die Geschwindigkeit ist constant, die Bewegung gleichförmig. Jede Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung, jede Krümmung der Bahn nach der einen oder anderen Seite ist also dadurch bedingt, dass die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit von Null verschiedene Werthe haben. Es sind daher jetzt vor allem anderen die Werthe dieser zweiten Differentialquotienten zu studiren.

Ein materieller Punkt möge sich wieder zu den Zeiten t, $t+\tau$ und $t+2\tau$ in den Raumpunkten A, A' und A'' befinden, deren Projectionen auf die Abscissenaxe D, D', D'' seien (s. Fig. 1). x, y, z resp. x', y', z' und x'', y'', z'' seien die Coordinaten des materiellen Punktes zu den Zeiten t resp. $t+\tau$ und $t+2\tau$. Dann ist bekanntlich der zweite Differentialquotient der Abscisse x des materiellen Punktes nach der Zeit, welchen man die Componente der Beschleunigung dieses materiellen Punktes in der Abscissenrichtung nennt, gleich der Limite des Ausdrucks

$$6)\qquad \frac{x''-x'-(x'-x)}{\tau^2}=\frac{D'D''-DD'}{\tau^2}$$

für unendlich abnehmende τ; nun sind aber die Strecken DD' und $D'D''$ die Projectionen der Vectoren AA' und $A'A''$ auf die Abscissenaxe. Der Zähler des Bruches der Formel 6 ist also die Projection der Differenz dieser beiden Vectoren auf die Abscissenaxe. Da es hierbei offenbar gleichgültig ist, von welchem Punkte aus man die Vectoren aufträgt, so wollen wir die beden Vectoren von demselben Raumpunkte aus auftragen, also z. B. den Vector AA' durch einen gleich langen und gleich gerichteten, von A' aus gezogenen Vector $A'E$ ersetzen. Die Verbindungslinie EA'' der Endpunkte der beiden Vectoren $A'E$ und $A'A''$ oder eine ihr parallel vom Coordinatenursprunge aus gezogene gleich lange Gerade Oc stellt also die Differenz der beiden Vectoren $A'A''$ und AA' dar. Die Projection von Oc oder EA'' auf die Abscissenaxe ist daher gleich dem Zähler der Formel 6. Die Limite, welcher sich diese durch τ^2 dividirte Differenz nähert, ist die Componente der Beschleunigung in der Abscissenrichtung. Da dasselbe von den beiden übrigen Coordinatenrichtungen gilt, so giebt uns also der Vector EA'' oder Oc ein genaues Bild von der Krümmung der Bahn, sowie von der Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung. Man wird die Länge dieses Vectors wieder lieber im Verhältnisse von τ^2 zum Quadrate der gewählten Zeiteinheit vergrössert zeichnen. Die Limite OC, welcher sich der so vergrösserte, vom Coordinatenursprunge aus gezogene Vector bei constantem t und abnehmendem τ nähert, heisst der Vector der Beschleunigung oder noch kürzer einfach die Beschleunigung des betreffenden materiellen Punktes zur Zeit t. Seine Componenten in den drei Coordinatenrichtungen sind gleich dem, was wir schon früher die Componenten der Beschleunigung in den drei Coordinatenrichtungen genannt haben, also gleich $\frac{d^2x}{dt^2}$

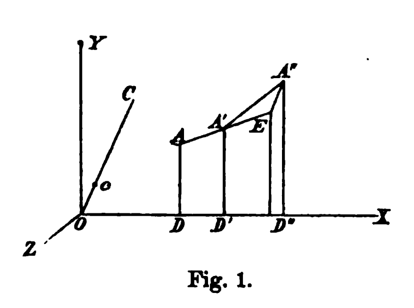


Fig. 1.

resp. $\frac{d^2 y}{d t^2}$ und $\frac{d^2 z}{d t^2}$. Die Gesammtlänge des Vectors OC ist die positive Quadratwurzel aus:

$$\left(\frac{d^2 x}{d t^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d t^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{d t^2}\right)^2.$$

Selbstverständlich hätte man denselben Vector OC auch erhalten, wenn man die Endpunkte der beiden Geschwindigkeitsvectoren OB und OB' des materiellen Punktes zu den Zeiten t und $t+\tau$ durch eine Gerade verbunden und die Limite gesucht hätte, welcher sich diese Gerade durch τ dividirt nähert.

Seien (g, x), (g, y) und (g, z) die Winkel zwischen der Beschleunigung unseres materiellen Punktes (d. h. dem Vector OC), und den drei Coordinatenaxen und g die Grösse dieser Beschleunigung (d. h. die Länge dieses Vectors); dann ist also:

$$7)\quad \frac{d^2 x}{d t^2} = g \cos(g, x),\ \frac{d^2 y}{d t^2} = g \cos(g, y),\ \frac{d^2 z}{d t^2} = g\,(\cos(g, z).$$

Wenn die Beschleunigung eines materiellen Punktes in einem Falle durch irgend einen Vector OC, in einem andern Falle durch einen andern Vector OD dargestellt ist, so verstehen wir unter der Summe dieser beiden Beschleunigungen diejenige Beschleunigung, welche durch die Summe der beiden Vectoren OC und OD dargestellt wird. Sind die Componenten der Beschleunigung OC nach den Coordinatenrichtungen gleich

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2},\quad \frac{d^2 y_1}{d t^2},\quad \frac{d^2 z_1}{d t^2},$$

die der Beschleunigung OD

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2},\quad \frac{d^2 y_2}{d t^2},\quad \frac{d^2 z_2}{d t^2},$$

so sind die Componenten der Summe beider Beschleunigungen

$$8)\qquad \frac{d^2 x_1}{d t^2} + \frac{d^2 x_2}{d t^2},\quad \frac{d^2 y_1}{d t^2} + \frac{d^2 y_2}{d t^2},\quad \frac{d^2 z_1}{d t^2} + \frac{d^2 z_2}{d t^2}.$$

Analog definiren wir die Summe von drei und mehr Beschleunigungen.

§ 6. Grundannahme 3—7.

Es sei eine beliebige Anzahl (n) materieller Punkte gegeben. Zu irgend einer Zeit t sollen sich dieselben in den Raumpunkten A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$ befinden. Wir ergänzen nun unser Bild durch folgende weitere Grundannahmen, welche uns die Beschleunigungen aus der Constellation der materiellen Punkte finden lehren.

Grundannahme 3. Die (im Sinne des obigen als Vector zu denkende) Beschleunigung irgend eines materiellen Punktes ist gleich der Summe von $n - 1$ (ebenso zu denkenden) Beschleunigungen, von denen jede die Richtung der durch den betrachteten materiellen Punkt und einen der übrigen materiellen Punkte gezogenen Geraden hat und als die von jenem zweiten Punkte dem ersten ertheilte Beschleunigung oder als die Beschleunigung des ersten materiellen Punktes durch den zweiten bezeichnet wird.

Grundannahme 4. Die Beschleunigung irgend eines materiellen Punktes durch einen zweiten ist immer entgegengesetzt gerichtet, der des zweiten durch den ersten. Wenn also die erste Beschleunigung die Richtung der von dem ersten gegen den zweiten Punkt gezogenen Verbindungslinie hat (Fall B), so hat die zweite die Richtung der von dem zweiten gegen den ersten Punkt gezogenen Verbindungslinie. Man sagt dann, die beiden materiellen Punkte ziehen sich an. Hat dagegen die erste Beschleunigung die Richtung der Verlängerung der vom zweiten gegen den ersten Punkt gezogenen Verbindungslinie über den ersten Punkt hinaus (Fall A), so hat auch die zweite Beschleunigung die Richtung der Verlängerung der von dem ersten gegen den zweiten Punkt gezogenen Verbindungslinie über den zweiten hinaus, die beiden materiellen Punkte stossen sich ab.

Grundannahme 5. Die Grösse der Beschleunigung g_{12} eines beliebigen materiellen Punktes durch einen beliebigen anderen hängt weder von der absoluten Lage der beiden Punkte im Raume, noch von dem Absolutwerthe der Zeit, noch von der Beschaffenheit der Umgebung oder der Geschwindigkeit der betreffenden Punkte, noch von der Richtung

ihrer Verbindungslinie im Raume, sondern allein von der Länge r_{12} dieser Verbindungslinie ab. Sie ist also allein eine Function $F(r_{12})$ dieser Länge. Wir geben der Function $F(r_{12})$ das positive oder negative Vorzeichen, setzen also, da wir der Beschleunigung g_{12} als einem Vector immer das positive Vorzeichen geben, $g_{12} = + F(r_{12})$ oder $- F(r_{12})$, je nachdem die beiden Punkte sich abstossen oder anziehen, je nachdem also die Beschleunigung in die Richtung der Verlängerung der Verbindungslinie oder in diese selbst fällt. Die Form dieser Function lassen wir vorläufig noch vollständig unbestimmt.[1])

Grundannahme 6. Die Grösse der Beschleunigung, welche der erste materielle Punkt dem zweiten ertheilt, braucht zwar nicht gleich der zu sein, welche umgekehrt der zweite dem ersten ertheilt. Beide Beschleunigungen stehen jedoch in einem zu allen Zeiten und in allen Entfernungen constantem Verhältnisse. Setzen wir daher die Grösse der Beschleunigung g_{21} des zweiten materiellen Punktes durch den ersten gleich $\mu_2 F(r_{12})$, so ist μ_2 eine für dieses Punktepaar zu allen Zeiten und in allen Entfernungen constante Grösse. Sie ist wesentlich positiv, da wir auch für den zweiten Punkt im Falle der Anziehung $g_{21} = + \mu_2 F(r_{12})$, im Falle der Abstossung $g_{21} = - \mu_2 F(r_{12})$ setzen.

Grundannahme 7. Ist r_{13} die Entfernung desjenigen materiellen Punktes, welchen wir den ersten genannt haben, von einem ebenfalls beliebigen dritten materiellen Punkte und $\Phi(r_{13})$ die Beschleunigung des ersten materiellen Punktes durch den dritten, ferner $\mu_3 \Phi(r_{13})$ die des dritten durch den ersten materiellen Punkt, so steht immer die Beschleunigung des zweiten materiellen Punktes durch den dritten

---

[1]) Hier ist allerdings ohne erhebliche Störung der Klarheit eine Verallgemeinerung des Bildes möglich und auch versucht worden, durch die Annahme, dass die Function F auch den ersten oder sogar den zweiten Differentialquotienten von r_{12} nach der Zeit enthält. Ist letzterer linear darin enthalten, so kann man auch sagen, dass die Factoren m, von denen später die Rede sein wird, nicht constant sind. Doch hat diese Verallgemeinerung so wenig praktische Bedeutung erlangt, dass wir hier nicht weiter darauf eingehen wollen.

zu der des dritten durch den zweiten im constanten Verhältnisse $\mu_2 : \mu_3$, so dass, wenn r_{23} die Entfernung der letzteren beiden materiellen Punkte und $\Psi(r_{23})$ die Beschleunigung des zweiten materiellen Punktes durch den dritten ist, dann $\frac{\mu_3}{\mu_2} \Psi(r_{23})$ die des dritten durch den zweiten sein muss.

Um dieser Annahme einen mehr symmetrischen Ausdruck zu verleihen, bezeichnen wir mit m_1 eine ganz beliebige, aber zu allen Zeiten und an allen Orten constante positive Zahl und setzen:

$$\frac{m_1}{\mu_2} = m_2, \quad \frac{m_1}{\mu_3} = m_3 .$$

Ferner bezeichnen wir die Grösse $m_1 . F(r_{12})$, welche offenbar ebenfalls eine Function von r_{12} sein wird, die dasselbe Vorzeichen wie $F(r_{12})$ hat, mit $f_{12}(r_{12})$; die Grössen $\frac{m_1}{\mu_2} \Phi(r_{13})$ und $\frac{m_1}{\mu_2} \Psi(r_{23})$ mit $f_{13}(r_{13})$ und $f_{23}(r_{23})$. Dann können wir die obigen Relationen in der folgenden symmetrischen Form schreiben:

$$\begin{aligned} m_1 g_{12} &= m_2 g_{21} = \pm f_{12}(r_{12}), \\ m_1 g_{13} &= m_3 g_{31} = \pm f_{13}(r_{13}), \\ m_2 g_{23} &= m_3 g_{32} = \pm f_{23}(r_{23}), \end{aligned}$$

wo im Falle der Abstossung das positive, in dem der Anziehung das negative Zeichen gilt.

Ziehen wir einen vierten materiellen Punkt in den Kreis der Betrachtungen, so können wir erfahrungsmässig constatiren die Beschleunigungen

$$g_{14} = F_1(r_{14}), \quad g_{24} = \Phi_1(r_{24}), \quad g_{34} = \Psi_1(r_{34}),$$

welche der erste, zweite und dritte materielle Punkt in den Entfernungen r_{14}, r_{24} und r_{34} durch den vierten erfahren, ferner den Factor μ_4, mit den man die Beschleunigung $F_1(r_{14})$ multipliciren muss, um die Beschleunigung g_{41} des vierten materiellen Punktes durch den ersten zu erhalten. Da die Grundannahme, welche wir die Grundannahme 7 nannten, für je drei beliebige materielle Punkte gelten soll, so muss dann die Beschleunigung g_{42} des vierten materiellen

Punktes durch den zweiten gleich $\frac{\mu_4}{\mu_2}\,\Phi_1(r_{24})$ und die Beschleunigung g_{43} des vierten materiellen Punktes durch den dritten gleich $\frac{\mu_4}{\mu_3}\,\Psi_1(r_{34})$ sein. Wenn wir nun genau wie früher setzen

$$\frac{m_1}{\mu_4} = m_4, \quad m_1\,F(r_{14}) = f_{14}(r_{14}),$$

$$\frac{m_1}{\mu_2}\,\Phi_1(r_{24}) = m_2\,\Phi_1(r_{24}) = f_{24}(r_{24}),$$

$$\frac{m_1}{\mu_3}\,\Psi_1(r_{34}) = m_3\,\Psi_1(r_{34}) = f_{34}(r_{34}),$$

so erhalten wir:

$$m_1 g_{14} = m_4 g_{41} = \pm f_{14}(r_{14}),$$

$$m_2 g_{24} = m_4 g_{42} = \pm f_{24}(r_{24}),$$

$$m_3 g_{34} = m_4 g_{43} = \pm f_{34}(r_{34}).$$

Die Ausdehnung dieser Gleichungen auf mehr als vier materielle Punkte hat keine Schwierigkeit.

§ 7. Masse und Kraft. Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung.

Wir erhalten nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten für jeden materiellen Punkt eine bestimmte Zahl m, welche wir dessen Masse nennen und für je zwei materielle Punkte eine Function $f(r)$ ihrer Entfernung r, welche wir die zwischen diesen materiellen Punkten in dieser Entfernung wirkende Kraft nennen. Den Absolutwerth von $f(r)$ bezeichnet man als die Intensität dieser Kraft, sowohl der Kraft, welche der erste Punkt auf den zweiten ausübt, und welche gleich dem Producte der Masse des ersten in die Beschleunigung ist, die er durch den zweiten erfährt, als auch der Kraft des zweiten Punktes auf den ersten, die gleich dem Producte der Masse des zweiten in dessen Beschleunigung durch den ersten ist. Die Intensität der Kraft soll also wie der Absolutwerth der Beschleunigung als wesentlich positiv betrachtet werden. Die Richtung der Beschleunigung, welche der zweite Punkt dem ersten ertheilt, nennt man die

Richtung der von dem zweiten auf den ersten ausgeübten Kraft. Sie ist immer entgegengesetzt wie die Richtung der vom ersten auf den zweiten ausgeübten Kraft und gegen den zweiten oder von ihm weg gerichtet, je nachdem $f(r)$ negativ oder positiv ist.

Die von einem materiellen Punkte auf einen zweiten ausgeübte Kraft ist also immer gleich, aber entgegengesetzt gerichtet der von dem zweiten auf den ersten ausgeübten. Man sagt auch, Wirkung und Gegenwirkung sind gleich, aber entgegengesetzt gerichtet.

Wir sagen der Kürze halber, die zwischen zwei Punkten wirkende Kraft ist eine Centrikraft, womit wir ausdrücken: 1. dass ihre Intensität nur Function der Länge der Entfernung der beiden Punkte ist, 2. dass ihre Richtung in die Richtung der Verbindungslinie derselben fällt, 3. dass Wirkung und Gegenwirkung gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Damit die Bewegung sicher eindeutig bestimmt ist, nehmen wir noch an, dass die natürlich eindeutige Function der Entfernung r, welche die Kraft giebt, für alle in Betracht kommenden Werthe des r eine endliche erste Ableitung hat (incl. Null) oder dass wenigstens der Quotient des Zuwachses von r in den dazu gehörigen Zuwachs von $f(r)$ für diese Werthe von r niemals unendlich wird.

Von den Massen m aller materiellen Punkte ist eine ganz willkürlich. Sämmtliche anderen aber sind durch diese eine und durch die Erfahrungsthatsachen bestimmt.

Obwohl ich statt aller Citate lieber vorausschicke, dass ich in diesem Buche blos Bekanntes darstelle und keinen der angeführten Sätze selbst gefunden zu haben beanspruche, so will ich doch hier, da dies vielleicht weniger bekannt ist, erwähnen, dass die auseinandergesetzte Definition der Masse von Mach stammt.[1])

Es würde unser Bild vereinfachen, wenn wir die Massen aller materiellen Punkte gleich annähmen, also voraussetzten, dass sich je zwei materielle Punkte gleiche, aber entgegengesetzte Beschleunigungen ertheilen. Würde man dann an-

---

[1]) Carl's Repertorium, Bd. 4.

nehmen, dass in dichteren Körpern einfach mehr materielle Punkte auf die Volumeinheit entfallen, so könnte man alle Erscheinungen ebenso gut darstellen. Auch einen materiellen Punkt von der Masse m könnte man sich sehr angenähert durch m sehr nahe, fest verbundene materielle Punkte von der Masse 1 darstellen. Ich habe das allgemeinere Bild blos deshalb acceptirt, weil es ebenfalls mit keiner Unklarheit oder Unbestimmtheit behaftet ist.

Natürlich sind die hier gemachten Grundannahmen organisch miteinander verbunden, so dass man vielfach in Widersprüche gerathen würde, wenn man nur eine oder wenige fallen liesse oder veränderte, während man die übrigen unverändert beibehielte. So kann man z. B. zeigen, dass, wenn man die Unabhängigkeit der Beschleunigung, die sich zwei materielle Punkte ertheilen, von ihrer Lage im Raume und vom Absolutwerthe der Zeit annimmt, aber eine der Annahme 4, 5 oder 7 fallen lässt, die Geschwindigkeit zweier fest verbundener materieller Punkte mit der Zeit ins Unendliche wachsen könnte, wobei natürlich noch vorausgesetzt ist, dass die Wirkung der Vorrichtung, welche sie (nahe) fest verbindet, selbst durch Kräfte erzeugt ist, die unseren Annahmen entsprechen. Daraus folgt jedoch selbstverständlich nicht, dass sich die Gesammtheit unserer Annahmen durch das Energieprincip oder andere allgemeine Principien ersetzen liesse. Die Möglichkeit, einen Theil unserer Grundannahmen durch derartige Principien zu ersetzen, will ich keineswegs leugnen.

Ja man könnte sogar statt von dem Begriffe der Beschleunigung von der Gleichung der lebendigen Kraft ausgehen, indem man z. B. voraussetzt, dass diese Gleichung für jede Coordinatenrichtung gesondert gilt. Es dürfte dies bei der wichtigen Rolle, die das Energieprincip in der gesammten Natur spielt, vielleicht Manchem sympathisch sein. Doch fand ich keine Möglichkeit, die Ersetzung der hier gemachten Grundannahmen durch allgemeinere Principien in einer Weise zu bewerkstelligen, wodurch die Grundannahmen wirklich wesentlich vereinfacht würden. Ich habe mich darum auch nicht besonders bemüht, da mir dies keineswegs wesentlich

und aussichtsvoll vorkommt, sobald man sich doch entschliesst, von der Fernwirkung materieller Punkte auszugehen und erst aus dieser das Hamilton'sche Princip, die Gleichungen der Elasticitätslehre und Hydrodynamik etc. abzuleiten.

§ 8. Allgemeine Bewegungsgleichungen.

Falls die zwischen zwei materiellen Punkten, deren Coordinaten x_1, y_1, z_1 resp. x_2, y_2, z_2 seien, wirkende Kraft eine abstossende ist, fällt, wie schon bemerkt, die Beschleunigung g_{12} des ersten materiellen Punktes durch den zweiten in die Richtung der Verlängerung der vom zweiten gegen den ersten gezogenen Geraden r_{12}, welche mit den positiven Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus

$$\frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, \quad \frac{y_1 - y_2}{r_{12}}, \quad \frac{z_1 - z_2}{r_{12}}$$

sind. Dies sind also die Cosinusse der Winkel (g_{12}, x), (g_{12}, y), (g_{12}, z), welche die Beschleunigung g_{12} mit den positiven Coordinatenaxen bildet. Dann ertheilen wir auch der Function $f_{12}(r_{12})$ das positive Vorzeichen. Würde also der erste materielle Punkt nur durch den zweiten beschleunigt, so hätte man nach Formel 7)

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} = g_{12} \cos (g_{12}, x) = \frac{1}{m_1} f_{12}(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}$$

mit zwei analogen Gleichungen für die y- und z-Axe. Wenn die Beschleunigung die entgegengesetzte Richtung hat, so nehmen wir sie wieder positiv, geben aber dem Cosinus das entgegengesetzte Zeichen, setzen also

$$\cos (g_{12}, x) = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}.$$

Da wir aber dann auch der Funktion $f_{12}(r_{12})$ das entgegengesetzte Zeichen geben, so ist auch in diesem Falle

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} = \frac{1}{m_1} f_{12}(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}.$$

Nach der dritten Grundannahme ist nun die gesammte Beschleunigung des ersten materiellen Punktes die Vectorsumme der verschiedenen Beschleunigungen, die er von allen

übrigen materiellen Punkten erfährt, und nach 8) ist dann die Gesammtcomponente der Beschleunigung in der Abscissenrichtung gleich der gewöhnlichen algebraischen Summe der einzelnen Beschleunigungen. Man hat also allgemein

$$9) \qquad m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = \sum_{k=2}^{k=n} f_{1k}(r_{1k}) \frac{x_1 - x_k}{r_{1k}}$$

mit zwei analogen Gleichungen für die beiden übrigen Coordinaten und $3n - 3$ analogen Gleichungen für die anderen materiellen Punkte.

Die über und unter dem Summenzeichen angegebenen Werthe der Grösse, nach der zu summiren ist, drücken (wie im Folgenden immer) aus, dass im Ausdrucke, dem das Summenzeichen vorgesetzt ist, dieser Grösse alle positiven ganzen Zahlenwerthe vom unten bis zum oben angegebenen incl. zu ertheilen und dann alle so gebildeten Ausdrücke zu addiren sind. Wir bezeichnen mit $\varphi_{hk}(r_{hk})$ das unbestimmte Integrale $\int f_{hk}(r_{hk})\, d r_{hk}$, wobei der Integrationsconstante ein beliebiger specieller Werth ertheilt werden kann.

Ferner werden wir oft nöthig haben, in einem Ausdrucke, welcher die Coordinaten beliebiger unserer materiellen Punkte enthält, einer einzigen dieser Coordinaten einen sehr kleinen Zuwachs zu ertheilen, alle anderen constant zu lassen. Die Zuwächse, welche in solcher Weise entstehen, nennen wir partielle und bezeichnen sie durch das Zeichen ∂. Sie sind nicht zu verwechseln mit den Zuwächsen, die während der Zeit dt eintreten (den totalen); denn während dieser Zeit ändern sich im Allgemeinen alle Coordinaten. So hat der partielle Differentialquotient $\frac{\partial r_{hk}}{\partial x_h}$ von r_{hk} nach x_h folgende Bedeutung: man ertheile von allen Coordinaten nur dem x_h einen kleinen Zuwachs, suche den dadurch erzeugten Zuwachs von r_{hk}, dividire ihn durch den Zuwachs von x_h und suche endlich die Limite, welcher sich der Quotient mit abnehmendem Zuwachs des x_h nähert. Da

$$r_{hk} = \sqrt{(x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2}$$

ist, so findet man nach den Regeln der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial r_{hk}}{\partial x_h} = \frac{x_h - x_k}{r_{hk}},$$

ebenso

$$\frac{\partial r_{hk}}{\partial y_h} = \frac{y_h - y_k}{r_{hk}}, \quad \frac{\partial r_{hk}}{\partial z_h} = \frac{z_h - z_k}{r_{hk}}.$$

Ferner folgt gemäss der Definition der Functionen φ

$$\frac{\partial \varphi_{hk}(r_{hk})}{\partial x_h} = \varphi_{hk}'(r_{hk}) \frac{x_h - x_k}{r_{hk}} = f_{hk}(r_{hk}) \frac{x_h - x_k}{r_{hk}}$$

und analog für y und z.

Wir wollen nun in dem Ausdrucke $\varphi_{hk}(r_{hk})$ der Reihe nach h gleich jeder positiven ganzen Zahl von eins bis n incl. und für jedes h wieder k gleich jeder dieser Zahlen mit Ausnahme der, die gleich h ist, setzen. Die Summe aller so erhaltenen Ausdrücke bezeichnen wir mit

10) $$\sum\sum \varphi_{hk}(r_{hk}) = -V.$$

Die Gleichung 9) kann dann in der Form geschrieben werden:

11) $$m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

mit zwei analogen Gleichungen für die beiden anderen Coordinatenaxen und $3n - 3$ analogen für die anderen materiellen Punkte. Die in irgend einer Coordinatenrichtung auf irgend einen materiellen Punkt wirkende Kraftcomponente ist daher die negative partielle Ableitung der Function V aller Coordinaten (der Kraftfunction) nach der betreffenden Coordinate.

Für mein Gefühl liegt in den Differentialquotienten nach der Zeit noch eine gewisse Unklarheit. Abgesehen von den wenigen Fällen, wo sich eine analytische Function finden lässt, welche genau die vorgeschriebenen Differentialquotienten nach der Zeit hat, wird man behufs Herstellung eines Zahlenbildes die Zeit immer in eine endliche Zahl von Zeittheilen getheilt denken müssen, bevor man zur Limite übergeht.[1]) Vielleicht sind unsere Formeln nur der sehr angenäherte Ausdruck für Durchschnittswerthe, die sich aus

---

[1]) Vgl. Wien. Sitzber. 105, S. 912, 1896. Wied. Ann. 60, S. 236, 1897.

viel feineren Elementen construiren lassen und nicht im strengen Sinne differentiirbar sind. Doch fehlt hierfür bisher noch jeder Anhaltspunkt in der Erfahrung.

§ 9. Verschiedene Ausdrucksweisen. Resultirende. Componenten.

Statt zu sagen, der zweite materielle Punkt ertheilt dem ersten die Beschleunigung g_{12}, wollen wir auch sagen: die Kraft $\pm f_{12}(r_{12})$, welche der zweite auf den ersten ausübt, erzeugt diese Beschleunigung, dürfen aber dabei natürlich nie vergessen, dass dies nur verschiedene Worte für ein und dieselbe Thatsache sind. Wie schon bemerkt, bezeichnen wir den Absolutwerth der Function $f_{12}(r_{12})$, welcher gleich ist dem Producte aus der Masse m des materiellen Punktes, auf den sie wirkt, und der Beschleunigung g, die sie ihm ertheilt, als die Intensität, die Richtung dieser Beschleunigung als die Richtung der Kraft. Genau so, wie die Beschleunigungen, können wir daher auch die Kräfte durch Vectoren (Pfeile) ausdrücken, deren Länge gleich der Intensität der betreffenden Kraft ist und deren Richtung mit der Richtung der Kraft zusammenfällt, also auch mit der Richtung der von ihr erzeugten Beschleunigung. Diese Vectoren, welche die Kräfte darstellen, trägt man gewöhnlich nicht vom Coordinatenursprunge, sondern von dem Punkte aus auf, auf welchen die Kraft wirkt.

Die Vectorsumme aller Kräfte, welche auf einen materiellen Punkt wirken, stellt wieder eine Kraft dar, welche man die Resultirende nennt; die Einzelkräfte nennt man die Componenten derselben. Da nach Grundannahme 3 die wirkliche Beschleunigung eines materiellen Punktes die Vectorsumme der verschiedenen Beschleunigungen ist, welche er durch die einzelnen Kräfte erfahren würde und sich die Vectoren, welche die Kräfte darstellen, von denen, welche die Beschleunigungen darstellen, nur dadurch unterscheiden, dass die Längen der ersteren alle m mal grösser sind, so folgt, dass die wirkliche Beschleunigung des materiellen Punktes die Richtung der resultirenden Kraft hat und ihr Product in die Masse des materiellen Punktes gleich der

Intensität der resultirenden Kraft ist. Die wirkliche Beschleunigung wird daher aus der resultirenden Kraft gerade so gefunden, wie die durch eine einzelne Kraft erzeugte Beschleunigung aus dieser einzelnen Kraft.

Man kann dies leicht noch weiter verallgemeinern. Sei der Vector $\mathfrak{R}$ die Summe beliebiger anderer Vectoren C, so ist die Beschleunigung, welche die durch den Vector $\mathfrak{R}$ dargestellte Kraft einem materiellen Punkte ertheilt, die Vectorsumme der Beschleunigungen, welche die verschiedenen durch die Vectoren C dargestellten Kräfte demselben materiellen Punkte ertheilen würden. Da es gleichgültig ist, in welcher Ordnung man Vectoren zu einer Summe vereinigt, da ferner die Vectoren, welche Kräfte darstellen, immer m mal so lang und gleich gerichtet sind wie die, welche die entsprechenden Beschleunigungen darstellen, und nach der Grundannahme 3 sich Beschleunigungen wie Vectoren addiren, so wird der materielle Punkt durch die einzige Kraft $\mathfrak{R}$ (die Resultirende) dieselbe Beschleunigung erfahren, wie durch alle Kräfte C (die Componenten derselben) zusammen, sei es, dass sonst keine oder dass ausserdem noch beliebig andere Kräfte auf ihn wirken, deren Beschleunigung sich dann noch zu dieser addirt.

Die Summe zweier Vectoren kann nur dann ein Vector von der Länge Null sein, wenn beide Vectoren gleich lang, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Ein materieller Punkt, auf welchen zwei Kräfte wirken, wird also dann und nur dann gar keine Beschleunigung erfahren, also sich genau so verhalten, als ob gar keine Kraft auf ihn wirkte, wenn jene beiden Kräfte gleiche Intensität, aber entgegengesetzte Richtung haben. Man sagt dann, die Kräfte halten sich das Gleichgewicht. Da die Resultirende einer beliebigen Zahl von Kräften, die auf einen materiellen Punkt wirken, durch die Figur 5 des § 4 (das Kräftepolygon, für zwei Kräfte Kräfteparallelogramm) gefunden wird, so werden sich die Kräfte dann das Gleichgewicht halten, d. h. dem Punkte keine Beschleunigung ertheilen, wenn das Kräftepolygon $ABC \dots M$ ein geschlossenes ist, also sein Endpunkt M mit seinem Anfangspunkt A zusammenfällt.

Man sieht aus der Construction des Kräftepolygons, dass die Wirkung einer Kraft P durch die der drei in den drei Coordinatenrichtungen wirkenden Kräfte

12) $X = P\cos(P,x), \quad Y = P\cos(P,y), \quad Z = P\cos(P,z),$

welche ihre Componenten nach den Coordinatenrichtungen heissen, vollkommen ersetzt werden kann.

Wir bezeichnen noch mit P_1 die Resultirende aller Kräfte, die auf den materiellen Punkt von der Masse m_1 wirken, auf den sich die Gleichungen 9) beziehen, mit $P_1', P_1''\ldots$ irgend welche Componenten, in die man die Kraft P_1 zerlegen kann, mit X_1, Y_1, Z_1, X_1', Y_1', Z_1', $X_1'', Y_1'', Z_1''\ldots$ die Componenten der Kräfte P_1, resp. $P_1', P_1''\ldots$ in den Coordinatenrichtungen. Dann können wir nach dem Gesagten die Gleichung 9) auch so schreiben:

13) $$m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = X_1 = X_1' + X_1'' + \ldots$$

Analoge Gleichungen gelten natürlich für die übrigen Coordinatenaxen und materiellen Punkte.

§ 10. Poisson's Beweis des Kräftenparallelogramms.

Von den zahlreichen Beweisen, die für den Satz vom Parallelogramme der Kräfte gegeben worden sind, will ich hier nur als Musterbild kurz den von Poisson in seiner Mechanik gegebenen in etwas modificirter Form auseinandersetzen.

Wir nehmen an, dass wir mehrere Kräfte (die Componenten), welche auf einen Punkt wirken, immer in allen ihren Wirkungen durch eine einzige (die Resultirende) ersetzen können. Daraus folgt, dass man die Resultirende von mehr als zwei Kräften immer finden kann, indem man zuerst zwei beliebige derselben zu einer Resultirenden, dann diese mit irgend einer dritten zu einer neuen Resultirenden u. s. w. zusammensetzt. Denn da die erste Resultirende die beiden ersten Kräfte vollständig vertritt, so muss die neue Resultirende, welche unter allen Umständen dieselbe Wirkung hat wie die erste Resultirende und die dritte Kraft zusammen, auch dieselbe Wirkung haben wie die ersten drei Kräfte u. s. w.

Wir setzen ferner voraus, dass die Intensität der Resultirenden und deren relative Lage zu den Componenten von der absoluten Lage der Figur im Raume, den Bewegungsverhältnissen, den früheren Zeitumständen und der Provenienz der Kräfte unabhängig ist, dass also Kräfte beliebigen Ursprungs sich gleich verhalten. Als Kraft von doppelter Intensität bezeichnen wir eine solche, welche dasselbe leistet, wie zwei vollkommen gleiche gleich gerichtete Kräfte zusammen. Als Kraft von dreifacher Intensität eine solche, die dasselbe leistet, wie drei gleich beschaffene gleich gerichtete u. s. w. Gesetze und selbst Sinn der erzeugten Bewegung kümmert uns dabei nicht.

Wenn zwei vollkommen gleiche Kräfte in entgegengesetzter Richtung auf einen Punkt wirken, so ist dadurch weder eine Bewegung in ihrer Geraden, noch senkrecht darauf bestimmt. Der Punkt muss also, wenn er anfangs ruhte, in Ruhe bleiben, es muss also Gleichgewicht eintreten; der Punkt muss sich so verhalten, als ob gar keine Kraft auf ihn wirkte.

Wenn daher eine Kraft in einem Sinne und eine Kraft von doppelter Intensität im entgegengesetzten Sinne auf einen Punkt wirkt, so können wir letztere durch zwei Kräfte von einfacher Intensität ersetzen, von denen eine durch die entgegengesetzte Kraft aufgehoben wird. Es bleibt also nur noch eine derselben.

Fährt man so zu schliessen fort, so erkennt man leicht, dass die Resultirende von beliebig vielen Kräften, deren Richtungen in eine Gerade fallen, deren algebraische Summe ist, wobei wir die in der einen Richtung wirkenden Kräfte positiv, die in der anderen Richtung wirkenden negativ zählen und auch die Resultirende in der einen und anderen Richtung wirkt, je nachdem die algebraische Summe positiv oder negativ ist.

Nun sollen auf einen Punkt A zwei gleiche Kräfte AB und AC wirken, welche einen beliebigen Winkel miteinander einschliessen. Wir wollen die eine Hälfte AH der unendlichen Geraden, welche diesen Winkel halbirt, als die positive, die andere als die negative Halbirungslinie be-

zeichnen. α sei der Winkel zwischen der positiven Halbirungslinie und einer der Kräfte, welche also untereinander den Winkel 2α einschliessen. α kann vorläufig spitz oder stumpf, gleich Null, gleich einem oder gleich zwei rechten sein.

Die einzige Gerade, welche durch zwei gleich lange von einem Punkte ausgehende Gerade eindeutig bestimmt ist, ist die Halbirungslinie ihres Winkels. Die Resultirende AD der Kräfte AB und AC muss daher in diese Halbirungslinie fallen, nach ihrer positiven oder negativen Seite hin.

Wird die Intensität jeder der Kräfte AB und AC ohne Aenderung ihrer Richtung verdoppelt, so können wir uns die Sache so denken, als ob in der Richtung von AB zwei der ursprünglichen Kraft gleiche Kräfte AB und AB_1 wirkten, ebenso in der Richtung AC zwei gleiche Kräfte AC und AC_1. Die Resultirende von AB und AC ist AD, die von AB_1 und AC_1 ist eine gleiche gleich gerichtete Kraft AD_1. AD und AD_1 geben aber zusammen eine Resultirende, die gleich gerichtet aber doppelt so gross wie AD ist. So beweist man, dass AD überhaupt der Intensität der gleichen Kräfte AB und AC proportional sein muss. Es kann aber noch irgendwie von dem Winkel der letzteren Kräfte abhängen. Wir wollen daher

$$AD = AB\,f(\alpha)$$

setzen, wobei wir der Function $f(\alpha)$ in jenen Fällen das positive Zeichen geben, wo AD auf die positive Seite AH der Halbirungslinie fällt, in jenen Fällen aber, wo sie die Richtung der negativen Halbirungslinie hat, das negative Zeichen.

Wenn wir $180 - \alpha$ für α setzen, so machen die beiden Kräfte denselben Winkel nach der entgegengesetzten Seite, daher muss auch die Resultirende einfach ihre Richtung umkehren, es ist also

$$f(180 - \alpha) = -f(\alpha)$$

und es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir in dem, was nun zunächst folgt, voraussetzen, dass α nicht grösser als 90^0 ist. Wir wollen nun eine Gerade AK ziehen,

welche mit der Geraden AH einen beliebigen Winkel β, der zwischen α und 90^0 liegt, nach derjenigen Seite hin einschliesst, wo die Kraft AB liegt.

Wir lassen ferner auf den Punkt A noch zwei Kräfte AB' und AC' wirken, welche durch Pfeile dargestellt sind, die genau die Spiegelbilder der Pfeile AB und AC bezüglich der Geraden AK sind. AH' sei das Spiegelbild der Geraden AH bezüglich AK als Spiegel. Die beiden Kräfte AB' und AC' haben dann eine Resultirende AD', welche ebenfalls das Spiegelbild von AD bezüglich AK ist und wir erhalten die Resultirende aller vier Kräfte AB, AC, AB', AC', indem wir die Resultirende von AD und AD' suchen. Letztere beiden Kräfte sind untereinander gleich und bilden den Winkel β mit der Geraden AK oder ihrer Verlängerung, je nachdem $f(\alpha)$ positiv oder negativ ist. Ihre Resultirende ist also

13a) $$AD\,f(\beta) = AB\,(f\alpha)\,f(\beta)$$

und wirkt in der Richtung AK oder in der entgegengesetzten, je nachdem dieser Ausdruck positiv oder negativ ist. Dieselbe Kraft müssen wir aber auch erhalten, wenn wir zuerst die Resultirende von AB und AB', dann die von AC und AC' bilden und schliesslich diese beiden Resultirenden wieder zu einer einzigen zusammensetzen. Die Resultirende von AB und AB' ist gleich $AB\,f(\beta-\alpha)$, die von AC und AC' gleich $AB\,f(\beta+\alpha)$. Beide fallen in die Gerade AK. Jede hat die Richtung AK oder die entgegengesetzte, je nachdem der für sie aufgestellte Ausdruck positiv oder negativ ist. Die Resultirende dieser beiden Resultirenden ist also ihre algebraische Summe

$$AB.[f(\beta-\alpha)+f(\beta+\alpha)]$$

und wirkt ebenfalls in der Richtung AK oder der entgegengesetzten, je nachdem dieser Ausdruck positiv oder negativ ist.

Da wir also für die Resultirende der vier Kräfte AB, AB', AC und AC' einerseits diesen Ausdruck, andererseits den Ausdruck 13a) erhalten haben, so müssen beide Ausdrücke untereinander gleich sein. Auch das Vorzeichen hat in beiden die gleiche Bedeutung. Das positive drückt

eine Wirkung in der Richtung AK, das negative in der entgegengesetzten aus. Wir erhalten somit:

13b) $$f(\alpha)f(\beta) = f(\beta - \alpha) + f(\beta + \alpha)$$

für alle Werthe von α und β, die innerhalb der im Obigen angenommenen Grenzen liegen.

Für $\alpha = 0$ ist die Resultirende doppelt so gross als jede der Componenten. Daher ist $f(0) = 2$. Wenn ε ein sehr kleiner Winkel ist, so können wir jedenfalls $f(\varepsilon) = e^{\zeta} + e^{-\zeta}$ oder $= -(e^{\zeta} + e^{-\zeta})$ oder $= 2 \cos \zeta$ setzen, je nachdem $f(\varepsilon) > 2$ oder < -2 ist oder zwischen $+2$ oder -2 liegt. Wäre es genau gleich $+2$ oder -2, so würden wir die erste oder zweite Form mit $\zeta = 0$ wählen. Machen wir nun in Gleichung 13b) der Reihe nach folgende Substitutionen: $\alpha = \varepsilon$, $\beta = \varepsilon$, dann $\alpha = \varepsilon$, $\beta = 2\varepsilon$, dann $\alpha = \varepsilon$, $\beta = 3\varepsilon$ oder $\alpha = \beta = 2\varepsilon$, dann $\alpha = \varepsilon$, $\beta = 4\varepsilon$ oder $\alpha = 2\varepsilon$, $\beta = 3\varepsilon$ u. s. f., so finden wir ohne Schwierigkeit für beliebige ganze Zahlen h $f(h\varepsilon) = e^{h\zeta} + e^{-h\zeta}$ oder $= (-1)^h (e^{h\zeta} + e^{-h\zeta})$ oder $= 2 \cos h\zeta$, je nachdem wir die erste, zweite oder dritte Form für $f(\varepsilon)$ gewählt haben. Nun verschwindet die Resultirende, also $f(h\varepsilon)$ für $h\varepsilon = 90^{0}$, aber für keinen Werth des $h\varepsilon$, der zwischen 0^{0} und 90^{0} liegt; daher kann $f(h\varepsilon)$ nicht durch eine der Exponentialformeln dargestellt sein. Es muss also gleich $2\cos(h\zeta)$ sein und zwar muss für $h\varepsilon = 90^{0}$ auch $h\zeta = 90^{0}$, also $\zeta = \varepsilon$ sein. Man erhält also $f(h\varepsilon) = 2\cos(h\varepsilon)$ und wenn man die ganz beliebige Grösse $h\varepsilon$ mit α bezeichnet, $f(\alpha) = 2 \cos \alpha$, womit das Kräftenparallelogramm für den Fall bewiesen ist, dass beide Componenten untereinander gleich sind.

Nun geht man zu dem Falle über, dass zwei ungleiche aufeinander senkrechte Kräfte AB und AC auf einen Punkt A wirken. Man halbirt die Gerade BC im Punkte D und zerlegt jede der gegebenen Kräfte in eine Componente in der Richtung AD und eine zweite, die mit der zu zerlegenden Kraft denselben Winkel nach der entgegengesetzten Seite einschliesst. Die beiden letzteren Componenten heben sich auf, die beiden ersteren sind beide gleich AD und geben zusammen die nach dem Satze vom Kräftenparallelogramme

folgende Resultirende der beiden ursprünglich gegebenen Kräfte.

Nun erst kann man die Resultirende der ganz beliebigen Kräfte AB und AC finden, die auf einen Punkt A wirken. Man zeichnet das Parallelogramm $ABDC$ und zerlegt jede der Kräfte in zwei Componenten, von denen eine die Richtung AD hat und die andere darauf senkrecht steht. Man sieht sofort, dass die beiden letzteren Componenten sich aufheben, die beiden ersteren aber wieder die durch die Diagonale AD dargestellte Resultirende liefern.

Natürlich ist dies keineswegs ein Beweis, dass alle unsere im Früheren gemachten Annahmen richtig seien. Es zeigt nur, dass man sich in Widersprüche verwickeln würde, wenn man unsere zur Definition der Kräfte gemachten Annahmen im Uebrigen beibehalten und nur über die Art der Construction der Resultirenden zweier Kräfte eine andere Annahme machen wollte.

Selbst die Annahme, dass die Intensität der Resultirenden und ihre relative Lage gegen die Componenten nicht von der Lage der Figur gegen den Raum resp. gegen die Fixsternwelt abhängt, ist nicht so selbstverständlich, als man glaubt, da ja z. B. die Kräfte, welche im Stande sind, ein gewisses System in einer gewissen relativen Lage seiner Theile dauernd zu erhalten, keineswegs blos von dieser relativen Lage abhängen, sondern sich ändern, wenn das ganze System sich im Raume ohne jede Aenderung der relativen Lage seiner Theile dreht.

§ 11. Ueber die Ersetzung des Coordinatensystems des Bildes durch andere.

Da durch die Gleichungen 9) blos die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit bestimmt sind, so müssen noch die $6n$ Werthe sämmtlicher Coordinaten und ihrer ersten Differentialquotienten nach der Zeit (Geschwindigkeitscomponenten) zu irgend einer Zeit (der Anfangszeit) gegeben sein. Man bezeichnet die Anfangszeit häufig als die Zeit t_0 oder Null und die Werthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten zu dieser Zeit mit

$x_1^0, y_1^0, \ldots w_n^0$. Durch diese $6n$ Grössen und die Differentialgleichungen 9) sind dann die Werthe sämmtlicher Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten zu jeder anderen Zeit eindeutig bestimmt.

Da wir unserem Bilde ein einziges bestimmtes Coordinatensystem zu Grunde legten, so haben wir erst zu untersuchen, in wie weit dieselben Regeln der Bestimmung der Werthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten aus deren Anfangswerthen auch für andere Coordinatensysteme giltig bleiben. Alle Coordinatensysteme, für welche dies der Fall ist, sowie das ursprünglich gewählte Coordinatensystem nennen wir taugliche Bezugsysteme. Wir denken uns zuerst ein beliebiges anderes Coordinatensystem eingeführt, dessen Axen zu jeder Zeit parallel denen des ursprünglichen Coordinatensystems unseres Bildes sind und ihre Lage gegen dieses erste Coordinatensystem nicht ändern. Dann unterscheiden sich die Coordinaten irgend eines Punktes zu irgend einer Zeit bezüglich des neuen Coordinatensystems von denen bezüglich des alten nur durch additive Constanten; während die Geschwindigkeitscomponenten, die Beschleunigungen, sowie alle Glieder der rechten Seite der Gleichungen 9), von denen man sofort sieht, dass sie nur von der relativen Lage der materiellen Punkte abhängen, vollständig unverändert bleiben. Die Gleichungen 9) bleiben also ganz unverändert gültig, wenn man darin die Coordinaten bezüglich des ursprünglichen Coordinatensystems mit denen bezüglich des neuen ersetzt. Das neue Coordinatensystem leistet also genau dasselbe wie das ursprüngliche, da die Veränderungen der Coordinaten bezüglich des neuen Systems genau nach denselben Regeln aus den Anfangswerthen der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten abgeleitet werden können, die wir für das ursprüngliche Coordinatensystem fanden. Dies gilt auch noch, wenn die neuen Coordinatenaxen den alten parallel bleiben, aber der neue Coordinatenursprung relativ gegen die alten Coordinatenaxen in einer geraden Linie mit constanter Geschwindigkeit fortwandert, deren Componenten bezüglich der drei Coordinatenaxen a, b, c seien. Dann tritt nämlich beim Uebergang zum neuen

Coordinatensysteme zu sämmtlichen Geschwindigkeitscomponenten in der Abscissenrichtung die Constante a, zu denen in der y- resp. z-Richtung aber die Constante b resp. c, zu den Abscissen aller Punkte aber der Ausdruck $a t + \alpha$, zu den y- und z-Coordinaten $b t + \beta$ resp. $c t + \gamma$ hinzu, wobei α, β, γ drei neue Constanten sind. Hierdurch werden wieder weder die Beschleunigungen noch die Glieder der rechten Seite der Gleichungen 9) irgendwie verändert und unsere Regeln, die Bewegung des Systems zu finden, gelten bezüglich des neuen Coordinatensystems unverändert wie bezüglich des alten.

Dasselbe gilt auch noch, wenn bei Ruhe oder geradliniger gleichförmiger Bewegung des neuen Coordinatenursprungs die Axen des neuen, ebenfalls rechtwinkeligen Coordinatensystems nicht denen des alten parallel sind, aber ihre Winkel mit den Axen des alten Coordinatensystems sich nicht ändern. Denn sowohl die Beschleunigungen als auch die Kräfte haben wir durch Construction von Vectoren bestimmt, welche von der Lage des Coordinatensystems unabhängig sind. Die Ausdrücke für die Projectionen der Beschleunigungen und Kräfte auf die Coordinatenrichtungen aber sind für alle Coordinatensysteme gleich. Bezeichnen wir die Coordinaten bezüglich des neuen Systems mit Accenten und mit (x, x'), (x, y'), ... die Winkel der alten und neuen Coordinatenaxen, so ist ja

$$\frac{d^2 x_1'}{d t^2} = \frac{d^2 x_1}{d t^2} \cos(x, x') + \frac{d^2 y_1}{d t^2} \cos(y, x') + \frac{d^2 z_1}{d t^2} \cos(z, x').$$

Substituirt man hier für $\frac{d^2 x_1}{d t^2}$, $\frac{d^2 y_1}{d t^2}$, $\frac{d^2 z_1}{d t^2}$ ihre Werthe aus den Gleichungen 9), worin man wieder für $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ und $z_1 - z_2$ zu substituiren hat

$$(x_1' - x_2') \cos(x, x') + (y_1' - y_2') \cos(x, y') \\ + (z_1' - z_2') \cos(x, z') \text{ etc.}$$

und verfährt ebenso mit $\frac{d^2 y_1'}{d t^2}$ und $\frac{d^2 z_1'}{d t^2}$, so kann man die Gleichungen für die neuen Coordinaten leicht wieder genau in die Form der Gleichungen 9) bringen.

Es giebt also sehr verschiedene Coordinatensysteme, welche genau ebenso wie das ursprüngliche Coordinatensystem dem Bilde zu Grunde gelegt werden können, ohne dass die Regeln der Ableitung der Bewegung des Systems aus den Anfangswerthen der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten irgend eine Aenderung erfahren, die alle taugliche Bezugssysteme sind. Dies ist von grosser Wichtigkeit, da oft die Wahl des einen oder anderen Coordinatensystems gewisse Vortheile bietet. Dagegen darf das neue Coordinatensystem sich nicht bezüglich des alten mit einer gewissen Geschwindigkeit drehen oder der neue Coordinatenursprung bezüglich des alten Coordinatensystems sich ungleichförmig oder krummlinig bewegen, wenn diese Regeln keine Aenderung erfahren sollen; denn im ersten Falle wären die Winkel (x, x') etc., im letzten die mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bezeichneten Grössen keine Constanten mehr, es würden also die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit nicht mehr die obige Form annehmen, was wir im 2. Theile näher ausführen werden. Im letzteren Falle käme nur zu allen zweiten Differentialquotienten der Abscissen nach der Zeit die gleiche Function der Zeit dazu und dasselbe gälte für die beiden anderen Coordinaten.

§ 12. Verhältniss dieser Darstellung zu anderen.

Wir haben uns absichtlich ziemlich weit von der Wirklichkeit entfernt, um ein mit den einfachsten Mitteln construirbares, möglichst genaues und klares Bild zu erhalten, d. h. ein solches, welches frei von verschwommenen Begriffen ist, der Rechnung die bestimmtesten Anhaltspunkte liefert, und daher in jedem bestimmten Falle eindeutig und sicher das zu erwartende Resultat mit beliebiger Annäherung vorher zu bestimmen gestattet.[1]) Die Forderung einer solchen un-

[1]) Unser Bild genügt insofern der bekannten Kirchhoff'schen Forderung, dass die Physik die Thatsachen blos zu beschreiben habe, als es lediglich ein Inbegriff von Regeln zur Construction arithmetischer und geometrischer Vorstellungen ist, mittelst welcher die Thatsachen allezeit richtig vorhergesagt werden können. Die Begriffe Ursache und Wirkung sind dabei ganz vermieden. Denn wenn man

zweideutigen Bestimmtheit des Bildes scheint mir das zu sein, was Hertz unter der Forderung versteht, dass das Bild mit den Denkgesetzen übereinstimmen müsse; denn ein anderes Denkgesetz, als dass unsere Bilder klar und eindeutig vorstellbar seien und sich daraus möglichst leicht und sicher stets das mit der Erfahrung übereinstimmende Resultat ableiten lasse, kann ich mir nicht recht vorstellen. Auch bin ich durchaus nicht der Ansicht, dass irgend etwas z. B. die geometrischen Bilder nur aus den Denkgesetzen abgeleitet werden könne.

Dagegen scheint mir die Bemerkung Hertz' gerechtfertigt, dass die meisten Darstellungen der Grundprincipien der Mechanik der wünschenswerthen Consequenz und Deutlichkeit entbehren, welche ich hier dadurch anstrebte, dass ich ungescheut ganz bestimmte, ins Detail ausgearbeitete Hypothesen voranstellte. Man definirt häufig das Verhältniss der Massen der Körper als das verkehrte Verhältniss der Beschleunigungen, die sie unter dem Einflusse gleicher Kräfte annehmen. Gleiche Kräfte kann man auf ausgedehnte feste Körper wirken lassen, indem man sie auf einen horizontalen, vollkommen glatten Tisch legt und dann dieselbe gleichgedehnte elastische Schnur oder denselben gleichen Einflüssen unterworfenen kleinen Magnet oder elektrischen Gegenstand einmal an dem einen, das andere Mal an dem anderen Körper befestigt. Flüssigkeiten müssten dabei in eine Hülle von geringer Masse eingeschlossen werden, an welcher die Befestigung vorzunehmen wäre. Wie wir später aus dem Bilde, das wir uns von der Wirkung der benachbarten Volumelemente elastischer und flüssiger Körper machen können, sehen werden, kann dann in der That der Schwerpunkt des Systems, Körper und Magnet oder Hülle, Flüssigkeit und Magnet, wie eine einzige Masse betrachtet

---

auch hie und da die Anwesenheit des einen materiellen Punktes als die Ursache der Beschleunigung des anderen bezeichnet, so will man damit doch nichts als die Vorstellung der Thatsache ausdrücken, dass beide in einer bestimmten Entfernung bestimmte Beschleunigungen erhalten. Ich hoffe daher, dass gegen die hier gewählte Darstellung erkenntnisstheoretische Einwände nicht gemacht werden können.

werden, auf welche eine Kraft wirkt, die nur von der Beschaffenheit des Magnets und den Einflüssen abhängt, denen dieser ausgesetzt ist. Dasselbe gilt auch für den Fall der gespannten Schnur, wenn deren Masse verschwindet. Allein wie will man gleiche Kräfte an einzelne materielle Punkte anbringen? Entnimmt man aber die Definition des Massenverhältnisses zweier Körper dem Stosse derselben, so kann man ebenfalls die Betrachtung der stossenden Volumelemente nicht entbehren; entnimmt man sie der directen Fernwirkung zweier kleiner Körper, so gelangt man bei consequenter Durchführung wieder zu unserer Definition.

Wenn man mit einem vollständig klaren Bilde für die Wechselwirkung der Volumelemente elastischer Körper beginnen und daraus die Grundbegriffe und Gesetze der gewöhnlichen Mechanik ableiten würde, so wäre dagegen natürlich nichts einzuwenden.[1]) Dies geschieht jedoch keineswegs, man definirt vielmehr durch Vorgänge, bei denen solche Volumelemente unentbehrlich sind, wie den Stoss oder die Befestigung derselben elastischen Schnur an verschiedene Körper, die Eigenschaften (Massen) und Gesetze der Veränderungen (Kräfte) der einfachen materiellen Punkte. In den Vorstellungen, die man sich von den letzteren macht, werden Erfahrungen an ausgedehnten Objecten mit begrifflichen Constructionen an einzelnen Punkten vermischt. Wer empfände nicht den Circulus vitiosus, der darin liegt, wenn man bei Aufstellung der Grundbegriffe den materiellen Punkt als einen sehr kleinen Körper definirt und sich darauf beruft, dass es sich als entfernte Consequenz der hierauf gegründeten Theorie ergeben wird, dass man nur unendlich kleines höherer Ordnung vernachlässigt, wenn man die Volumelemente, die

---

[1]) Dass jedes klare Bild der Wechselwirkung der Volumelemente weit mehr mit der heutigen Atomistik gemein haben müsste, als man gewöhnlich annimmt, glaube ich anderswo nachgewiesen zu haben. Daselbst habe ich auch gezeigt, dass es die Vorstellung verwirrt und die Berechnung der Limite unmöglich macht, wenn man die einfachen Elemente selbst wieder ausgedehnt und in Differentiale zerlegbar annimmt. Wien. Sitzber. 105, S. 907, 7. Nov. 1896. Wied. Ann. 60, S. 231, 1897.

eigentlich kleine Körper sind, als einfache Raumpunkte behandelt. Wie weit klarer ist es, ausgedehnte Körper von vornherein unter dem Bilde zahlreicher, dicht gedrängter Punkte zu betrachten, deren Geschwindigkeit sich beim Uebergang zum Nachbarpunkt immer nur sehr wenig ändert. Ohne Vorausschickung des Begriffes des materiellen Punktes sogleich mit den Beschleunigungen endlicher Körper zu beginnen, geht aber wieder nicht an, wenn man nicht den Schwerpunktssatz schon kennt. Man wende nicht ein, dass dies nur andere Worte für dieselbe Sache seien. Darum, glaube ich, handelt es sich gerade die Worte so zu wählen, dass an das richtige erkenntnisstheoretische Verhältniss aller Begriffe stets in zweckmässigster Weise erinnert wird.

Aber selbst zugegeben, dass man das Anbringen derselben Kraft an verschiedene materielle Punkte definiren kann, ohne vorher deren Masse zu definieren, so müssen die Thatsachen, dass das Verhältniss der Beschleunigungen der materiellen Punkte kein anderes wird, je nach Wahl der Kraft, dass das Verhältniss der Beschleunigungen der materiellen Punkte A und C gleich dem Produkte der entsprechenden Verhältnisse für A und B einerseits und B und C andererseits ist, noch als besondere Erfahrungsthatsachen betrachtet werden, oder es müssen allgemeinere Erfahrungsthatsachen (z. B. das Energieprincip) vorausgeschickt werden, aus denen sie folgen. Ueber alle diese Sätze, sowie über die Gesetze der Wechselwirkung der Volumelemente, den Schwerpunktssatz etc. mit einem Schlage eine klare Anschauung zu geben, ist eben der Vorzug unseres Bildes der Centrikräfte.

Auch in den Vorlesungen Kirchhoff's über Mechanik befriedigt mich die Definition des Massenbegriffes nicht. Gerade der Fall, wo zwischen den Coordinaten der materiellen Punkte gegebene Gleichungen bestehen (erzwungene Bewegung), scheint mir mehr eine Abstraction, als ein der Natur entsprechender Fall zu sein. In allen anderen Fällen aber wird Kirchhoff's Definition schwankend, wie dies besonders bei der Einführung der Masse und Dichte eines Volumelementes eines elastischen Körpers hervortritt.

Hertz' Mechanik wird freilich dadurch, dass sie keine anderen Kräfte als die bei der erzwungenen Bewegung kennt, zu einem vollkommen verständlichen, klaren, eindeutig bestimmten Bilde. Sie entspricht, wie sich Hertz ausdrückt, den Denkgesetzen. Hier vermisse ich nur eines, nämlich den Beweis, dass sich durch dieses Bild die Natur wirklich darstellen lässt.

Natürlich leugne ich nicht die Möglichkeit, diese Begriffe in anderer Weise, als es hier geschieht, klar darzustellen; nur bisher scheint mir dies noch nicht gelungen zu sein. Auch will ich keineswegs gesagt haben, dass es mir wahrscheinlich wäre, dass die als Function der Entfernung erscheinende Fernwirkung zwischen materiellen Punkten das endgültige Bild der Naturvorgänge sein müsse. Es ist schon vielfach der Versuch gemacht worden, dieselbe durch Stösse der Molecüle eines Mediums (des Lichtäthers) zu erklären. Allein man muss da ziemlich verwickelte Nebenannahmen machen, z. B. zur Erklärung der Cohäsion den ponderablen Molecülen eine gitterartige Structur beilegen. Auch bedarf man der Stossgesetze und damit wieder des Massenbegriffes. Andererseits suchte man die Molecüle als Wirbelringe aufzufassen und dadurch ihre scheinbare Fernwirkung zu erklären. Die Möglichkeit, dass derartige Erklärungsversuche die Fernkräfte einmal verdrängen werden, besteht sicher. Doch scheinen mir die bisher zu diesem Zwecke gemachten Annahmen weder einfacher noch klarer, als das Bild, von dem ich hier ausging. Dieselben scheinen mir vielmehr die Zahl der willkürlichen Hypothesen unnütz und ohne entsprechenden Gewinn an Einfachheit und Deutlichkeit zu vermehren, was, wie ich glaube, ebenso vermieden werden muss, wie Unklarheit und Verschwommenheit der Bilder durch zu geringe Specialisirung derselben. Ueberhaupt möchte ich an Stelle der Frage, wie sind die Dinge wirklich beschaffen, die bescheidenere, aber klarere setzen, durch welche Bilder werden unsere Erfahrungen gegenwärtig am einfachsten und unzweideutigsten dargestellt.

Wie dem immer sei, ob die zukünftige Vervollkommnung der Mechanik von der Weiterentwickelung der heute

gebräuchlichen speciellen Bilder oder von der Ersetzung derselben durch allgemeinere Vorstellungen energetischen oder phänomenologischen Charakters zu erwarten ist, jedenfalls glaube ich, dass eine möglichst klare Präcisirung der gegenwärtigen atomistischen Mechanik nur von Nutzen sein kann, indem diese im ersten Falle die Grundlage der Weiterentwickelung liefert, im letzteren Falle aber als Muster der für jede neue Theorie unentbehrlichen Klarheit und inneren Consequenz dienen kann. Diese scheint mir keineswegs in der Uebereinstimmung mit besonderen Denkgesetzen, sondern vielmehr darin begründet, dass sie durchaus Regeln und Constructionen benutzt, welche erfahrungsmässig stets eine eindeutig definirte Anwendung zulassen und auch, wenn man das zu erhaltende Resultat nicht im Voraus weiss, ein klar bestimmtes, mit der Beobachtung stimmendes Ergebniss liefern.

II. Betrachtung der Bewegung eines materiellen Punktes.

---

§ 13. Tangential-, Centripetal- und Centrifugalkraft.

Wir wollen uns nun folgendes Problem stellen: Es sei die Bahn irgend eines materiellen Punktes von der Masse m gegeben und auch der Ort der Bahn, wo sich der materielle Punkt zu jeder Zeit befindet. Es soll die Kraft bestimmt werden, welche nothwendig ist, um diese vorgeschriebene Bewegung desselben zu bewirken. Der materielle Punkt soll sich zur Zeit t in A, zur Zeit $t + \tau$ in A', zur Zeit $t + 2\tau$ in A'' befinden. Dann verstanden wir unter der Geschwindigkeit c den Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ des Weges nach der Zeit, also die Limite des Quotienten AA'/τ. Den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit $\frac{dv}{dt}$ finden wir nach den Regeln der Differentialrechnung, indem wir von dem analog für die Zeit $t + \tau$ gebildeten Ausdruck

$A'A''/\tau$ den für die Zeit t geltenden AA'/τ abziehen, die Differenz nochmals durch τ dividiren und wieder die Limite für verschwindende τ suchen. Es ist also:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim \frac{A'A'' - AA'}{\tau^2}.$$

Um die Beschleunigung zu erhalten, müssen wir nach den in § 5 gegebenen Regeln die beiden Vectoren AA' und $A'A''$ von einem und demselben Punkte des Raumes auftragen, wozu wir wieder den Punkt A' wählen; wir ziehen also von diesem Punkte aus die Gerade $A'E$, welche die geradlinige Fortsetzung von AA' und auch gleich lang wie AA' ist (s. Fig. 2). Hierauf ziehen wir von E gegen A'' die Gerade EA''. Die Limite, welcher sich diese letztere Gerade durch τ^2 dividirt nähert, ist dann die Beschleunigung des materiellen Punktes m zur Zeit t. Wir können den Vector EA'' in zwei Componenten EF und EG in der Richtung $A'E$ und der darauf senkrechten zerlegen. Die thatsächliche Beschleunigung, welche der materielle Punkt m zur Zeit t erfährt, kann also erzeugt werden, wenn wir zwei Kräfte darauf wirken lassen, eine Kraft (sie heisse die Tangentialkraft) in der Richtung, welcher sich die Gerade $A'E$ bei abnehmendem τ nähert, also in der Richtung der Bewegung des materiellen Punktes zur Zeit t und eine zweite, die Centripetalkraft, in der Richtung EG. Letztere Richtung nähert sich mit abnehmendem τ der in der Schmiegungsebene der Bahncurve auf die Bewegungsrichtung gezogenen Normalen, also der vom Orte des Beweglichen gegen den Krümmungsmittelpunkt der Bahn hin gezogenen Geraden. Denn die Gerade EG liegt in der Ebene der drei Punkte A, A', A'' und diejenige Grenze, welcher sich diese Ebene mit abnehmendem τ nähert, nennt man die Schmiegungsebene der durch die drei Punkte A, A' und A'' gehenden Bahncurve. Die Intensität S der Tangentialkraft ist nach § 7 gleich $m \lim \frac{EF}{\tau^2}$. Nun ist aber $A'F$ von $A'A''$ nur durch ein un-

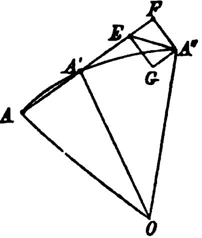


Fig. 2.

endlich Kleines von der Ordnung $\tau^2 . A A'$, also von der Ordnung τ^3, verschieden, da $A A'$ unendlich klein von der Ordnung τ ist. Daher ist auch EF von der Differenz $A'A'' - A A'$ nur durch ein unendlich Kleines von der Ordnung τ^3 ver- verschieden. Es ist also:

$$\lim \frac{EF}{\tau^2} = \lim \frac{A'A'' - A A'}{\tau^2} = \frac{dc}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

und daher

$$14) \qquad S = m \frac{dc}{dt} = m \frac{d^2 s}{dt^2} .$$

Aus dieser und der Gleichung 4)

$$c = \frac{ds}{dt}$$

kann der Weg als Function der Zeit gefunden werden, wenn die Bahn und die Tangentialkraft S gegeben sind.

Die Intensität Z der Centripetalkraft ist gleich $m \lim \frac{EG}{\tau^2}$. Man bezeichnet die Limite, welcher sich der durch die drei Punkte A, A' und A'' gezogene Kreis nähert, als den Krümmungskreis der Bahncurve im Punkte A, seinen Mittelpunkt O als den Krümmungsmittelpunkt, seinen Radius R als den Krümmungsradius. Nach einer aus der Theorie der Krümmung der Curven bekannten Construction kann man mit Vernachlässigung von unendlich Kleinen höherer Ordnung die Dreiecke $A''A'F$ und $A'OA''$ der Figur 2 als ähnliche Dreiecke betrachten und hat also

$$FA'' : A'A'' = A'A'' : OA',$$

daher

$$FA'' = EG = \frac{A'A''^2}{OA'} = \frac{A'A''^2}{R} .$$

Nun ist aber

$$\lim \frac{A'A''}{\tau} = c,$$

daher

$$15) \qquad Z = m \lim \frac{EG}{\tau^2} = \frac{m c^2}{R} .$$

Die Kräfte, welche auf den materiellen Punkt wirken, können den verschiedensten Ursprung haben, aber immer muss ihre Resultirende gleich der der beiden Kräfte S und Z sein,

wenn sie bewirken soll, dass sich der materielle Punkt in der gegebenen Weise (so dass also der Weg gleich der vorgeschriebenen Funktion der Zeit ist) auf der gegebenen Curve bewegen soll.

Wenn wir z. B. eine beliebige Vorrichtung haben, unter deren Einfluss sich ein materieller Punkt von der Masse m mit constanter Geschwindigkeit c in einem Kreise vom Radius R bewegt, so wissen wir, dass die Resultirende aller Kräfte, welche die materiellen Punkte, aus denen jene Vorrichtung besteht, auf den bewegten Punkt ausüben, eine gegen das Centrum des Kreises gerichtete Kraft von der Intensität $m c^2 / R$ ist, welche die Centripetalkraft heisst. Da Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, so muss auch der bewegte materielle Punkt eine genau gleiche, aber entgegengesetzte, also vom Centrum des Kreises hinweg gerichtete Kraft, die Centrifugalkraft, auf die materiellen Punkte ausüben, aus denen die Vorrichtung besteht. Ich glaube, dass in dieser Darstellung der Begriff der Centrifugalkraft wohl von jenen Dunkelheiten frei ist, welche Hertz a. a. O. S. 7 erwähnt.

§ 14. Gleichförmige und gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Es ist höchst wahrscheinlich, dass die Kraft $f(r)$, die zwischen zwei beliebigen materiellen Punkten wirkt, jedesmal verschwindend klein wird, sobald die Entfernung r eine gewisse Grenze überschreitet, d. h. dass unser Bild nur mit den Thatsachen übereinstimmt, wenn wir diese Annahme machen. Diese Entfernungsgrenze könnte sogar von der Grössenordnung der Moleculardimensionen sein, wenn alle Wirkungen, die sich scheinbar auf grössere Entfernungen erstrecken, durch ein Medium vermittelt würden.

Den einfachsten Fall der Bewegung eines materiellen Punktes erhalten wir daher, wenn derselbe so weit von allen übrigen entfernt ist, dass kein einziger eine bemerkbare Kraft auf ihn ausübt. Dann sind, wie wir sahen, die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten des beweglichen materiellen Punktes nach der Zeit gleich Null, die Geschwindig-

keitscomponenten constant. Der materielle Punkt bleibt also, wenn er anfangs in Ruhe war, immer in Ruhe; hatte er dagegen schon anfangs eine Geschwindigkeit, so bewegt er sich mit dieser gleichförmig in einer geradlinigen Bahn (das Trägheitsgesetz oder Galilei'sche Princip).

Ein zweiter Fall wäre der, dass die Resultirende aller Kräfte, welche auf einen materiellen Punkt von der Masse m wirken, während der ganzen Zeit seiner Bewegung in Intensität und Richtung vollständig unveränderlich ist. Dieser Fall würde angenähert eintreten, wenn auf den beweglichen materiellen Punkt beliebige, sehr weit entfernte ruhende materielle Punkte wirken und die von allen ausgeübte Kraft zwar so gross ist, dass sie trotz der grossen Entfernung nicht verschwindet, ihre Grössen- und Richtungsänderung aber wegen der Grösse der Entfernung der wirkenden Punkte während der ganzen Bewegung vernachlässigt, daher die auf das Bewegliche wirkende Kraft als constant betrachtet werden kann. Wir wählen den Raumpunkt, wo sich der bewegliche materielle Punkt zu Anfang der Zeit befindet, zum Coordinatenursprung, die Richtung der gesammten auf ihn wirkenden Kraft, deren Intensität $p = mg$ heissen mag, als y-Richtung und die Abscissenaxe in der Ebene, welche diese Richtung und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes enthält, dessen Coordinaten zur Zeit t x, y, z heissen mögen. Dann wird nach Gleichung 13)

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = p = m g, \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d^2 z}{d t^2} = 0.$$

Da ausserdem für den Anfang der Zeit, für welchen $t = 0$ gesetzt werden soll, $x = y = z = w = 0$ ist, und u und v gleich den gegebenen Componenten u_0, v_0 der Anfangsgeschwindigkeit sind, so findet man, mit Rücksicht darauf, dass

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

ist, durch eine Rechnung, welche zu einfach ist, als dass es nöthig wäre, hier darauf einzugehen:

$$z = 0, \quad x = u_0 t, \quad y = v_0 t + g \frac{t^2}{2}.$$

Unter der Gleichung der Bahn versteht man eine Gleichung zwischen x und y, welche für jeden Punkt der Bahn, also für jeden Werth der Zeit t besteht; wir erhalten sie also, wenn wir die Zeit t aus den letzten beiden Gleichungen eliminiren, wodurch sich für $u_0 = 0$ ergiebt, $x = 0$; für jeden anderen Werth von u_0 aber

$$y = \frac{v_0}{u_0} x + \frac{g}{2 u_0^2} x^2$$

oder

$$\left(y + \frac{v_0^2}{2g}\right) \frac{2 u_0^2}{g} = \left(x + \frac{u_0 v_0}{g}\right)^2.$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel dar, deren Axe parallel der y-Axe ist, deren Parameter gleich u_0^2/g ist und deren Scheitel die Coordinaten $-u_0 v_0/g$ und $-v_0^2/2g$ hat. Nach den durch diese Formeln dargestellten Gesetzen bewegt sich jeder Punkt eines dem Einflusse der Erdschwere allein unterworfenen, anfangs sich nicht drehenden Körpers und zwar ist die Beschleunigung g gegen den Erdmittelpunkt gerichtet. Jeder derartige Punkt verhält sich daher so, als ob eine constante Kraft von unveränderlicher Richtung vertical nach abwärts auf ihn wirkte (sein Gewicht). Die Intensität dieser Kraft ist zwar nicht an allen Stellen der Erdoberfläche dieselbe, kann aber innerhalb des Raumes des Laboratoriums als überall gleich betrachtet werden. Eine merkwürdige Erfahrungsthatsache ist hierbei, dass alle Körper an derselben Stelle der Erdoberfläche dieselbe Beschleunigung erfahren, welche man die Beschleunigung der Schwere nennt.

§ 15. Bewegungsmoment. Antrieb.

Wir wollen nun wieder zum allgemeinsten Fall der Bewegung eines beliebigen materiellen Punktes zurückkehren, welche also durch die allgemeinsten Gleichungen 13) dargestellt ist. Da wir nur einen materiellen Punkt betrachten, so wollen wir den Index 1 weglassen. Es sei die Gesammtkraft P, welche auf den materiellen Punkt wirkt, sowie ihre Richtung als Function der Zeit gegeben oder es seien die verschiedenen Componenten P', P'' ..., deren Resultirende

die Kraft P ist, alle sammt ihrer jedesmaligen Richtung als Function der Zeit gegeben. Da die Masse m des materiellen Punktes constant ist, so können wir die Gleichung 13) in der Form schreiben:

16) $$\frac{d(m u)}{d t} = X = X' + X'' + \ldots$$

oder $d(m u) = X d t$, welche nach unseren Festsetzungen besagt, dass sich der Zuwachs der Grösse $m u$ während einer sehr kleinen Zeit $d t$ vom Product der Zeit $d t$ in den Werth, den die x-Componente der Kraft in irgend einem Momente während dieser Zeit hatte, nur um unendlich Kleines höherer Ordnung unterscheidet, d. h. um eine Grösse, welche durch $d t$ dividirt sich mit abnehmendem $d t$ der Grenze Null nähert. Die Integration dieser Gleichung liefert, wenn wir die zu irgend einer Zeit t_0 (der Anfangszeit) gehörigen Werthe mit dem Index Null, die zu einer späteren, ebenfalls beliebigen Zeit t_n mit dem Index n bezeichnen:

17) $$m u_n - m u_0 = \int_{t_0}^{t_n} X d t.$$

Das Product aus der Masse in die Geschwindigkeitscomponente in der Abscissenrichtung nennt man das Bewegungsmoment des materiellen Punktes bezüglich der Abscissenrichtung, das Produkt $X d t$ den Antrieb der Kraft in dieser Richtung während des Zeitdifferentiales $d t$, das bestimmte Integrale $\int_{t_0}^{t_n} X dt$ den gesammten Antrieb der Kraft während der Zeit $t_n - t_0$ in dieser Richtung. Man kann also die Gleichung 17) mit folgenden Worten aussprechen: der Zuwachs des Bewegungsmomentes des materiellen Punktes bezüglich der Abscissenrichtung während einer beliebigen Zeit ist gleich dem gesammten Antriebe, der auf ihn wirkenden Kraft in dieser Richtung während dieser Zeit, was natürlich auch für beliebig kleine Zeitmomente gilt. Das bestimmte Integrale drückt natürlich aus, dass der Antrieb in der Abscissenrichtung während der Zeit $t_n - t_0$ so zu definieren ist: Man theilt die gesammte Zeit $t_n - t_0$

in sehr viele sehr kleine Theile $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1 \ldots t_n - t_{n-1}$. Man bezeichnet den Werth der X-Componente der Kraft P zu irgend einer innerhalb der Zeitstrecke $t_1 - t_0$ liegenden Zeit mit X_1, zu irgend einer innerhalb $t_2 - t_1$ liegenden Zeit mit $X_2 \ldots$ Der Gesammtantrieb der Kraft P in der Abscissenrichtung während der Zeit $t_n - t_0$ ist dann zu definiren als die Limite der Summe:

18) $$X_1(t_1 - t_0) + X_2(t_2 - t_1) \ldots X_n(t_n - t_{n-1}).$$

Daraus, dass sich $X_k(t_k - t_{k-1})$ nur um ein unendlich Kleines höherer Ordnung vom Zuwachse des in der Abscissenrichtung geschätzten Bewegungsmomentes unterscheidet, folgt sofort, dass sich der Ausdruck 18) dem Gesammtzuwachse dieses Bewegungsmomentes während der Zeit $t_n - t_0$ als Limite nähert.

Da immer $X = X' + X'' + \ldots$ ist, so sieht man sofort, dass der Antrieb der Resultirenden immer gleich der Summe der Antriebe ihrer Componenten ist. Schreiben wir statt t_n, was ja eine ganz beliebige Zeit ist, wieder t und daher auch statt u_n wieder u, so können wir die Gleichung 17) auch so schreiben:

$$u = u_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} X\,dt.$$

Da $u = \frac{dx}{dt}$ ist, so liefert die nochmalige Integration nach t, wenn man t_0 und daher auch u_0 constant betrachtet:

19) $$\begin{cases} x = x_0 + u_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\,X \\ \quad = x_0 + u_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} (q - t_0)\,X(q)\,dq, \end{cases}$$

wobei $X(q)$ die Grösse ist, die man erhält, wenn man X als Function von t ausdrückt und dann statt t die Integrationsvariable q substituirt.

Alles Gesagte gilt natürlich ebenso wie für die Abscissenrichtung auch für die y- und z-Richtung. Die Grösse $P\,dt$ nennt man auch den gesammten Antrieb der Kraft P während der Zeit dt.

§ 16. Lebendige Kraft. Arbeit.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen führen unmittelbar zur Lösung der Aufgabe, wenn die Kraft direct als Function der Zeit gegeben ist. Dies ist jedoch meist nicht der Fall, meist sind die Kräfte als Functionen der relativen Lage verschiedener materieller Punkte gegeben. Dann haben die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln wenig Nutzen. Denn um $\int X dt$, $\int Y dt$ und $\int Z dt$ berechnen zu können, müsste man die relative Lage sämmtlicher Punkte als Function der Zeit bereits kennen, also die ganze Aufgabe schon gelöst haben. Mehr Nutzen gewährt dann der Satz der lebendigen Kraft, zu dem man in folgender Weise gelangt. Aus den Gleichungen 14) folgt, da sich ds/dt der Grenze c, daher $c\frac{dc}{ds}$ derselben Grenze, wie $\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dc}{ds}$ oder $\frac{dc}{dt}$, nähert,

$$mc\frac{dc}{ds} = S$$

oder in Differentialform nach dem Schema 4a geschrieben,

$$mc\,dc = S\,ds$$

und durch Integration

20) $$\frac{mc^2}{2} - \frac{mc_0^2}{2} = \int S\,ds.$$

Man nennt nun das Product der Masse in das halbe Quadrat der Geschwindigkeit die lebendige Kraft, das Product $S\,ds$ die während des Weges ds geleistete Arbeit, das Integral $\int S\,ds$ die gesammte Arbeit der Kraft. Die Gleichung 20) besagt also in Worten ausgedrückt, dass der Zuwachs der lebendigen Kraft eines materiellen Punktes immer gleich der Gesammtarbeit der auf ihn wirkenden Kraft ist.

S ist die Componente der Gesammtkraft P, welche auf den materiellen Punkt wirkt in der Richtung des Weges ds. Wir bezeichnen mit dx, dy, dz die Zuwächse, welche die Coordinaten x, y, z des materiellen Punktes erfahren, wenn derselbe den Weg ds zurücklegt, also die Componenten des Weges ds in den drei Coordinatenrichtungen; ferner mit X, Y, Z die Componenten der Kraft P in den Coordinatenrichtungen,

endlich mit dp die Projection des Weges ds auf die Richtung von P. Die Projectionen S und dp sind mit positiven oder negativen Zeichen zu versehen, je nachdem sie in die Richtung von ds resp. P oder die entgegengesetzte fallen. Dann ist:

$$21)\left\{\begin{array}{l} S = P\cos(P,ds),\ dp = ds\cos(P,ds), \\ \quad\cos(P,ds) = \cos(P,x)\cos(ds,x) + \cos(P,y)\cos(ds,y) + \\ \quad + \cos(P,z)\cos(ds,z), \\ X = P\cos(P,x);\ dx = ds\cos(ds,x) \end{array}\right.$$

mit vier analogen Gleichungen für die beiden anderen Coordinatenaxen. Daher ist die während des Weges ds geleistete Arbeit

$$22)\quad S\,ds = P\,ds\cos(P,ds) = P\,dp = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Man kann daher die Arbeit einer Kraft während einer unendlich kleinen Wegstrecke auch finden, indem man die Intensität der Kraft mit der Länge der Wegstrecke und dem Cosinus des von beiden eingeschlossenen Winkels oder mit der Projection der Wegstrecke auf die Richtung der Kraft multiplicirt. Die letzte der Gleichungen 22) besagt, dass die Arbeit einer Kraft gleich der der Summe ihrer Componenten nach den drei Coordinatenrichtungen ist, denn $X\,dx$ ist gemäss der gegebenen Definition die Arbeit der x-Componente unserer Kraft. Es gilt noch allgemeiner folgender Satz: wenn beliebige, auf einen Punkt wirkende Kräfte P', P'', ... die Resultirende P haben und dieser Punkt einen beliebigen, unendlich kleinen Weg zurücklegt, so ist die Arbeit der Kraft P immer gleich der Summe der Arbeiten ihrer Componenten. Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieses Satzes am leichtesten, wenn man die Arbeit jeder dieser Kräfte durch die Summe der Arbeiten ihrer drei Componenten nach den drei Coordinatenrichtungen ersetzt.

Man kann die Gleichung

$$d\left(\frac{mc^2}{2}\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

auch direct in folgender Weise ableiten: man multiplicirt die linke Seite der Gleichung 16) mit $u\,dt$, die rechte mit dx, was ja gleich $u\,dt$ ist, ferner multiplicirt man die analoge Gleichung bezüglich der y-Axe, also die Gleichung $m\frac{dv}{dt} = Y$, links

mit $v\,dt$, rechts mit dy, verfährt analog mit der entsprechenden Gleichung bezüglich der z-Axe und addirt schliesslich die drei so erhaltenen Gleichungen. Man erhält so eine Gleichung, deren linke Seite $m(u\,du + v\,dv + w\,dw)$, also gleich $d(\frac{1}{2}mc^2)$ und deren rechte Seite gleich $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ ist.

Wollte man Gleichungen zwischen Differentialausdrücken vermeiden, so müsste man zunächst sehr viele sehr nahe liegende, vom Beweglichen durchlaufene Raumpunkte A_0, A_1, A_2, ... durch Gerade $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, ... $A_{n-1} A_n$ verbinden. Wir bezeichnen für einen beliebigen Werth von k die Gerade $A_{k-1} A_k$ mit $\varDelta s_k$; ferner mit P_k die Kraft, welche auf den materiellen Punkt in A_k wirkt, mit S_k, X_k, Y_k, Z_k deren Componenten in der Richtung $A_{k-1} A_k$ und in den Coordinatenrichtungen, mit $\varDelta p_k$, $\varDelta x_k$, $\varDelta y_k$, $\varDelta z_k$ die Projectionen von $\varDelta s_k$ auf die Richtungen von P_k und die Coordinatenrichtungen, endlich durch ein vorgesetztes $\varDelta$ den Zuwachs einer der Grössen t, c, u, v, w beim Uebergange vom Punkte A_{k-1} zu A_k, z. B. mit $\varDelta t$ die dazu erforderliche Zeit. Die Gleichungen 21) und 22) gelten dann unverändert, nur dass man für P, S, X, Y, Z, ds, dp, dx, dy, dz zu schreiben hat: P_k, S_k, X_k, Y_k, Z_k, $\varDelta s_k$, $\varDelta x_k$, $\varDelta y_k$, $\varDelta z_k$. Die Gleichungen, welche durch diese Buchstabenvertauschung daraus entstehen, wollen wir die Gleichungen 21*) und 22*) nennen.

Die Gleichungen 1), 4) und 16) schreiben sich in der Form

$$c = \lim \frac{\varDelta s_k}{\varDelta t}, \quad u = \lim \frac{\varDelta x_k}{\varDelta t}, \quad m \lim \frac{\varDelta u_k}{\varDelta t} = X_k \text{ etc.}$$

woraus folgt

$$m \lim \left(u \frac{\varDelta u}{\varDelta s_k} + v \frac{\varDelta v}{\varDelta s_k} + w \frac{\varDelta w}{\varDelta s_k} \right) = \lim \frac{\varDelta \left(\frac{m c^2}{2} \right)}{\varDelta s_k} = S_k.$$

Daraus und aus den Gleichungen 21*) und 22*) folgt dann nach den Regeln der Integralrechnung:

$$\lim \sum S_k \varDelta s_k = \lim \sum P_k \varDelta p_k = \lim \sum P_k \varDelta s_k \cos (P_k \varDelta s_k) =$$
$$= \lim \sum (X_k \varDelta x_k + Y_k \varDelta y_k + Z_k \varDelta z_k) =$$
$$= \frac{m}{2} (c_n^2 - c_0^2),$$

welche eben in der symbolischen Schreibweise der Integralrechnung die Form 20) annimmt. Die Gleichung 19) müsste entweder als abgekürzter Ausdruck für die Integralgleichung 20) betrachtet oder in Quotientenform so geschrieben werden:

$$\frac{P\,ds\cos(P,ds)}{S\,ds} = \frac{P\,dp}{S\,ds} = \frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{S\,ds} = 1.$$

§ 17. Die Lissajous'schen Figuren.

Wir wollen als ersten speciellen Fall denjenigen betrachten, wo ein einziger materieller Punkt von der Masse m vorhanden ist, dessen rechtwinkelige Coordinaten wir mit x, y, z, dessen Geschwindigkeitscomponenten wir mit u, v, w bezeichnen. Die drei Componenten X, Y, Z der darauf wirkenden Gesammtkraft in den Coordinatenrichtungen sollen den Coordinaten des materiellen Punktes proportional sein. Sie sollen immer nach der Seite wirken, wo der Coordinatenursprung liegt, so dass sie für positive Werthe der Coordinaten die Richtung der negativen Coordinatenaxen haben, weshalb wir sie mit negativen Zeichen versehen wollen. Es wird also dann sein:

$$23)\qquad X = -a_{11}x, \quad Y = -a_{22}y, \quad Z = -a_{33}z,$$

wobei a_{11}, a_{22} und a_{33} constant sind. Es ist daher in den allgemeinen Bewegungsgleichungen 13) für m_1, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1, X_1, Y_1, Z_1 zu setzen m, x, y, z, u, v, w,

$$X = -a_{11}x, \quad Y = -a_{22}y, \quad Z = -a_{33}z,$$

wodurch sie die Form annehmen:

$$24)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -a_{11}x, \; m\frac{d^2y}{dt^2} = -a_{22}y, \; m\frac{d^2z}{dt^2} = -a_{33}z.$$

Kräfte, welche von anderen im Endlichen liegenden Punkten auf unseren materiellen Punkt ausgeübt werden, können nicht genau nach diesem Gesetze auf ihn wirken, weil ja dann die Anziehung in unendlicher Entfernung nicht verschwinden, sondern im Gegentheile unendlich gross werden würde. Wir finden jedoch einen Fall, wo die Gleichungen 23) wenigstens angenähert gelten in folgender Weise. Der bewegliche materielle Punkt von der Masse m befinde sich

unter dem Einflusse beliebig vieler anderer im Raume unbeweglicher materieller Punkte, welche solche Kräfte auf ihn ausüben, dass er, sobald er sich im Coordinatenanfangspunkte befindet, im Gleichgewichte ist, d. h. dass sich daselbst alle auf ihn wirkenden Kräfte aufheben. Ferner soll sich der bewegliche materielle Punkt vom Coordinatenursprunge immer nur um eine Strecke entfernen, welche klein ist gegenüber jeder der Entfernungen der auf ihn wirkenden materiellen Punkte. Dann sind auch die Coordinaten x, y, z des beweglichen materiellen Punktes klein gegen alle diese Entfernungen und man kann die Kraftfunction V nach Potenzen dieser Coordinaten entwickeln. Bezeichnen wir die Werthe, welche man erhält, wenn man in

$$V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cdots$$

$x = y = z = 0$ setzt, mit a_0, a_1, a_2, a_3, a_{11}, $a_{12} \ldots$, so wird:

$$V = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_{11} \frac{x^2}{2} + a_{12} \frac{xy}{2} + \ldots .$$

Da die in den Coordinatenrichtungen auf den beweglichen materiellen Punkt wirkenden Kraftcomponenten immer die negativen partiellen Differentialquotienten von V nach den betreffenden Coordinaten sind und für $x = y = z = 0$ verschwinden sollen, so muss $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ sein. Ich setze ferner als aus der analytischen Geometrie bekannt voraus, dass man die Lage der Coordinatenaxen immer so wählen kann, dass $a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0$ wird. Acceptiren wir diese Lage der Coordinatenaxen und vernachlässigen wegen der Kleinheit der Coordinaten die Glieder, welche bezüglich derselben von höherer Ordnung als der zweiten sind, so folgt:

$$V = a_0 + \tfrac{1}{2}(a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2).$$

Wir erhalten daher für die Componenten der Kräfte, welche auf den materiellen Punkt in den Coordinatenrichtungen wirken und für die Bewegungsgleichungen die Gleichungen 23) und 24).

Wenn die drei Constanten a_{11}, a_{22} und a_{33} positiv sind, so wird, sobald der materielle Punkt unendlich wenig in

irgend einer der drei Coordinatenrichtungen von seiner Ruhelage entfernt wird, immer eine Kraft geweckt, welche ihn wieder gegen diese zurücktreibt. Man sagt dann, das Gleichgewicht des materiellen Punktes in seiner Ruhelage ist stabil. Wäre einer oder mehrere dieser Coefficienten negativ, so würde, wenn sich der materielle Punkt ein wenig in der betreffenden Coordinatenrichtung aus seiner Ruhelage entfernt, eine Kraft wirksam, die ihn noch weiter von derselben wegtreibt. Es müsste also dann, wenn der materielle Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit hätte, die betreffende Coordinate mindestens so lange fortwachsen, bis die obigen Formeln, die ja blosse Annäherungsformeln sind, nicht mehr gelten. Man sagt dann, das Gleichgewicht ist labil. Diesen Fall, sowie die Fälle, dass einer oder mehrere der Coefficienten a_{11}, a_{22} und a_{33} verschwinden oder dass die gemachte Reihenentwickelung unzulässig wird, wollen wir nicht näher betrachten. Letzteres wäre nur möglich, wenn die Kraft, die einer der wirkenden Punkte auf den Beweglichen ausübt, in der unmittelbaren Umgebung der der Ruhelage des letzteren entsprechenden Entfernung nicht nach dem Taylor'schen Satze entwickelbar wäre. Wir beschäftigen uns daher ausschliesslich mit dem Falle, dass a_{11}, a_{22} und a_{33} positiv sind.

Die drei Differentialgleichungen 24) sind vollkommen von einander unabhängig. Daher genügt es, die erste zu behandeln. Ich setze ihr Integrale als bekannt voraus. Wenn A und B zwei willkürliche Constanten und $+\sqrt{A^2+B^2}=C$, $\operatorname{arctg}(A/B)=-D$ ist, so lautet dasselbe:

$$x = A\cos\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right)$$
$$= C\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}} - D\right).$$

Bestimmt man die Constante so, dass für $t=0$, $x=x_0$, $u=\frac{dx}{dt}=u_0$ wird, so folgt:

25) $$x = x_0\cos\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right) + u_0\sqrt{\frac{m}{a_{11}}}\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right).$$

Die Componente der Bewegung in der Abscissenrichtung ist eine periodische. Der Werth von x schwankt zwischen

$+C=\sqrt{x_0^2+\frac{u_0^2 m}{a_{11}}}$ und $-C$ fortwährend hin und her und ist bei passend gewähltem Zeitanfange immer proportional dem Sinus des mit einer Constanten multiplicirten Werthes der Zeit. Man nennt eine solche Bewegung eine einfache Sinusbewegung oder eine harmonische Bewegung oder auch, weil das Pendel angenähert nach diesen Gesetzen schwingt, eine einfache Pendelschwingung. Dieselben Werthe von x und u kehren der Reihe nach wieder, wenn die Grösse unter dem Sinus- und Cosinuszeichen um 2π, also wenn t um $2\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{a_{11}}}$ gewachsen ist. Die Hälfte τ dieser Grösse, also die Dauer eines Hinganges, welche gleich der eines Herganges ist, nennt man die Schwingungsdauer. Das durch die Schwingungsdauer dividirte Product der Zahl π und der Zeit, welche seit dem Momente verging, wo x zum letzten Male gleich $+C$ war, nennt man die Phase der Bewegung.

Gleiches gilt natürlich für die Componente der Bewegung in der Richtung der y- und z-Axe; doch sind die entsprechenden Schwingungsdauern τ' und τ'' im Allgemeinen unter einander und von τ verschieden.

Wir wollen nur noch einige Worte über die jedenfalls möglichen Lösungen bemerken, für welche zu jeder Zeit $z=0$ ist. Dann bekommen wir nebst der Gleichung 25) die analoge Gleichung für die y-Axe:

26) $$y = y_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{a_{22}}{m}}\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{a_{22}}}\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{22}}{m}}\right).$$

Sei das eine Ende eines elastischen Stabes von rechteckigem Querschnitte festgeklemmt, am anderen Ende aber eine verhältnissmässig grosse Masse m befestigt (Wheatstone's Kaleidophon), so macht diesselbe angenähert die durch die Gleichungen 25) und 26) dargestellte Bewegung, ebenso ein Punkt eines Lichtstrahles, welcher vorher von zwei Spiegeln reflectirt wurde, die an den Zinken zweier in auf einander senkrechten Ebenen schwingender Stimmgabeln befestigt sind (Lissajous'sche Figuren). Beides kann entweder als Erfahrungsthatsache betrachtet oder aus den

späteren Bildern für die elastischen Erscheinungen abgeleitet werden.

Die Bahn finden wir in diesem Falle, wenn wir die Zeit aus den beiden Gleichungen 25) und 26) eliminiren. Ist das Verhältniss der Schwingungsdauern τ und τ' ein rationales, so erhält man dadurch immer eine algebraische Gleichung zwischen x und y. Ist dieses Verhältniss aber irrational, so bildet die Bahn zwar einen fortlaufenden Linienzug, dieser aber füllt mit wachsender Zeit allmählich ein ganzes endliches Stück der Ebene (ein Rechteck) immer mehr continuirlich aus, so dass der materielle Punkt jedem Punkte dieses Stückes der Ebene beliebig nahe kommt, wenn nur die Zeitdauer der Bewegung lang genug gewählt wird.

Wir wollen noch folgenden Fall betrachten: Auf unseren materiellen Punkt, auf welchen in der Richtung OX die Kraft $-a_{11}x$, in der Richtung OY die Kraft $-a_{22}y$ wirkt, soll noch eine dritte Kraft von constanter Intensität p wirken, welche in der xy-Ebene gerade vom Coordinatenursprung hinweg gerichtet ist. Es wäre dies der Fall, wenn die Axe des Stabes des Wheatstone'schen Kaleidophons horizontal wäre und auf die am Ende befestigte Masse m ausser der Elasticität des Stabes noch die Schwere wirken würde. Wenn p in der Abscissenrichtung wirkt, tritt das Gleichgewicht für $x = p/a_{11}$ ein, wirkt dagegen p in der Richtung der y-Axe, so ist für den Fall des Gleichgewichtes $y = p/a_{22}$. Ist endlich die Richtung der Kraft p gegen diese beiden Richtungen geneigt, so fällt die Verschiebung, welche der materielle Punkt aus seiner Ruhelage O erfährt, im Falle des Gleichgewichtes nicht in die Richtung der Kraft, wenn a_{11} und a_{22} verschieden sind. Sind z. B. die Seitenflächen des Stabes des Wheatstone'schen Kaleidophons gegen die Horizontalebene geneigt, so wird derselbe durch ein am Ende angehängtes Gewicht nicht in einer Verticalebene, sondern in einer gegen die Verticale geneigten Ebene nach abwärts gebogen, wenn sein Querschnitt ein Rechteck ist.

Wir kehren wieder zu der durch die allgemeinen Gleichungen 25) und 26) bestimmten Bewegung ohne Wirksamkeit der Kraft p zurück und betrachten den Fall, wo

$a_{11} = a_{22}$ ist, der immer eintritt, sobald jedem auf das Bewegliche wirkenden materiellen Punkte ein zweiter entspricht, der ebenso relativ gegen die y-Axe, wie der erste gegen die x-Axe liegt. Wir wollen dann $a_{11} = a_{22} = a$ setzen. Die Elimination der Zeit aus den beiden Gleichungen 25) und 26) lehrt, dass dann die Bahn geradlinig wird, falls x und y gleichzeitig ihre grössten gleich oder entgegengesetzt bezeichneten Werthe annehmen.

Wählt man diese Zeit als Zeitanfang, so ist $u_0 = v_0 = 0$, x_0 und y_0 sind im ersten Fall gleich-, im zweiten entgegengesetzt bezeichnet. Man sagt dann, die Phasendifferenz zwischen der Bewegung in der Abscissen- und Ordinatenrichtung ist gleich Null oder π. Von der Geraden wird natürlich nur ein endliches Stück $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ von O aus in der einen und anderen Richtung durchlaufen. Wenn die Phasendifferenz dieser beiden Bewegungen $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ ist, d. h. wenn x seinen grössten positiven oder negativen Werth hat, während $y = 0$ ist und umgekehrt, so ist, wenn man einen der ersten Momente als Zeitanfang wählt, $u_0 = y_0 = 0$. Die Elimination der Zeit zeigt, dass dann die Bahn eine Ellipse, deren Axen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, oder ein Kreis ist; sonst ist die Bahn eine geneigte Ellipse.

Wenn in den Gleichungen 25) und 26) a_{11} und a_{22} nicht völlig gleich, aber nur wenig verschieden sind, so geschieht die Bewegung lange so, als ob sie vollständig gleich wären und es ändert sich nur allmählich die Phasendifferenz zwischen den Bewegungen in der Abscissen- und Ordinatenrichtung. Auch wenn $\sqrt{a_{11}}$ und $\sqrt{a_{22}}$ sehr angenähert in einem durch einfache Zahlen ausdrückbaren rationalen Verhältnisse stehen, geschieht die Bewegung lange so, als ob sie genau in diesem Verhältnisse stünden und es findet allmählich wieder eine Phasenverschiebung zwischen der Bewegung in der Abscissen- und Ordinatenrichtung statt.

Aehnlich betrachtet man in der Astronomie die Störungen der Planetenbahnen so, als ob jeder Planet sich in jedem Momente nach den Kepler'schen Gesetzen in einer gewissen Bahn bewegte und nur allmählich die Elemente dieser Bahn sich mit der Zeit änderten.

§ 18. Gedämpfte harmonische Schwingungen.

Wir wollen nun noch den Fall betrachten, dass nebst der der Coordinate proportionalen Kraft noch eine der Geschwindigkeit proportionale wirkt. Wir wollen in diesem Falle aber nur die Bewegung in einer Geraden ins Auge fassen. Wählen wir diese Gerade zur Abscissenaxe, so erhalten wir also jetzt an Stelle der ersten der Gleichungen 24) die Gleichung

$$27) \qquad m\frac{d^2 x}{d t^2} = -a x - 2 b \frac{d x}{d t}.$$

a und b sind Constanten. Die der Geschwindigkeit proportionale Kraft soll stets der Bewegung entgegenwirken, weshalb wir ihr das negative Zeichen geben. Die Bewegung eines langsam unter dem Einflusse der Schwere und des Luftwiderstandes schwingenden Pendels geschieht, wie wir später sehen werden, mit grosser Annäherung nach den durch diese Gleichungen ausgesprochenen Gesetzen. Die Kräfte, welche Lufttheilchen ausüben, lassen sich gut durch das Bild von Centrikräften darstellen und man kann hieraus (wenigstens beiläufig) motiviren oder als aus der Erfahrung bekannt voraussetzen, dass die Bewegung der Lufttheilchen in der Umgebung des schwingenden Pendels angenähert so geschieht, dass die Kraft der ersteren auf das letztere der Geschwindigkeit desselben proportional ist. Nach den durch die Gleichung 27) bestimmten Gesetzen schwingt auch ein durch eine Kupfermasse gedämpfter Magnet. Wir wissen in diesem Falle weniger über die Bilder, durch welche sich die von den elektrischen Strömen der Kupfermasse auf den Magneten ausgeübten Kräfte darstellen lassen. Es lehrt aber auch hier wieder die Erfahrung, dass die dämpfende Kraft der Geschwindigkeit proportional ist. Die Integration der Gleichung 27) liefert

$$x = C e^{-\alpha_1 t} + C_1 e^{-\alpha_2 t},$$

sobald $b^2 > a m$ ist, wobei

$$\alpha_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - a m}}{m}$$

$$\alpha_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - a m}}{m}$$

positive Grössen sind, wenn, wie wir annehmen, a und b positiv sind, d. h. wenn die der Coordinate proportionale Kraft eine Anziehung, die der Geschwindigkeit proportionale eine Dämpfung ist. C und C_1 sind die Integrationsconstanten, die ohne Weiteres bestimmt werden können, wenn die Werthe der Coordinate und Geschwindigkeit zu Anfang der Zeit gegeben sind. Die irgend einer Zeit entsprechende Abscisse besteht also aus zwei Summanden, welche sich beide mit wachsender Zeit nach dem Exponentialgesetze asymptotisch der Null nähern, d. h. sie nehmen in geometrischer Progression ab, wenn die Zeit in arithmetischer wächst. Der erste Summand nimmt noch weit rascher als der zweite ab, so dass nach längerer Zeit zwar auch der zweite sehr klein, aber der erste noch viel kleiner geworden ist.

Für $b^2 = am$ folgt aus Gleichung 27)

$$x = (Ct + C_1)e^{-\frac{bt}{m}}.$$

Beide Glieder nähern sich mit wachsender Zeit asymptotisch der Null, jedoch nur das zweite nach dem einfachen Exponentialgesetze und es wäre wie im früheren Falle leicht, diejenige Relation zwischen dem Anfangswerthe der Coordinate und dem der Geschwindigkeit zu finden, welche erfüllt sein muss, damit nur das eine oder nur das andere Glied auftritt. Die Bewegung heisst in den beiden betrachteten Fällen eine aperiodische.

Ist $b^2 < am$, so werden die beiden im ersten Falle mit α_1 und α_2 bezeichneten Constanten complex und man findet, wenn man die imaginären Exponentiellen in bekannter Weise durch trigonometrische Functionen ersetzt:

$$x = \left[C\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + C_1\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right]e^{-\frac{\lambda}{\tau}t},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

28) $$\tau = \frac{\pi m}{\sqrt{ma - b^2}}, \quad \lambda = \frac{\pi b}{\sqrt{ma - b^2}},$$

so dass

28a) $$\frac{b}{m} = \frac{\lambda}{\tau}, \quad \frac{a}{m} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\tau^2}$$

ist. Wenn t um τ wächst, wechseln beide Addenden im Ausdrucke für x, daher auch x selbst das Vorzeichen. Es muss also x jedesmal im Verlaufe einer Zeitstrecke von der Länge τ einmal Null werden. Wählen wir einen solchen Zeitmoment, für den $x = 0$ wird, als Zeit Null, so wird:

28b) $$x = Ce^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right).$$

Jedesmal nach Verlauf der Zeit τ, sonst aber nicht, wird $x = 0$. Dazwischen hat x abwechselnd positive und negative Maxima, sobald $dx/dt = 0$ ist, welche Bedingung sich wegen

29) $$\frac{dx}{dt} = \frac{C}{\tau} e^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \left[-\lambda \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + \pi \cos\frac{\pi t}{\tau}\right]$$

auf

30) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) = \frac{\pi}{\lambda}$$

reducirt. Wir wollen jeden positiven und jeden negativen grössten Zahlenwerth von x eine grösste Excursion nennen. Ist t_1 die zwischen Null und $\frac{1}{2}\tau$ liegende Wurzel dieser Gleichung, so hat jede folgende die Form $t_1 + k\tau$. τ ist also die Zeit, welche zwischen dem Eintritt einer grössten Excursion und der nächsten darauf folgenden oder, wie man auch sagt, eines Umkehrpunktes und des nächstfolgenden vergeht, also die Zeit eines ganzen Hinganges, welche natürlich gleich der Zeit eines Herganges ist und welche wir die Schwingungsdauer nennen wollen. Sie ist auch die Zeit, welche zwischen zwei sich folgenden Durchgängen durch die Ruhelage vergeht.

Ist x_k der Absolutwerth irgend einer grössten Excursion, so ist der der nächsten $x_{k+1} = x_k \cdot e^{-\lambda}$. Die Bewegung ist daher ebenfalls eine periodische, schwingende; aber die grössten Excursionen nähern sich in geometrischer Progression asymptotisch der Nulle. Aus der letzten Gleichung findet man:

$$\lambda = \log\text{nat}\frac{x_k}{x_{k+1}} = \log\text{nat}\frac{x_{k+1} + x_k}{x_{k+2} + x_{k+1}}.$$

Man nennt λ das logarithmische Decrement. Es ist der natürliche Logarithmus des Quotienten zweier sich folgender

grösster Excursionen oder auch des Quotienten des Abstandes des $k+1$ ten und $k+2$ ten Umkehrpunktes in den des k ten und $k+1$ ten. Man nennt den Abstand zweier sich folgender Umkehrpunkte die betreffende Schwingungsweite.

§ 19. Verschiedene Anregungsarten gedämpfter Pendelschwingungen.

Wir wollen nun folgende Anregungsarten betrachten. Es sei das Bewegliche anfangs in Ruhe. Zur Zeit Null werde ihm plötzlich die Geschwindigkeit u_0 ertheilt. Der dazu erforderliche Antrieb ist:

$$A_0 = \int X\,dt = m\,u_0 .$$

Dann gelten die Gleichungen 28b) und 29), da für $t=0$, $x=0$ ist. In letzterer wird für $t=0$, $dx/dt = u_0$. Es ist also

$$C = \frac{\tau u_0}{\pi}.$$

Daher wird die darauf folgende grösste Excursion

$$31)\quad x_m = \frac{\tau u_0}{\pi} e^{-\frac{\lambda}{\tau} t_1} \sin\left(\frac{\pi t_1}{\tau}\right) = \frac{\tau u_0}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Denn dieselbe tritt für $t = t_1$ ein, was die kleinste positive Wurzel der Gleichung 30) ist. Man kann daher, wenn λ und τ bekannt sind, aus der ersten grössten Excursion die anfangs ertheilte Geschwindigkeit berechnen. Führt man A_0 statt u_0 ein und setzt für m seinen Werth aus der zweiten der Gleichungen 28a), so folgt

$$x_m = \frac{A_0\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{a\tau} e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\lambda}}.$$

In der Galvanometrie gilt eine der Gleichung 27) gleichlautende Gleichung, nur bedeutet x den galvanischen Strom, A_0 den Integralstrom, a den Reductionsfactor, m das Trägheitsmoment.

Wir betrachten nun folgende andere Anregungsweise des materiellen Punktes zur Bewegung. Man ertheile demselben im Augenblicke jedes Durchganges durch die Ruhelage die Geschwindigkeit u_1 in der Richtung, in der er sich

gerade bewegt. Der gesammte dazu erforderliche Antrieb sei A_1. Man nennt dies die ballistische Multiplicationsmethode. Es wird dann mit der Zeit ein stationärer Schwingungszustand eintreten, wobei die grösste Excursion jedesmal dieselbe ist. Für diesen muss dann nach jeder Rückkehr in die Ruhelage die seit dem vorigen Durchgange durch diese verlorene Geschwindigkeit durch die neu ertheilte u_1 gerade ersetzt werden. Wenn also u_0 die Geschwindigkeit im Momente nach Hinzufügung der Geschwindigkeit u_1 ist, so ist (vgl. Formel 29) $u_0 e^{-\lambda}$ die Geschwindigkeit, mit welcher der materielle Punkt wieder in die Ruhelage zurückkehrt und da diese durch Hinzufügung von u_1 wieder in u_0 übergehen muss, so hat man:

$$u_1 = u_0(1 - e^{-\lambda}), \quad u_0 = \frac{u_1}{1 - e^{-\lambda}},$$

x_m ist wie früher durch die Gleichung 31) mit u_0 verbunden, aus welcher durch Substitution von u_1 sich ergiebt

$$x_m = \frac{\tau u_1}{(1 - e^{-\lambda})\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} =$$

$$= \frac{A_1 \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{a \tau (1 - e^{-\lambda})} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

$2 x_m$ ist im stationären Zustande die Schwingungsweite. Würde die Geschwindigkeit u_1 immer nur beim Durchgange durch die Ruhelage in dem einen Sinne, nicht aber bei dem im entgegengesetzten Sinne ertheilt, so würde sich nichts ändern, als das

$$u_0 = \frac{u_1}{1 - e^{-2\lambda}}$$

wäre. In jedem Falle lässt sich u_1 aus der Schwingungsweite des stationären Zustandes und aus λ und τ berechnen. Ist überdies noch m oder a bekannt, so kann auch der jedesmal ertheilte Antrieb gefunden werden.

Eine dritte Anregungsmethode ist die Zurückwerfungsmethode. Dabei ertheilt man bei jedem zweiten Durchgange durch die Ruhelage eine Geschwindigkeit u_2 in der der Bewegung entgegengesetzten Richtung. Wenn das Bewegliche

unmittelbar nachher die Geschwindigkeit u_0 hat, so hat es bei der zweiten Rückkehr nach der Ruhelage die Geschwindigkeit $u_0 e^{-2\lambda}$ und es muss für den stationären Zustand

$$u_2 - u_0 e^{-2\lambda} = u_0,$$

daher

$$u_2 = \frac{u_0}{1 + e^{-2\lambda}}$$

sein. Die erste eintretende grösste Excursion ist wieder mit u_0 durch die Gleichung 31) verbunden, die zweite ist $e^{-\lambda}$mal kleiner. Die Einführung von u_2 statt u_0 in diese Gleichung bietet keine Schwierigkeit.

Wir wollen noch eine vierte Anregungsweise betrachten, welche wir das Multiplicationsverfahren mit andauernder Kraft nennen wollen. Wir lassen während eines ganzen Hinganges auf das Bewegliche eine constante Kraft X in der Bewegungsrichtung wirken. Während des ganzen Herganges lassen wir eine gleiche entgegengesetzte Kraft wirken, welche also jetzt wieder die Richtung der Bewegung hat. Ist der Zustand stationär geworden, so geschieht der Hingang einfach so, als ob die Ruhelage nicht im Coordinatenursprunge, sondern in dem Punkte mit der Abscisse $\xi = X/a$ wäre, beim Hergange aber im Punkte mit der Abscisse $-\xi$. Wenn daher $2x_m$ die Schwingungsweite im stationären Zustande ist, so ist während eines Hinganges $x_m + \xi$ als die erste und $x_m - \xi$ als die zweite grösste Excursion anzusehen. Es ist also

$$x_m + \xi = (x_m - \xi)e^{\lambda}$$

oder

$$x_m = \xi \frac{e^{\lambda} + 1}{e^{\lambda} - 1} = \frac{X}{a} \frac{e^{\lambda} + 1}{e^{\lambda} - 1}.$$

Die letzten Aufgaben sind specielle Fälle des allgemeinen Problems, dass auf den materiellen Punkt ausser den beiden bisher betrachteten Kräften, von denen die erste der Excursion, die zweite der Geschwindigkeit proportional ist, noch eine andere Kraft wirkt, welche eine beliebige Function $f(t)$ der Zeit ist, so dass die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + ax = f(t).$$

Die allgemeine Integration dieser Gleichung nach der Methode der Integration von linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und zweitem Theile hat keine Schwierigkeit. Für

$$f(t) = B \sin \frac{\pi t}{\tau_1},$$

wo diese Gleichung das Mitschwingen eines elastischen Körpers oder sonstigen Resonators mit einem einfachen Tone liefert, nimmt ihr allgemeines Integral die Gestalt an:

$$x = \left[C \cos \frac{\pi t}{\tau} + C_1 \sin \frac{\pi t}{\tau}\right] e^{-\lambda \frac{t}{\tau}} + \frac{B}{\omega} \sin \left(\frac{\pi t}{\tau_1} - \vartheta\right).$$

Dabei sind τ und λ wiederum durch die Gleichungen 28) gegeben. ω und ϑ aber sind Constanten, deren Werthe durch die beiden Gleichungen

$$\omega \cos \vartheta = a - \frac{\pi^2 m}{\tau_1^2},$$

$$\omega \sin \vartheta = \frac{2 \pi b}{\tau_1}$$

bestimmt sind.

Für den stationären Zustand verschwinden im Ausdrucke für x alle Glieder bis auf das letzte. Der materielle Punkt macht also einfache harmonische Schwingungen, welche dieselbe Periode, wie die anregende Kraft haben. Die Schwingungsweite $2 B / \omega$ ist ein Maximum, wenn $\tau_1 = \pi m / \sqrt{a m - 2 b^2}$ ist. Wenn $\tau_1 = \pi \sqrt{m / a}$, also gleich der Schwingungsdauer ist, welche der materielle Punkt hätte, wenn er ohne Dämpfung bei gleicher, der Coordinate proportionalen Kraft schwingen würde, so ist die Geschwindigkeit in der Ruhelage ein Maximum und $\vartheta = \frac{1}{2} \pi$; die Phasendifferenz zwischen den Schwingungen des Punktes und denen der Kraft ist also $\frac{1}{2} \pi$. Für grössere τ_1 liegt sie zwischen Null und $\frac{1}{2} \pi$, für kleinere zwischen $\frac{1}{2} \pi$ und π.

§ 20. Grundgleichungen für die Centralbewegung.

Wir wollen uns nun mit dem folgenden Beispiele befassen. Die Resultirende aller Kräfte, welche auf einen beweglichen materiellen Punkt von der Masse m wirken, dessen

Coordinaten zur Zeit t mit x, y, z bezeichnet werden sollen, sei eine Function $f(r)$ der Entfernung desselben von einem im Raume festen Punkt O und falle auch immer in die Richtung von r. Wir geben wieder der Function $f(r)$ das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Kraft die Entfernung r zu vergrössern oder zu verkleinern strebt, d. h. je nachdem sie von O weg- oder gegen O hingerichtet ist. Eine solche Kraft nennen wir eine Centralkraft. Die Bewegung, welche ein materieller Punkt unter ihrem Einflusse macht, nennen wir eine Centralbewegung.

Diese Bedingungen sind realisirt, wenn auf den beweglichen materiellen Punkt ein einziger anderer wirkt, welcher in der Entfernung r die Kraft $f(r)$ auf ihn ausübt und entweder durch irgend eine Vorrichtung immer in dem fixen Raumpunkte O festgehalten wird oder zu Anfang ruhte und eine sehr grosse Masse gegenüber der Masse des beweglichen Punktes hat. Im letzteren Falle sind die Bedingungen natürlich nur angenähert realisirt, da die Beschleunigung des wirkenden materiellen Punktes immer sehr klein gegen die des anderen ist und daher auch die Geschwindigkeit und Ortsveränderung des wirkenden materiellen Punktes sehr klein bleiben.

Wir wählen den Punkt O als Coordinatenursprung und die Ebene, welche ihn und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen materiellen Punktes enthält, als xy-Ebene, dann enthält die Gleichung 9) ein einziges Glied, in welchem für x_1, y_1, z_1, x_k, y_k, z_k, m_1, r_{1k} und $f_{1k}(r_{1k})$ zu schreiben ist x, y, z, 0, 0, 0, m, r und $f(r)$. Wir erhalten daher, wenn wir die jeder der Coordinatenaxen entsprechende Gleichung hinschreiben, die drei Gleichungen

$$32)\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x}{r}f(r),\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{r}f(r),\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{z}{r}f(r).$$

Da zu Anfang der Zeit $z = dz/dt = 0$ ist, so ist alles bezüglich der xy-Ebene symmetrisch, und wir erhalten die einzig mögliche Lösung, indem wir für alle Zeiten $z = 0$ setzen. Denn würde irgend einmal z von Null verschiedene Werthe annehmen, so müsste die Lösung, wo z die gleichen entgegengesetzt bezeichneten Werthe hat, ebenso gut mög-

lich sein. Wenn aber der Quotient des Zuwachses von r in den von $f(r)$ niemals unendlich wird, so ist das Problem immer eindeutig bestimmt, d. h. es können nie aus den gleichen Anfangswerthen nach einer endlichen Zeit sich zweierlei Werthcombinationen der Coordinaten ergeben.

Wir haben also nur noch die beiden ersten der Gleichungen 32) weiter zu behandeln. Wir leiten da zuerst die Gleichung der lebendigen Kraft nach der Methode ab, die wir schon bei Entwickelung der Gleichung 20) auseinandergesetzt haben. Wir multipliciren die linke Seite der ersten der Gleichungen 32) mit $u\,dt$, die rechte mit dx, die linke Seite der zweiten Gleichung mit $v\,dt$, die rechte mit dy und addiren dann beide Gleichungen. Da

$$\frac{d^2 x}{d t^2} dt = du$$

ist, so erhalten wir auf diese Weise links

$$m(u\,du + v\,dv) = d\left(\frac{m c^2}{2}\right),$$

rechts aber

$$f(r)\frac{x\,dx + y\,dy}{r} = f(r)\,dr,$$

da ja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist. Die Integration liefert

33) $$\frac{m c^2}{2} = \varphi(r) + \frac{h m}{2},$$

wobei das unbestimmte Integrale

34) $$\int f(r)\,dr = \varphi(r)$$

gesetzt und die willkürliche Constante h beigefügt wurde, damit der Integrationsconstante des unbestimmten Integrales ein beliebiger, möglichst einfach zu wählender specieller Werth ertheilt werden kann.

Die Ableitung $\varphi'(r)$ von $\varphi(r)$ ist also gleich $f(r)$.

Eine zweite Integralgleichung (d. h. Gleichung mit einer willkürlichen Integrationsconstante) gewinnen wir, wenn wir die erste der Gleichungen 32) mit $-y$, die zweite mit $+x$ multipliciren und dann wieder beide addiren. Dadurch folgt:

$$m\left(x\frac{d^2 y}{d t^2} - y\frac{d^2 x}{d t^2}\right) = 0.$$

Da m nicht verschwinden kann, so muss der Ausdruck in der Klammer verschwinden. Derselbe ist aber der Differentialquotient nach der Zeit von

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

Es liefert daher die Integration

35) $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k,$$

wobei k eine neue aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Integrationsconstante ist.

Es empfiehlt sich nun, r und den Winkel ϑ der vom Punkte O aus gezogenen Geraden r mit der positiven Abscissenaxe als Polarcoordinaten einzuführen. Dann wird:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen liefert:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\vartheta - r\frac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\vartheta + r\frac{d\vartheta}{dt}\cos\vartheta.$$

Es wird also:

$$c^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Die Gleichungen 33) und 35) verwandeln sich daher in:

36) $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\varphi(r) + h$$

und

37) $$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = k.$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

38) $$\int r^2 d\vartheta = kt.$$

t stellt eine beliebige Zeit dar. Das Integrale links ist über den Bogen der Bahncurve zu erstrecken, der während dieser Zeit durchlaufen wird und stellt bekanntlich die Fläche der dreieckartigen Figur dar, welche von jenem Bogen

und den beiden seine Endpunkte mit dem Coordinatenanfangspunkte verbindenden Geraden begrenzt wird. Man kann sie die während der Zeit t vom Leitstrahle r durchstrichene Fläche nennen. Die Gleichung 38) besagt, dass ihr Flächeninhalt der Zeit proportional ist, während welcher er durchstrichen wird. Eliminirt man $d\vartheta/dt$ aus den Gleichungen 36) und 37), so folgt:

39) $$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\varphi(r) + h - \frac{k^2}{r^2}}}$$

und daraus wieder nach 37):

40) $$d\vartheta = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\varphi(r) + h - \frac{k^2}{r^2}}}.$$

Wenn wir $f(r) = -ar$ setzen, wobei a eine Constante ist, wenn also auf den materiellen Punkt eine dem Leitstrahle r direct proportionale Anziehung wirkt, so erhalten wir wieder den speciellen Fall, der sich aus den schon behandelten Gleichungen 24) ergiebt, wenn man darin $x = 0$ und $a_{11} = a_{22} = a$ setzt und wir wollen natürlich nicht die uns schon bekannten Resultate nochmals aus den Gleichungen dieses Paragraphen ableiten.

§ 21. Centralbewegung nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze.

Es sei nun die Centralkraft eine dem Quadrate von r verkehrt proportionale Anziehungskraft. Wenn wir den Proportionalitätsfactor mit λm bezeichnen, wo λ eine Constante ist, so ist also dann

$$f(r) = -\frac{\lambda m}{r^2}.$$

Da wir in Formel 34) den bequemsten Werth für die Integrationsconstante wählen können, so wollen wir $\varphi(r) = \lambda m/r$ setzen. Dann liefert die Gleichung 40)

$$d\vartheta = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{h + \frac{2\lambda}{r} - \frac{k^2}{r^2}}}.$$

Setzen wir

$$\frac{k}{r} = \varkappa + \frac{\lambda}{k},$$

so erhalten wir

$$d\vartheta = -\frac{d\varkappa}{\sqrt{h + \frac{\lambda^2}{k^2} - \varkappa^2}}.$$

Wir wollen noch die positive Quadratwurzel aus $1 + \frac{h k^2}{\lambda^2}$ mit ε bezeichnen, so dass

41) $$1 - \varepsilon^2 = -\frac{h k^2}{\lambda^2}$$

wird. Ferner ertheilen wir der zu ϑ hinzutretenden Integrationsconstanten den Werth Null. Dann liefert die Integration

42) $$r = \frac{k^2}{\lambda(1 + \varepsilon \cos \vartheta)}.$$

Für $\vartheta = 0$ hat r seinen kleinsten Werth. Die getroffene Wahl der zu ϑ hinzutretenden Integrationsconstante hat also die Bedeutung, dass wir die vom Anziehungscentrum nach dem Perihele, d. h. nach demjenigen Punkte der Bahn, welcher dem Anziehungscentrum am nächsten liegt, gezogene Gerade zur positiven Abscissenaxe wählen. Ich kann aus der analytischen Geometrie als bekannt voraussetzen, dass die Gleichung 42) eine Kegelschnittlinie darstellt, in deren einem Brennpunkte der Coordinatenursprung liegt, deren Excentricität ε ist und deren Axen die Richtung der beiden Coordinatenaxen haben. Dieselbe ist eine Hyperbel, wenn $\varepsilon > 1$, also h positiv ist, eine Parabel, wenn $\varepsilon = 1$, daher $h = 0$ ist, eine Ellipse, wenn $\varepsilon < 1$ oder h negativ ist, ein Kreis für $\varepsilon = 0$. Im letzteren Falle ist h gleich $-\lambda^2/k^2$. Ist h negativ und hat einen grösseren Absolutwerth, so ist keine Bahn mehr möglich. Dabei ist immer eine Anziehung, also λ positiv, vorausgesetzt.

In der That hat nach Gleichung 33) oder 36), falls h positiv ist, die Geschwindigkeit in unendlicher Entfernung noch den reellen Werth $+\sqrt{h}$, falls $h = 0$ ist, nähert sie sich mit wachsender Entfernung der Grenze Null, falls h negativ ist, wird sie in unendlicher Entfernung imaginär. Ist endlich

$h = -\lambda^2/k^2$, so sieht man leicht, dass die Anziehung gleich der der Kreisbahn entsprechenden Centripetalkraft ist.

Wäre die dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportionale Kraft eine abstossende, so wäre λ negativ. Dann wäre für reelle Werthe der Geschwindigkeiten stets h positiv und daher $\varepsilon > 1$. Die Bewegung würde also stets in einer Hyperbel erfolgen, wenn k von Null verschieden ist.

Wir wollen nur noch dem Falle, dass $\varepsilon < 1$ und λ natürlich positiv ist, einige Betrachtungen widmen. Die Bahn ist dann eine Ellipse, deren grosse Halbaxe a das arithmetische Mittel des grössten und kleinsten Werthes von r (der Perihel- und Apheldistanz) ist. Es ist also:

43) $$a = \frac{k^2}{\lambda(1-\varepsilon^2)} = -\frac{\lambda}{h}.$$

Die kleine Halbaxe ist

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{\sqrt{-h}}.$$

Sind die Anfangswerthe r_0 und c_0 von r und c und der Winkel zwischen beiden (r_0, c_0) gegeben, so finden sich daraus die Constanten h und k durch folgende Gleichungen:

$$h = c_0^2 - \frac{2\lambda}{r_0}, \quad k = r_0 c_0 \sin(r_0, c_0).$$

Um r und ϑ als Functionen der Zeit zu finden, dient die Gleichung 39), welche sich in unserem Falle auf

44) $$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{h r^2 + 2\lambda r - k^2}}$$

reducirt. Diese wird bekanntlich integrirt, indem man einen Hülfswinkel u einführt, welcher durch die Gleichung

45) $$r = a(1 - \varepsilon \cos u)$$

definirt ist. u heisst die mittlere, ϑ die wahre Anomalie. Der Winkel u kann leicht durch Construction gefunden werden. Sei die Bahnellipse gegeben, O' ihr Mittelpunkt, O ihr Brennpunkt, OA ihre grosse Axe, M irgend ein Punkt derselben in der Entfernung r von O mit der wahren Anomalie ϑ. Wir construiren Fig. 3 den Kreis vom Radius a

und Mittelpunkte O' um die Ellipse herum. Die durch M auf OA gezogene Senkrechte soll die auf derselben Seite wie M liegende Hälfte des Kreises im Punkte N treffen. Ferner sollen x und y die rechtwinkeligen Coordinaten des Punktes M bezüglich eines Coordinatensystems sein, dessen Ursprung in O' liegt, dessen Abscissenaxe die Richtung der grossen, dessen Ordinatenaxe die Richtung der kleinen Axe der Ellipse hat. Dann ist:

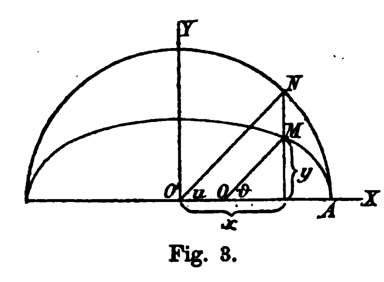


Fig. 3.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ferner ist

$$y^2 = r^2 - (x - \varepsilon a)^2.$$

Die Substitution dieses Werthes von y in die vorige Gleichung liefert

$$r = a - \varepsilon x = a\,[1 - \varepsilon \cos(NO'A)].$$

Es ist also $NO'A$ der Winkel, den wir die mittlere Anomalie des Punktes M genannt und mit u bezeichnet haben. Aus der Gleichung 45) folgt

$$dr = a\varepsilon \sin u\, du,$$

ferner folgt aus den Gleichungen 43) und 45)

$$hr^2 = -\lambda a(1 - \varepsilon \cos u)^2, \quad k^2 = a\lambda(1 - \varepsilon^2),$$

daher

$$\sqrt{hr^2 + 2\lambda r - k^2} = \varepsilon\sqrt{a\lambda}\,\sin u.$$

Nach Substitution aller dieser Werthe in die Gleichung 44) liefert die Integration:

46) $$t = \sqrt{\frac{a^3}{\lambda}}\,(u - \varepsilon \sin u),$$

wenn die Constante so bestimmt wird, dass im Momente eines Durchgangs durch das Perihel, also für $u = 0$, $t = 0$ ist.

Wir setzen voraus, dass die Bahn gegeben ist. Wenn gefragt wird, wann ϑ einen gegebenen Werth hat, so hat

man zunächst z. B. durch die geometrische Construction das diesem ϑ entsprechende u und dann aus Gleichung 46) den entsprechenden Werth von t zu berechnen. Fragt man umgekehrt, welchen Werth bei gegebener Bahn ϑ zu einer gegebenen Zeit hat, so muss man zuerst u aus der für u transcendenten Gleichung 46) finden (Kepler'sches Problem), und dann aus Gleichung 45) r und aus Gleichung 42) oder aus der geometrischen Construction ϑ finden.

§ 22. Die Centralkraft enthält ein der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportionales Glied.

Die bisher behandelten Fälle der Centralbewegung sind wohl die einzigen, welche beobachteten Naturvorgängen entsprechen. Hertz hat dem Bilde der Natur, dessen Darstellung im vorliegenden Buche wieder versucht wurde, den Vorwurf gemacht, dass es zu weit sei, d. h. dass es eine unendliche Menge von speciellen Bildern enthalte, denen keine Thatsachen entsprechen. Ich glaube, dass dieser Vorwurf überhaupt schwer zu vermeiden ist und jedenfalls auch Hertz' Mechanik trifft, da von der unendlichen Menge von Bedingungsgleichungen oder verborgenen Bewegungen, welche nach Hertz' Vorstellungen möglich sind, sicher auch nur ausserordentlich wenige auf wirklich beobachtbare Fälle passen.

Ja so lange die Aussicht auf ein Bild, welches nicht mehr als die Thatsachen giebt, noch so ferne wie gegenwärtig ist, scheint es mir sogar wichtig, auch jenen speciellen Fällen der gegenwärtig aussichtsvollsten Bilder, welche nicht bisher beobachteten Thatsachen entsprechen, einige Aufmerksamkeit zu schenken. Sie können erstens in Zukunft einmal zur Darstellung beobachteter Thatsachen sich eignen und zweitens erhalten wir erst durch das Studium aller möglichen Fälle auch eine bessere Uebersicht über den inneren Zusammenhang jener speciellen Fälle, die uns schon jetzt nützlich sind.

In den bisher betrachteten Fällen der Centralbewegung kommen nun zufällig nur ganz wenige specielle Bahnformen vor, welche keineswegs eine Vorstellung von dem allgemeinen Charakter aller bei der Centralbewegung möglichen Bahn-

formen geben. Gerade unter den Bahnformen, die uns noch nicht untergekommen sind, befinden sich aber solche, an denen einige allgemeine Sätze zum einfachsten Ausdrucke kommen, die bei verwickelteren, praktisch nicht unwichtigen Problemen, z. B. dem Dreikörperprobleme, eine wesentliche Rolle spielen. Deshalb wollen wir in Kürze noch so viele der übrigen einfachsten Centralbewegungen betrachten, als notwendig sind, um eine Uebersicht über den allgemeinen Charakter aller bei der Centralbewegung möglichen Bahnformen zu erhalten.

Wir wollen zunächst einen Satz ableiten, der uns hierbei nützlich ist. Die Centralkraft bestehe aus zwei Summanden. Der eine Theil $f(r)$ sei eine beliebige Function der Entfernung. Dazu komme noch eine Kraft $m a / r^3$, welche der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist und abstossend oder anziehend wirkt, je nachdem die Constante a positiv oder negativ ist. $\varphi(r)$ sei die Function, welche zu $f(r)$ in dem durch die Gleichung 34) angegebenen Verhältnisse steht. Die der jetzt betrachteten Centralkraft $f(r) + m a / r^3$ entsprechende Function $\varphi(r)$ hat also den Werth $\varphi(r) - m a / 2 r^2$. Daher verwandelt sich die Gleichung 40) für diese Centralbewegung in die folgende

$$d\vartheta = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2\varphi(r)}{m} + h - \frac{k^2 + a}{r^2}}}.$$

Wir wollen diese Centralbewegung mit einer zweiten vergleichen, bei welcher die Centralkraft blos gleich $f(r)$ ist, h denselben Werth, k aber den Werth $k_0 = \sqrt{k^2 + a}$ hat. Wir bezeichnen für beide Centralbewegungen den zu einem gleichen ein für allemal gegebenen Werthe r_0 des r gehörigen Werth von ϑ mit Null; den zu irgend einem anderen Werthe des r gehörigen Werth von ϑ bezeichnen wir für die erste Centralbewegung mit ϑ, für die zweite mit ϑ_0.

Die Gleichung, welche der Gleichung 40) für die zweite Centralbewegung entspricht, können wir dann leicht in die Form bringen:

$$47) \quad d\left(\vartheta_0\sqrt{\frac{k^2}{k^2 + a}}\right) = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2\varphi(r)}{m} + h - \frac{k^2 + a}{r^2}}}.$$

Es ist also bei der zweiten Centralbewegung $\vartheta_0\sqrt{\frac{k^2}{k^2+a}}$ dieselbe Function von r, wie für die erste ϑ. Ist uns die Bahn der zweiten Centralbewegung bekannt, so finden wir daraus die der ersten, indem wir jedem r, zu dem bei der zweiten Centralbewegung der Winkel ϑ_0 gehört, einen $\varkappa = \sqrt{\frac{k^2}{k^2+a}}$ fachen Polarwinkel zutheilen. Der zeitliche Verlauf der Centralbewegung ergiebt sich dann immer sofort aus dem Flächensatze.

Erstes Beispiel. Sei $f(r) = 0$. Dann geschieht die zweite Centralbewegung in einer Geraden MN. $OP = r_0$ sei deren kürzester Abstand von O, A sei irgend ein Punkt der Geraden. Dann ist AOP der mit ϑ_0 bezeichnete Winkel und man hat

48) $$OA = r = r_0 / \cos\vartheta_0.$$

Wenn a positiv ist, so geschieht die erste Centralbewegung unter dem Einflusse einer der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Abstossung. Dann ist $\varkappa < 1$. Wir finden also die Bahn, indem wir die Länge des Leit-

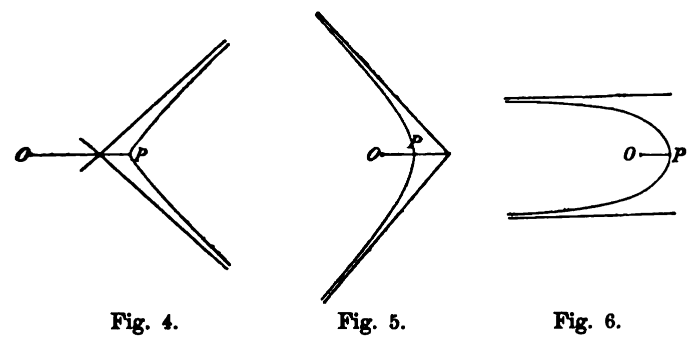


Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6.

strahles OA jedes Punktes A der Geraden MN unverändert lassen, aber den Winkel $AOP = \vartheta_0$ jedesmal im Verhältnisse $1:\varkappa$ verkleinern. Ihre Form ist in Fig. 4 dargestellt, sie hat zwei Asymptoten, von denen jede mit der Perihel-distanz OP den Winkel $\frac{1}{2}\varkappa\pi$ bildet und den Abstand $\varkappa r_0$ vom Anziehungscentrum O hat.

Ist a negativ, so geschieht die erste Centralbewegung unter dem Einflusse einer der dritten Potenz der Ent-

fernung verkehrt proportionalen Anziehung und es wird $\varkappa > 1$. Es ist dann der Winkel AOP im Verhältnisse $1:\varkappa$ zu vergrössern. Falls $-a < 3k^2/4$ ist, so ist $\varkappa < 2$, der Winkel einer Asymptote mit der Periheldistanz ist dann $< \pi$, die Bahn hat die in Fig. 5 dargestellte Gestalt. Ist $-a$ gleich $3k^2/4$, so ist $\varkappa = 2$. Die beiden Asymptoten sind der von O nach P gezogenen Geraden (der Periheldistanz) parallel, aber entgegengesetzt gerichtet und haben jede die Entfernung $2r_0$ vom Anziehungscentrum (Fig. 6). Liegt $-a$ zwischen $3k^2/4$ und k^2, so schlingt sich die Bahn

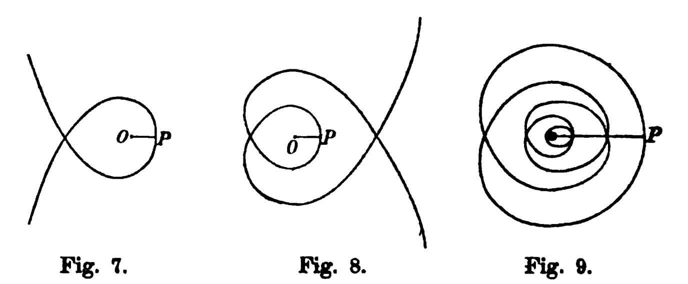


Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

spiralig um das Anziehungscentrum (Figg. 7 und 8) und die Anzahl der Windungen der Spirale nimmt immer mehr zu, je näher sich die Grössen $-a$ und k^2 kommen. Für $-a = k^2$ geschieht die Bewegung in einer hyperbolischen Spirale, oder der (stets instabilen) Kreisbahn. Ist $-a$ noch grösser, so setzen wir $\sqrt{\frac{-k^2}{a+k^2}} = \frac{1}{\varkappa'}$. Die directe Integration der Gleichung 40) liefert für negative h

$$r = \frac{2r_0}{e^{\varkappa'\vartheta} + e^{-\varkappa'\vartheta}}.$$

Es ist also $OP = r_0$ jetzt der grösste Werth des r und die Bahn besteht aus zwei zu OP symmetrischen Zweigen, deren jeder eine Spirale ist, die sich dem Coordinatenursprunge in unendlich vielen Windungen asymptotisch nähert (Fig. 9). Für $h = 0$ ist die Bahn eine logarithmische Spirale, für positive h eine vom Anziehungscentrum bis ins Unendliche reichende Spirale mit der Gleichung

$$r(e^{\varkappa'\vartheta} - e^{-\varkappa'\vartheta}) = \text{const.}$$

Wir setzten bisher in Formel 47) $f(r) = \varphi(r) = 0$. Wir erhalten ein zweites Beispiel, welches uns einige neue Bahntypen kennen lehrt, wenn wir in dieser Formel

$$f(r) = -\frac{m\lambda}{r^3}, \text{ daher } \varphi(r) = \frac{m\lambda}{r}$$

setzen. Die zweite Centralbewegung wird dann mit der Planetenbewegung nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze identisch, die erste geschieht unter dem Einflusse einer Kraft, welche aus einem dem Quadrate und einem

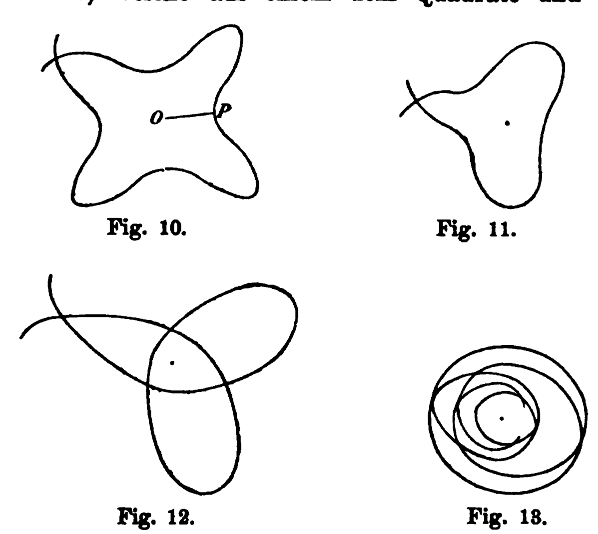


Fig. 10. Fig. 11.

Fig. 12. Fig. 13.

der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Summanden besteht. Wir finden also für eine solche Kraft die Bahn, indem wir in den Planetenbahnen den zu jedem r gehörigen Polarwinkel mit $\varkappa$ multipliciren. Die Bahnen, welche dadurch aus der parabolischen und den hyperbolischen entstehen, sowie diejenigen, welche man für imaginäre $\varkappa$ erhält, haben ganz den Typus einer der Figuren 4 bis 9.

Aus den elliptischen Bahnen aber entstehen eigenthümliche sternförmige geschlossene oder ungeschlossene Bahnen, welche, je nachdem $\varkappa$ von einem sehr kleinen bis zu einem sehr grossen Werthe variirt, den Typus der Figuren 10 bis 13 haben. Ist die Bahn ungeschlossen, so

kommt das Bewegliche, wie wir es schon bei den Lissajous'-schen Figuren als möglich erkannten, während genügend langer Zeit jedem Punkte, der in einem von zwei concentrischen Kreisen begrenztem Stücke der Ebene liegt, beliebig nahe. Die Bahngleichung giebt uns daher nicht für jede Abscisse des Beweglichen eine einzige oder eine endliche Anzahl möglicher Ordinaten, sondern blos in jedem Punkte die Richtung und Geschwindigkeit der Weiterbewegung.

§ 23. Discussion der möglichen Bahntypen.

Wir wollen noch einige allgemeine Betrachtungen anstellen, um uns zu überzeugen, welche Bahntypen ausser denen, die wir bisher zufällig kennen gelernt haben, noch möglich sind. Wir wollen uns mit dem leicht zu behandelnden Falle, dass $k = 0$, also die Bahn eine Gerade ist, nicht befassen.

Setzen wir

49) $$\psi(r) = \frac{2}{m}\varphi(r) + h - \frac{k^2}{r^2},$$

so erhalten wir:

50) $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \psi(r); \quad \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{r^4}{k^2}\psi(r).$$

$f(r)$ kann beliebige positive oder negative Werthe einschliesslich Null haben, soll aber zwischen $r = 0$ und $r = \infty$ eindeutig, endlich und continuirlich bleiben. Da wir in der Physik unendliche Kräfte nicht zulassen, so sollten wir in diese Bedingung die Werthe $r = 0$ und $r = \infty$ einschliessen. Doch wollen wir theils der allgemeinen Uebersicht, theils gewisser beliebter Kraftgesetze wegen ein unendliches Anwachsen der Kraft für $r = 0$ und $r = \infty$ zulassen. Unter diesen Annahmen sind auch $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ exclusive der Grenzen zwischen $r = 0$ und $r = \infty$ eindeutig, endlich und continuirlich.

Aus den Gleichungen 50) folgt, dass, wenn das Kraftgesetz und die Werthe der Constanten h und k gegeben sind, nur solche Werthe von r in reellen Bahnen vorkommen können, für welche $\psi(r)$ nicht negativ ist. Andererseits wird man in jedem Punkte A, für welchen $\psi(r)$

positiv ist, einen positiven und einen gleichen negativen Werth für $dr/d\vartheta$ finden können, welcher unseren Gleichungen genügt. Durch jeden solchen Punkt werden also zwei mögliche Bahnen gehen, die übrigens vollkommen congruent und Spiegelbilder bezüglich der Geraden OA sind. Durch jeden anderen Punkt B, der sich in der gleichen Entfernung von O befindet, gehen bei dem gleichen Kraftgesetze zwei congruente, gleichen Werthen von h und k entsprechende Bahnen, die um den Winkel BOA gegen die durch A gehenden Bahnen gedreht sind. Wir wollen alle diese Bahnen, da sie untereinander congruent sind, als eine einzige Bahnform bezeichnen.

Wenn $\psi(r)$ für sehr kleine r positiv und für $r = 0$ noch positiv oder gleich Null ist, so endet eine Bahnform in O. $\psi(0)$ kann natürlich nur Null oder positiv sein, wenn $\varphi(r)$ mit abnehmendem r unendlich gross von der Ordnung $1/r^2$ oder noch höherer, daher die Kraft $f(r)$ von der Ordnung $1/r^3$ oder höherer unendlich wird. Für kein anderes Kraftgesetz kann das Bewegliche nach O gelangen, ohne dass $k = 0$ ist. Die Zeit τ, welche vergeht, bis r von einem kleinen Werthe ε bis Null abnimmt oder umgekehrt und der gesammte Winkel α, um welchen sich dabei der Leitstrahl r dreht, sind gegeben durch

51) $$\tau = \int_0^\varepsilon \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2r^2}{m}\varphi(r) + hr^2 - k^2}},$$

52) $$\alpha = \int_0^\varepsilon \frac{k\,dr}{r\sqrt{\frac{2r^2}{m}\varphi(r) + hr^2 - k^2}}.$$

α nimmt daher mit abnehmendem ε ab, wenn $r\sqrt{\varphi(r)}$ mit abnehmendem r von höherer Ordnung unendlich wird als $l\left(\frac{1}{r}\right).\,ll\left(\frac{1}{r}\right).\,lll\left(\frac{1}{r}\right)\ldots$, wobei l der natürliche Logarithmus, ll der natürliche Logarithmus des natürlichen Logarithmus etc. ist. Sonst wird α unendlich und die Bahn umwindet den Punkt O in unendlich vielen Windungen. Die dazu erforderliche Zeit könnte nur unendlich werden, wenn $2r^2\varphi(r)$

für kleine r von $mk^2 - mhr^2$ um kleines von höherer Ordnung als $r^4\left[l\frac{1}{r}\,ll\frac{1}{r}\,..\right]^2$ verschieden wäre.

Ebenso reicht eine Bahn in unendliche Entfernung, wenn $\psi(r)$ für $r = \infty$ positiv ist oder von einem positiven Werth aus sich der Grenze Null nähert, was für die physikalisch eigentlich allein wichtigen Fälle, dass $\varphi(\infty)$ verschwindet, nur für positive h, oder wenn $\varphi(r)$ für grosse r positiv ist, auch für $h = 0$ eintreten kann. Ob der Leitstrahl r dabei einen endlichen Winkel beschreibt oder unendlich viele Umläufe macht, sowie ob das Bewegliche eine beliebig grosse Entfernung in endlicher oder erst unendlicher Zeit erreicht, hängt wieder von dem leicht zu discutirendem Werthe zweier bestimmter Integrale ab, welche sonst genau mit den bestimmten Integralen 51) und 52) übereinstimmen; nur dass ihre untere Grenze sehr gross, ihre obere unendlich ist.

Da $\psi(r)$ continuirlich ist, so kann es von einem positiven zu einem negativen Werth nur durch den Werth Null übergehen. Wir wollen bei gegebenem Kraftgesetze die verschiedenen, einem gegebenen Werthepaare von h und k entsprechenden Bahnen untersuchen. Für ihre Anzahl ist die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung

$$\psi(r) = 0 \tag{53}$$

maassgebend. Wir setzen zunächst voraus, dass für das gegebene Werthepaar von h und k die obige Gleichung 53) keine gleichen positiven Wurzeln hat, dass also für keinen positiven Werth des r, der sie befriedigt, auch $\psi'(r) = 0$ ist. Dann wird für jede positive Wurzel r_0 der Gleichung 53) $\psi(r)$ mit wachsendem r entweder von einem negativen Werth zu einem positiven oder umgekehrt übergehen. Wir nennen die Wurzel $r = r_0$ im ersten Falle eine steigende, im zweiten Falle eine sinkende. Für jede solche Wurzel ist $dr/d\vartheta = 0$.

Zwischen jeder sinkenden und der nächst grösseren steigenden Wurzel ist $\psi(r)$ negativ, daher keine Bahn möglich. Zwischen einer steigenden und der nächst grösseren sinkenden ist immer eine Bahnform möglich, deren Periheldistanz die steigende, deren Apheldistanz die sinkende Wurzel ist.

Grösser kann r in dieser Bahn nicht werden. Die Bahn muss sich daher nach dem Aphel in einem Zweige fortsetzen, der wieder zum Perihel zurückkehrt und wegen des gleichen Baues der Differentialgleichung mit dem vor dem Aphel liegenden Theil congruent ist. Dasselbe gilt von jedem Perihel.

In dem angenommenen Falle, dass r_0 keine doppelte Wurzel der Gleichung 53) ist, kann r nur eine sehr kurze Zeit hindurch sehr nahe gleich r_0 sein, der auch wegen des Flächensatzes nur eine sehr kleine Aenderung von ϑ entspricht. Dies lehrt die in bekannter Weise auszuführende Discussion der Differentialgleichung für den Fall, dass r nahe gleich r_0 ist. Ich führe hier diese Discussion nur beiläufig aus. Sei r zur Zeit t_0 gleich r_0, was eine steigende einfache Wurzel der Gleichung 53) sei. Zur Zeit $t_0 + \tau$ aber sei $r = r_0 + \varrho$. Setzt man $\sqrt{\psi'(r_0)} = 2\,a$, so reducirt sich die erste der Differentialgleichungen 50) für kleine ϱ auf

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{\psi(r_0 + \varrho)} = 2\,a\sqrt{\varrho},$$

woraus folgt $\varrho = a^2\tau^2$. So lange ϱ sehr klein ist, wird also immer r während einer sehr kurzen Zeit von r_0 bis $r_0 + \varrho$ wachsen. Dasselbe gilt auch für eine sehr kleine Abnahme des ϱ im Aphel.

Da nach dem Flächensatze $d\vartheta/dt$ sein Zeichen nicht wechselt und nur in unendlicher Entfernung Null werden kann, so kann die Tangente zur Bahn niemals durch den Coordinatenursprung O gehen. Das Bewegliche muss vielmehr den Punkt O immer im einen oder anderen Sinne umkreisen. Wir erhalten daher stets geschlossene oder ungeschlossene Bahnen von dem Typus der Figuren 10 bis 13, von denen ellipsenartige Bahnen ein specieller Fall sind, wobei zu bemerken ist, dass der Krümmungshalbmesser der Bahn unendlich wird, wo $f(r) = 0$ ist, dagegen ist die Bahn nach derjenigen Seite der Tangente, auf welcher O liegt, concav oder convex, wenn $f(r)$ negativ oder positiv ist. Man sieht dies ein, wenn man $f(r)$ in die Tangentialkraft und in die nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn hin gerichtete Centripetalkraft zerlegt.

Zwischen dem Perihel und Aphel kann natürlich möglicher Weise die eine und die andere Krümmung öfters wechseln. In Figg. 5 bis 9 ist die Krümmung immer gegen O gerichtet, in Figg. 10 und 11 wechselt sie zwischen Perihel und Aphel einmal.

Ist $\psi(r)$ für sehr kleine Werthe von r positiv, so muss die kleinste positive Wurzel der Gleichung 53), wenn diese überhaupt positive Wurzeln hat, eine sinkende sein. Dann giebt es eine im Coordinatenursprunge endende Bahn, deren Aphel diese kleinste Wurzel ist, welche aber ins Unendliche geht, wenn keine positive Wurzel existirt. Im ersten Falle theilt der nach dem Aphel gezogene Leitstrahl natürlich die Bahn wieder in zwei Aeste, die Spiegelbilder bezüglich des Leitstrahles sind.

Ist $\psi(r)$ für sehr grosse r positiv, so ist, falls die Gleichung 53) überhaupt positive Wurzeln hat, die grösste derselben eine steigende und gleich der Periheldistanz der sich ins Unendliche erstreckenden Bahn, welche auch wieder durch den nach dem Perihel gezogenen Leitstrahl in zwei Aeste getheilt wird, die bezüglich des Leitstrahles Spiegelbilder sind. Die im Anziehungscentrum endenden oder ins Unendliche gehenden Bahnen haben den Typus der Figuren 9 oder 4 bis 8, wobei jedoch natürlich auch wieder Einwärts- und Auswärtskrümmung wechseln kann. Bei den ersteren Bahnen kann natürlich die Anzahl der Windungen um den Coordinatenursprung auch beliebig gering sein.

Hat die Gleichung 53) gar keine positive Wurzel, so kann $\psi(r)$ von $r = 0$ bis $r = \infty$ sein Zeichen nicht wechseln. Ist dieses Zeichen negativ, so ist überhaupt keine Bahn möglich, ist es positiv, so erstreckt sich die einzig mögliche Bahnform vom Anziehungscentrum bis ins Unendliche. Es ist dies der einzige Fall, wo ausser dem Anziehungscentrum und dem unendlich entfernten Punkte kein Perihel oder Aphel existirt, wo also nicht jede Bahn selbst aus zwei congruenten Aesten besteht, die Spiegelbilder zu einander sind, sondern diese beiden Spiegelbilder als zwei verschiedene Bahnformen betrachtet werden können, da sie sich nur im Unendlichen oder im Anziehungscentrum treffen.

§ 24. Bahnen, welche sich der Kreisbahn asymptotisch nähern oder sie osculiren.

Es ist noch der Fall zu betrachten, dass für gewisse Werthepaare von h und k, z. B. $h = h_1$, $k = k_1$ die Gleichung 53) zwei gleiche Wurzeln $r = r_1$ besitzt. Dann ist gleichzeitig $\psi(r_1) = \psi'(r_1) = 0$, also:

54) $$\frac{1}{m} f(r_1) + \frac{k^2}{r_1^3} = 0.$$

Wegen der ersten der Gleichungen 50) ist $dr/dt = 0$, daher

$$r\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{k}{r}$$

gleich der gesammten Geschwindigkeit c. Aus Gleichung 54) folgt daher:

$$f(r) = -mc^2/r.$$

Die Centralkraft ist anziehend und gleich der der Kreisbewegung entsprechenden Centripetalkraft. Da für $r = r_1$ die Gleichung $dr/d\vartheta = 0$ besteht, so kann die Bewegung fortwährend im Kreise erfolgen.

Es soll zunächst $\psi''(r_1)$ negativ sein. Dies tritt wegen $\psi'(r_1) = 0$ ein, wenn für $r = r_1$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2} m r^3 \psi'(r)\right] = \frac{d}{dr}[r^3 f(r)]$$

negativ ist, also $f(r)$ in der unmittelbaren Umgebung des Werthes $r = r_1$ mit wachsendem r ab- oder weniger rasch zunimmt, als die mit einer Constanten multiplicirte reciproke dritte Potenz von r. Dann liegt für das gegebene Werthepaar von h und k zu beiden Seiten des Kreises $r = r_1$ ein Gebiet, wo keine Centralbewegung möglich ist. Stört man die Bahn sehr wenig, d. h. verändert man die Werthe von h und k sehr wenig, so muss daher die Bahn immer der Kreisbewegung unendlich nahe bleiben, man sagt, die Kreisbewegung ist eine stabile Bahn.

Ist dagegen $\psi''(r_1)$ positiv, d. h. wächst die Kraft in der unmittelbaren Umgebung des Werthes $r = r_1$ mit wachsendem r rascher als die mit einer Constanten multiplicirte reciproke dritte Potenz von r, so liegt für das in Frage stehende Werthepaar von h und k zu beiden Seiten des Kreises $r = r_1$

ein Gebiet, wo durch jeden Punkt zwei Bahnen (beide natürlich Spiegelbilder voneinander) gehen. Wenn also wieder ϱ eine kleine positive oder negative Grösse ist, so gehen durch jeden Punkt, der die Entfernung $r_1 + \varrho$ vom Anziehungscentrum hat, zwei derartige Bahnen hindurch, für welche h und k dieselben Werthe, wie für die Bewegung im Kreise $r = r_1$ haben.

Der Typus dieser Bahnen wird durch Discussion der Differentialgleichung für den Fall, dass nahe $r = r_1$ ist, gefunden. Wir wollen in die erste der Gleichungen 50) $r = r_1 + \varrho$ setzen und ohne uns in eine detaillirte Analyse der Reihenentwickelung einzulassen, durch welche die folgenden Resultate exact begründet werden können, alle Glieder bis auf die der niedrigsten Ordnung weglassen. Wenn wir den reciproken Werth der Grösse $\frac{1}{2}\psi''(r_1)$ mit b^2 bezeichnen, so erhalten wir dann:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \pm \frac{\varrho}{b}, \quad t - t_0 = \pm b\, l\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right),$$

wobei l den natürlichen Logarithmus, ϱ_0 den Werth des ϱ zur Zeit t_0 bedeutet. Es ist also sowohl die Zeit, welche vergeht, bis ϱ einen endlichen Werth annimmt, als auch die, welche vergeht, bis ϱ exact gleich Null wird, also die Bewegung exact mit der Kreisbewegung identisch wird, unendlich. Man könnte daher sagen, dass für das gegebene Werthepaar von h und k in der unmittelbaren Umgebung des Werthes $r = r_1$ drei Arten von Centralbewegungen möglich sind, die exact im Kreise $r = r_1$, eine zweite ausserhalb, die sich, wenn sie von aussen nach innen durchlaufen wird, in unendlich vielen Windungen, deren Zurücklegung eine unendlich lange Zeit beansprucht, der Kreisbahn asymptotisch nähert, eine dritte, die sich ebenso von innen der Kreisbewegung asymptotisch nähert. Alle drei können natürlich auch als eine einzige aufgefasst werden, in der das Bewegliche, wenn es sich z. B. von innen nach aussen bewegt, sich zuerst der Kreisbahn nähert, dann in dieser unendlich lange verbleibt und sie dann erst in unendlich vielen Windungen nach aussen wieder verlässt. Da es jetzt keine Bahn giebt, die sehr nahe der Kreisbahn ein Perihel und

auch ein Aphel hat, so ist letztere instabil, d. h. die kleinste Störung bewirkt, dass sich das Bewegliche durch sehr lange Zeit immer mehr und schliesslich um Endliches von ihr entfernt.

Jede der im vorigen Paragraphen beschriebenen Bahnen kann daher statt des Perihels oder Aphels oder auch statt beider sich einer Kreisbahn von aussen oder innen nähern.

Wenn h und k nicht exact, aber sehr nahe gleich solchen Werthen h_1 und k_1 sind, für welche die Gleichung 53) gleiche Wurzeln hat, so sind zwei Fälle möglich:

Fall 1: h und k haben solche sehr nahe an h_1 und k_1 gelegene Werthe h_2 und k_2, dass $\psi(r_1)$ einen kleinen negativen Werth hat, wobei r_1 wieder die für $h = h_1$ und $k = k_1$ vorhandene doppelte Wurzel der Gleichung 53) ist. Dann ist der Kreis $r = r_1$ von einem sehr schmalen Ringe umgeben, innerhalb dessen keine Centralbewegung mit den Werthen h_2 und k_2 der Constanten möglich ist.[1]) Die innerhalb dieses Ringes liegenden Bahnen, bei denen die Constanten diese Werthe haben, werden daher, nachdem sie sich in vielen nahe kreisförmigen Windungen dem Ringe näherten, an dessen innerem Rande ihr Aphel haben. Ebenso haben die ausserhalb liegenden Bahnen nach vielen nahe kreisförmigen Windungen am Aussenrande des Ringes ihr Perihel und das Bewegliche kann niemals von einer innerhalb des Ringes liegenden zu einer ausserhalb liegenden Bahn gelangen.

Fall 2: h und k sollen solche Werthe h_3 und k_3 haben, welche ebenfalls von h_1 und k_1 sehr wenig abweichen, aber gerade im entgegengesetzten Sinne wie h_2 und k_2, so dass $\psi(r)$ für keinen Werth von r gleich Null oder negativ wird, der sehr nahe an r_1 liegt. Eine Bahn, welche mit den Werthen h_3 und k_3 der Constanten innerhalb des Kreises $r = r_1$ beginnt, wird sich zwar anfangs auch diesem Kreise in sehr vielen Windungen nähern, dann aber ihn durchbrechen und nach nochmaliger Beschreibung sehr vieler dem Kreise sehr nahe liegender Windungen ihn nach aussen zu ganz verlassen.

Wenn wir daher von demselben Punkte innerhalb des Kreises $r = r_1$ einmal eine Bahn mit den Werthen h_2 und k_2,

[1]) Dieser Ring kann auch ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des Kreises, aber immer sehr nahe daran liegen.

dann mit den Werthen h_3 und k_3 der Constanten ausgehen lassen, so werden beide Bahnen und auch die Bewegungsgeschwindigkeiten in denselben anfangs nur sehr wenig verschieden sein. Dann aber wird die erste Bahn in der unmittelbaren Nähe des Kreises $r = r_1$ umkehren, die letzte dagegen wird diesen Kreis um endliches überschreiten und dann total von der ersten Bahn verschieden verlaufen. Aehnliches kann natürlich auch beim Dreikörperproblem eintreten. Ein Erstaunen hierüber scheint mir kaum gerechtfertigt, da die Zeit der Bewegung, nach welcher die beiden Bahnen weit voneinander abweichen, eine enorm grosse ist. Nach einer enorm grossen Zeit aber weichen ja auch zwei ungeschlossene Bahnen von dem in Figg. 10 bis 13 dargestellten Typus in ihrer Lage, freilich nicht in ihrer Form, um Endliches voneinander ab, auch wenn sowohl sie, als auch die Bewegungsgeschwindigkeiten anfangs fast vollständig übereinstimmten.

Nicht wesentlich verschieden sind die Verhältnisse, wenn für $r = r_1$ nebst ψ selbst noch mehr Ableitungen als die erste verschwinden und eine gerade Ableitung die erste ist, die nicht verschwindet. Nur ist dann die Zeit, während welcher $r - r_1$ von einem endlichen, bis zu einem gegebenen sehr kleinen Werth sinkt, von noch höherer Ordnung gross. Wenn dagegen eine ungerade Ableitung die erste ist, welche nicht verschwindet, so nähern sich die Bahnen nur von einer Seite der Kreisbahn mit dem Radius r_1 asymptotisch, während auf der anderen Seite für die in Rede stehenden Werthe von h und k keine Bahnen möglich sind. Wenn alle Ableitungen verschwinden, so erhalten wir den schon discutirten Fall einer der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft. Bezüglich aller näheren Details muss auf die Originalabhandlungen verwiesen werden.[1])

Ich füge noch einige Worte über den Fall bei, dass

$$f(r) = -\frac{a}{r^3} + b(r - r_1)^\gamma$$

ist, wo $1 > \gamma > 0$ ist. Dann ist die Kraft in der Nähe des Werthes $r = r_1$ eine eindeutige und continuirliche Function

[1]) Korteweg, Arch. neerl. Bd. 19; Boussinesq, Compt. rend. Bd. 84, p. 944.

von r, deren Ableitung nach r jedoch unendlich wird. In diesem Falle ist die Bahn durch die Bewegungsgleichungen, die Anfangslage und Grösse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit nicht immer eindeutig bestimmt, da das Bewegliche für diejenigen Werthe der Integrationsconstanten, für welche $\psi(r_1) = \psi'(r_1) = 0$ ist, sich sowohl im Kreise mit dem Radius r_1, als auch in einer anderen Bahn, die diesen Kreis osculirt, bewegen kann, und zwar erreicht das Bewegliche auf der letzteren Bahn in endlicher Zeit eine von der Kreisbahn um Endliches abstehende Stelle, wie man sehr leicht findet, wenn man $r = r_1 + \varrho$ setzt, wie früher nach Potenzen von ϱ entwickelt und die Zeit sucht, während welcher ϱ von Null bis zu einem kleinen endlichen Werthe wächst.

Deshalb nehmen wir immer an, dass der Quotient des Zuwachses der Entfernung in den entsprechenden Zuwachs der Kraft nicht unendlich werden kann. Dann sind nach der Theorie der Differentialgleichungen Mehrdeutigkeiten innerhalb endlicher Zeit ausgeschlossen.[1]) In den früher betrachteten Fällen der Bahnen, die sich der Kreisbahn asymptotisch nähern, hatte das Bewegliche zwar auch, wenn es anfangs auf der Kreisbahn war, gewissermaassen die Wahl auf dieser zu bleiben oder die sich ihr asymptotisch nähernde einzuschlagen. Diese Wahl wurde aber dadurch illusorisch, dass sich die Bewegung im letzteren Falle erst nach unendlich langer Zeit von der im ersteren Falle unterscheidet.

III. Allgemeine Integrale der Bewegungsgleichungen.

§ 25. Bewegung zweier beweglicher materieller Punkte unter dem Einflusse einer Centrikraft.

Wir betrachten nun als einfaches Beispiel den Fall, dass sich nur zwei materielle Punkte mit den Massen m_1 und m_2, zwischen denen eine Centrikraft $f(r)$ thätig ist, in einer Ebene bewegen. $\int f(r)\,dr$ mit einer bestimmten, in

---

[1]) Wien. Sitzber. 106, S. 12, 7. Januar 1897.

einfachster Weise gewählten Constante werde wieder mit $\varphi(r)$ bezeichnet. r sei die Entfernung der beiden materiellen Punkte, x_1, y_1, x_2, y_2 deren rechtwinkelige Coordinaten zu irgend einer Zeit t. Nach Gleichung 9) erhält man dann die folgenden Gleichungen:

$$55)\quad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{d t^2} = f(r) \dfrac{x_1 - x_2}{r}, & m_1 \dfrac{d^2 y_1}{d t^2} = f(r) \dfrac{y_1 - y_2}{r}, \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{d t^2} = f(r) \dfrac{x_2 - x_1}{r}, & m_2 \dfrac{d^2 y_2}{d t^2} = f(r) \dfrac{y_2 - y_1}{r}, \end{cases}$$

Addiren wir von diesen Gleichungen je zwei übereinanderstehende, so folgt:

$$56)\quad \frac{d^2 (m_1 x_1 + m_2 x_2)}{d t^2} = \frac{d^2 (m_1 y_1 + m_2 y_2)}{d t^2} = 0.$$

Wir wollen nun die gerade Verbindungslinie der beiden materiellen Punkte zu jeder Zeit durch einen Punkt S in zwei Stücke theilen, die sich verkehrt wie die ihnen anliegenden Massen verhalten. Der Punkt S, den wir den Schwerpunkt des von beiden Massen gebildeten Systems oder kürzer den Schwerpunkt der beiden Massen nennen, hat dann zu jeder Zeit eine bestimmte Lage, die sich continuirlich mit der Zeit verändert und man kann von seiner Bewegung wie von der eines materiellen Punktes sprechen. Für die Coordinaten des Schwerpunktes zur Zeit t findet man durch eine einfache Rechnung die Werthe

$$57)\quad \xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad \eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Wenn beide Massen gleich sind, so liegt also der Schwerpunkt gerade in der Mitte zwischen beiden und seine Abscisse ist das arithmetische Mittel ihrer Abscissen und gleiches gilt für die y-Coordinate. Ist dagegen eine Masse grösser, so rückt ihr der Schwerpunkt um so näher, je grösser sie ist. Die Gleichungen 56) reduciren sich daher, da wir die Massen als ein für allemal constant betrachten, auf $d^2 \xi / d t^2 = d^2 \eta / d t^2 = 0$. Der Schwerpunkt bewegt sich daher gleichförmig in einer Geraden mit der Geschwindigkeit, die er zu Anfang hatte fort, genau so wie ein materieller Punkt, auf den gar keine Kräfte wirken.

Es handelt sich nur noch darum, die relative Bewegung der beiden materiellen Punkte relativ gegen den Schwerpunkt zu finden. Wir wollen lieber die relative Bewegung der einen Masse m_1 gegen die andere m_2 aufsuchen. Durch diese ist uns dann die Richtung und Länge der Verbindungslinie der Massen zu jeder Zeit gegeben. Da wir auch die Lage des Schwerpunktes zu jeder Zeit kennen, und wissen in welchem Verhältnisse derselbe diese Verbindungslinie theilt, so können wir dann unmittelbar die Lage jeder der Massen zu jeder Zeit sofort finden.

Wir wollen ein zweites Coordinatensystem benutzen, dessen Axen immer denen des ersten parallel bleiben, aber sich parallel zu sich selbst so im Raume bewegen, dass ihr Coordinatenanfangspunkt immer mit der augenblicklichen Lage des materiellen Punktes m_2 zusammenfällt. Die Coordinaten der Masse m_1 zur Zeit t bezüglich dieses zweiten Coordinatensystems bezeichnen wir mit x, y ohne Index. Dann ist:

$$x = x_1 - x_2, \quad y = y_1 - y_2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dividirt man die erste Gleichung in der ersten Zeile der Gleichungen 55) durch m_1, subtrahirt davon die darunter stehende Gleichung, nachdem man letztere durch m_2 dividirt hat und setzt noch

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m \quad \text{oder} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

so erhält man:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = f(r) \frac{x}{r}.$$

Ebenso erhält man, wenn man in der ersten Zeile der Gleichungen 55) die zweite Gleichung durch m_1 dividirt und davon die durch m_2 dividirte, unmittelbar darunter stehende Gleichung subtrahirt:

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = f(r) \frac{y}{r}.$$

Diese und die vorhergehende Gleichung stimmen vollkommen mit den Gleichungen 32) überein. Die relative Bewegung des materiellen Punktes m_1 gegen den Punkt m_2, worunter wir nichts anderes verstehen, als die Art der Ver-

änderung der Coordinaten x, y des ersten materiellen Punktes bezüglich des zweiten Coordinatensystems, dessen Axen sich immer parallel bleiben und immer durch den zweiten materiellen Punkt gehen, geschieht also genau nach den Gesetzen, welche wir für die Centralbewegung um ein fixes Centrum kennen gelernt haben. Genauer gesprochen so, als ob der zweite materielle Punkt unveränderlich im Raume festgehalten würde und dieselbe Centrikraft $f(r)$ auf den ersten ausübte, der aber nicht die Masse m_1, sondern die mit m bezeichneten Massen haben müsste; als ob ferner der erste materielle Punkt zu Anfang genau diejenige Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung gehabt hätte, welche er in Wirklichkeit relativ gegen das zweite Coordinatensystem hatte, d. h. als ob seine Geschwindigkeitscomponenten in den Coordinatenrichtungen zu Anfang der Zeit gleich

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d(y_1 - y_2)}{dt}$$

gewesen wären. Da wir die Gesetze der Centralbewegung um ein fixes Centrum bereits kennen gelernt haben, so ersparen wir durch die angeführten Sätze für die Auflösung des in diesem Paragraphen gestellten Problems jede neue Rechnung. Diese Bewegung in der xy-Ebene (der Bahnebene) wird natürlich nicht gestört, wenn beide materielle Punkte dazu noch die gleiche Geschwindigkeit senkrecht zu dieser Ebene haben.

§ 26. Das Energieprincip.

Wir kehren nun zur Betrachtung beliebiger materieller Punkte zurück. Wir bezeichnen die Coordinaten irgend eines (des $h$ten) derselben zur Zeit t mit x_h, y_h, z_h, die gesammte Geschwindigkeit desselben mit c_h, die Componenten der gesammten Kraft, welche auf ihn wirkt, in den Coordinatenrichtungen mit X_h, Y_h, Z_h. Die allgemeinen Gleichungen 13) schreiben sich dann in der Form

$$58)\quad \begin{cases} m_h \dfrac{d^2 x_h}{dt^2} = X_h, \quad m_h \dfrac{d^2 y_h}{dt^2} = Y_h, \quad m_h \dfrac{d^2 z_h}{dt^2} = Z_h, \\ h = 1, \ 2 \ldots . n. \end{cases}$$

Letzterer Zusatz hat hier wie später immer die Bedeutung, dass die Gleichungen immer richtig sind, welchen zwischen 1 und n incl. liegenden ganzen Zahlenwerth man dem h auch ertheilen möge. Da

$$\frac{1}{2}\frac{d(c_h^2)}{dt} = \frac{dx_h}{dt}\frac{d^2x_h}{dt^2} + \frac{dy_h}{dt}\frac{d^2y_h}{dt^2} + \frac{dz_h}{dt}\frac{d^2z_h}{dt^2}$$

ist, so erhält man, indem man die erste der Gleichungen 58) mit dx_h/dt, die zweite mit dy_h/dt, die dritte mit dz_h/dt multiplicirt und dann alle für jeden zulässigen Werth von h so gebildeten Gleichungen addirt:

$$59)\qquad \frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{h=n}\left(X_h\frac{dx_h}{dt} + Y_h\frac{dy_h}{dt} + Z_h\frac{dz_h}{dt}\right).$$

Hierbei ist

$$60)\qquad T = \sum_{h=1}^{h=n}\tfrac{1}{2}m_h c_h^2$$

die gesammte lebendige Kraft aller n materiellen Punkte.

Die Integration liefert:

$$61)\qquad T_1 - T_0 = \int\sum_{h=1}^{h=n}(X_h\,dx_h + Y_h\,dy_h + Z_h\,dz_h).$$

Hierbei sind T_1 und T_0 die Werthe von T zu den beliebigen Zeiten t_1 und t_0; die Integration ist über die ganze Bewegung während der Zeit $t_1 - t_0$ zu erstrecken. Es ist also, wenn man wieder die Begriffe des § 16 einführt, der Zuwachs der gesammten lebendigen Kraft des Systems während einer beliebigen Zeit gleich der gesammten Arbeit, welche alle auf seine Punkte wirkenden Kräfte während dieser Zeit geleistet haben. Letztere ist positiv zu zählen, wenn der Weg in die Richtung der auf den betreffenden Punkt wirkenden Kraft fällt. Dies folgt übrigens schon, wenn man die Gleichung 20) für alle Punkte des Systems bildet und alle diese Gleichungen addirt.

Wir betrachten den besonderen Fall, dass die Grösse, welche auf der rechten Seite der Gleichung 61) unter dem Integralzeichen steht, das vollständige Differentiale einer eindeutigen Function $-V$ ist, welche blos die Coordinaten der n materiellen Punkte enthält. Man sagt dann, es existirt

eine Kraftfunction, welche die Zeit nicht explicit enthält, und nennt V die Kraftfunction. In diesem Falle ist:

$$62)\quad \begin{cases} X_h = -\dfrac{\partial V}{\partial x_h}, \quad Y_h = -\dfrac{\partial V}{\partial y_h}, \quad Z_h = -\dfrac{\partial V}{\partial z_h}, \\ h = 1, \; 2 \ldots . n, \end{cases}$$

d. h. die Kraft, welche auf irgend einen materiellen Punkt in irgend einer der Coordinatenrichtungen wirkt, ist die negative partielle Ableitung der Kraftfunction nach der betreffenden Coordinate. Die Ausführung der Integration auf der rechten Seite der Gleichungen 61) liefert dann:

$$T_1 - T_0 = -V_1 + V_0,$$

wobei V_1 und V_0 die Werthe der Kraftfunction zu den ganz beliebigen, schon oben mit t_1 und t_0 bezeichneten Zeiten sind. Die Summe der gesammten lebendigen Kraft und des Werthes der Kraftfunction bleibt also während der ganzen Bewegung constant. Da V eine eindeutige Function der Coordinaten sein soll, so muss es denselben Werth annehmen, so oft sämmtliche Punkte des Systems in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren, es muss also dann jedesmal die gesammte lebendige Kraft aller Punkte des Systems auch wieder denselben Werth annehmen. Nach § 8 existirt eine Kraftfunction immer, wenn die materiellen Punkte jeder fremden Einwirkung entzogen sind und sich blos unter dem Einflusse der zwischen ihnen wirkenden Centrikräfte bewegen. Es ist dann nach Gleichung 10)

$$V = -\sum\sum \varphi_{hk}(r_{hk}).$$

Ebenso muss eine Kraftfunction existiren, wenn noch ν beliebige andere materielle Punkte, von denen jedoch jeder eine unveränderliche feste Lage im Raume hat, Centrikräfte auf die n materiellen Punkte ausüben. Denn man kann ja dann die Gleichung auf das von den $n + \nu$ Punkten gebildete System anwenden, und darin die Coordinaten der ν Punkte constant, resp. ihre Massen unendlich gross setzen. Ist $F_{hk}(r_{hk})$ die Kraft, welche einer der ν Punkte auf einen der n Punkte in der Entfernung r_{hk} ausübt und

$$\int F_{hk}(r_{hk})\, dr_{hk} = \Phi_{hk}(r_{hk}),$$

so ist dann:

62a) $$V = -\sum\sum \varphi_{hk}(r_{hk}) - \sum_{h=1}^{h=\nu}\sum_{k=1}^{k=n} \Phi_{hk}(r_{hk}).$$

In allen diesen Fällen wird die Summe der lebendigen Kraft und Kraftfunction constant bleiben, also die gesammte lebendige Kraft der n Punkte jedesmal denselben Werth annehmen, sobald jeder derselben zur ursprünglichen Position im Raume zurückgekehrt ist. Daraus folgt aber noch keineswegs, dass auch jeder einzelne materielle Punkt wieder die ursprüngliche Geschwindigkeit haben muss. Speciell wenn es sich um ein System von Körpern handelt, die aus einer sehr grossen Zahl so dicht gedrängter materieller Punkte bestehen, dass man die materiellen Punkte einzeln nicht wahrnehmen kann, so ergiebt sich aus dem Bilde, welches wir uns gemacht haben, mit logischer Consequenz Folgendes: es können dann und werden im Allgemeinen relative Bewegungen der einzelnen materiellen Punkte gegeneinander entstehen, die wir offenbar so wenig als die einzelnen Punkte direct beobachten können. Es kann nun sein, dass diese verborgenen Bewegungen andere wahrnehmbare, quantitativ messbare Effecte haben, welche der lebendigen Kraft dieser unsichtbaren Bewegungen der materiellen Punkte gegeneinander mit Einschluss der hierbei durch Verschiebungen der Punkte geleisteten Arbeit der Molekularkräfte proportional, also mit entsprechendem Coefficienten multiplicirt gleich sind. Dann muss die Summe der lebendigen Kraft der sichtbaren Bewegung, der Kraftfunction der sichtbar zwischen den Körpern wirkenden Kräfte und der mit den entsprechenden Coefficienten multiplicirten Quantität aller jener anderen Effecte immer constant sein. Nennen wir daher jeden dieser Summanden eine Energie, so muss die Summe aller Energien constant sein. Dies ist das Energieprincip.

Man hat die Sache manchesmal so dargestellt, als ob das ganze mechanische Bild nur den Zweck hätte, dieses Princip zu erklären. Dann wäre freilich, sobald man das Princip selbst klar erkannt hat, das Bild überflüssig geworden. Es ist aber das Princip der Erhaltung der Energie nur ein

kleiner Bruchtheil alles dessen, was durch das Bild dargestellt wird und die Uebereinstimmung mit diesem grossen allgemeinen Naturprincipe kann also nur als eine einzelne, specielle, werthvolle Bestätigung unseres Bildes betrachtet werden. Erst wenn es gelungen wäre, ohne Zuziehung unseres Bildes einen Inbegriff von ebenso viel Thatsachen ebenso klar und übersichtlich wie durch das Bild darzustellen, könnte man sagen, das Bild sei überflüssig geworden.

Wenn die ν materiellen Punkte, welche auf das betrachtete System der n Punkte wirken, nicht ruhen, sondern eine bekannte (vorgeschriebene) Bewegung machen, so sind im zweiten Gliede des Ausdruckes für V (Gleichung 62a) die Coordinaten der ν Punkte als gegebene Functionen der Zeit t allein zu betrachten. Daher enthält V ausser den Coordinaten der n Punkte noch die Zeit explicit. Die Kraft, welche auf irgend einen der n Punkte in irgend einer der Coordinatenrichtungen wirkt, ist noch immer die negative partielle Ableitung des V nach der betreffenden Coordinate des betreffenden Punktes. Aber der totale Differentialquotient dV/dt des V nach der Zeit, d. h. die Limite, welcher der durch dt dividirte gesammte Zuwachs des V während der Zeit dt zueilt, besteht aus zwei Theilen: Demjenigen, welcher durch die gegebene Veränderung der ν Punkte entsteht, der also, wie man sagt, daher rührt, dass V die Zeit explicit enthält (wir wollen ihn mit $\partial V/\partial t$ bezeichnen) und dem, welcher daher rührt, dass die Coordinaten der n Punkte während der Zeit dt ihre respectiven Zuwächse $dx_1, dy_1, \ldots dz_n$ erfahren. Letzterer ist gleich:

$$\sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_h}\frac{dx_h}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y_h}\frac{dy_h}{dt}+\frac{\partial V}{\partial z_h}\frac{dz_h}{dt}\right).$$

Nach Gleichung 59) ist nur der letztere Ausdruck gleich $-dT/dt$, wenn mit T wie früher die gesammte lebendige Kraft der n Punkte bezeichnet wird. Man hat also in diesem Falle

$$-\frac{dT}{dt}=\frac{dV}{dt}-\frac{\partial V}{\partial t},$$

woraus natürlich nicht folgt, dass $V + T$ constant sein müsste. Es ist also jetzt die gesammte Energie des Systems der n Punkte nicht constant. Man sagt, das System der n Punkte empfängt von den ν Punkten und den ihre Bewegung unterhaltenden Kräften Energie oder giebt Energie an sie ab. Wenn die ν Punkte in Bewegung begriffen sind, so braucht also die Energie der n Punkte nicht constant zu sein.

Trotzdem sind Fälle möglich, wo die Kräfte $X_1, Y_1 \ldots Z_n$, welche auf die n Punkte wirken, als blosse Functionen dieser Coordinaten ausgedrückt werden können, z. B. wenn die Bewegung der ν Punkte eine cyklische ist, so dass an Stelle jedes dieser Punkte, sobald er seinen Platz verlässt, sogleich ein gleich beschaffener tritt und die Art und Weise dieser cyklischen Bewegung selbst von der Position der n Punkte abhängt oder überhaupt wenn die Bewegung der ν Punkte in gegebener Weise von der Lage der n Punkte abhängt. Dann kann aber $X_1\,dx_1 + Y_1\,dy_1 + \ldots Z_n\,dz_n$ auch das Differentiale einer mehrdeutigen Function sein, welche blos die Coordinaten der n Punkte enthält, oder es kann gar kein vollständiges Differentiale sein.

Die Kräfte, welche auf einen Magnetpol wirken, bieten ein Beispiel des ersten Falles, wenn sich im Felde constante lineare, in sich geschlossene Ströme befinden, ein Beispiel des zweiten Falles, wenn sich der Magnetpol im Innern eines überall von elektrischen Stromfäden durchsetzten körperlichen Leiters befindet. In beiden Fällen sind Bewegungen der n Punkte möglich, wobei dieselben periodisch wieder in die Anfangslage zurückkehren, aber ihre Gesammtenergie auf Kosten der Energie der von aussen auf sie wirkenden Körper fortwährend wächst.

Noch complicirtere Fälle treten natürlich auf, wenn die Bewegung der ν Punkte auch eine Function der Geschwindigkeitscomponenten der n Punkte oder noch anderer Bestimmungsstücke ihrer Bewegung ist, so dass auch die auf die n Punkte wirkenden Kräfte Functionen dieser Grösse werden, in dem Sinne, wie wir schon in § 18 von Kräften sprachen, die Functionen der Geschwindigkeit sind, worauf ich nicht weiter eingehen will.

§ 27. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Wir kehren wieder zum allgemeinsten Falle zurück, dass beliebige n Punkte ihrer Wechselwirkung und der Einwirkung ν fremder Punkte unterworfen sind. Der $h$te der n Punkte habe die Masse m_h und zur Zeit t die Coordinaten x_h, y_h, z_h. Die Resultirende aller von den ν Punkten auf ihn zur Zeit t ausgeübten Kräfte sei $\mathfrak{P}_h$ und ihre Componenten in den drei Coordinatenrichtungen seien $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$. Alle diese Kräfte, welche von den ν Punkten auf die n Punkte ausgeübt werden, bezeichnen wir als die Kräfte, welche auf das System unserer n Punkte von aussen wirken, d. h. welche von materiellen Punkten ausgehen, die dem Systeme nicht angehören. Im Gegensatze hierzu nennen wir die Centrikräfte, welche zwischen je zwei Punkten des Systems wirken, die inneren Kräfte des Systems. $f_{hk}(r_{hk})$ sei wie früher die zwischen dem $h$ten und $k$ten Punkte des Systems wirkende innere Kraft. Die Gleichungen 10) resp. 13) und 58) verwandeln sich bei Einführung dieser neuen Bezeichnung in

$$63) \qquad m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = \sum_{k=2}^{k=n} f_{1k}(r_{1k}) \frac{x_1 - x_k}{r_{1k}} + \mathfrak{X}_1$$

mit zwei analogen Gleichungen für die y- und z-Axe und $3n-3$ analogen Gleichungen für die übrigen materiellen Punkte.

Addiren wir von diesen Gleichungen alle, welche sich auf die x-Coordinate beziehen, so tilgen sich alle Glieder, welche die Functionen f enthalten und es folgt

$$64) \qquad \frac{d^2}{d t^2} \sum_{h=1}^{h=n} m_h x_h = \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{X}_h.$$

Analoge Gleichungen erhalten wir natürlich für die y- und z-Axe. Wir wollen nun mit S_2 den Schwerpunkt des von den beiden Massen m_1 und m_2 gebildeten Systemes und mit ξ_2 dessen Abscisse bezeichnen. Dann ist vermöge der Gleichung 57)

$$\xi_2 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Wir denken uns ferner im Punkte S_2 eine Masse befindlich, welche gleich $m_1 + m_2$, also gleich der Summe der

Massen ist, deren Schwerpunkt S_2 ist und bezeichnen mit S_3 den Schwerpunkt des von dieser in S_2 fingirten Masse und von der Masse m_3 gebildeten Systemes und mit ξ_3 die Abscisse von S_3. Dann ist wieder nach Gleichung 57)

$$\xi_3 = \frac{(m_1 + m_2)\,\xi_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Wir nennen dann S_3 auch den Schwerpunkt der drei Massen m_1, m_2, m_3. Ebenso wollen wir als den Schwerpunkt S_4 der vier Massen m_1, m_2, m_3 und m_4 denjenigen Punkt bezeichnen, welchen wir erhalten, wenn wir den Schwerpunkt des Systems suchen, welches von der Masse m_4 und der im Punkte S_3 gedachten Masse $m_1 + m_2 + m_3$ gebildet wird. Für seine Abscisse folgt wie früher der Werth:

$$\xi_4 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, was wir die synthetische Definition des Schwerpunktes nennen wollen, so erhalten wir für die Coordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunktes aller n Massen die Werthe:

$$65)\quad \xi = \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{h=n} m_h x_h, \quad \eta = \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{h=n} m_h y_h, \quad \zeta = \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{h=n} m_h z_h,$$

wobei $M = \sum_{h=1}^{h=n} m_h$ die Summe aller Massen des Systemes ist, welche wir auch als die Gesammtmasse desselben bezeichnen wollen. Die in diesen Gleichungen enthaltene Definition des Schwerpunktes nennen wir dessen analytische Bestimmung. Sie zeigt unmittelbar, dass man bei der synthetischen Definition jedesmal denselben Punkt als Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte erhält, in welcher Reihenfolge man immer die verschiedenen Massen des Systems nehmen mag. Führen wir die Grössen ξ, η, ζ ein, so reducirt sich die Gleichung 64), sowie die beiden ihr entsprechenden, für die beiden anderen Coordinatenrichtungen geltenden auf

$$66)\quad M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{X}_h, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{Y}_h, \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{Z}_h.$$

Genau dieselben Gleichungen würden wir für die Bewegung eines materiellen Punktes erhalten, der die Masse M hätte und auf welchen in jedem Augenblicke die Resultirende aller Kräfte wirken würde, welche von aussen auf jeden der n materiellen Punkte wirken. Von den inneren Kräften, also den zwischen den Punkten des Systems wirkenden Centrikräften, ist dabei ganz abzusehen. Wir können daher sagen: der Schwerpunkt bewegt sich gerade so, wie ein einzelner materieller Punkt, dessen Masse gleich ist der Summe der Massen aller materiellen Punkte des Systems und auf den in jedem Augenblicke eine Kraft wirkt, welche man findet, indem man den Angriffspunkt jeder Kraft, welche auf irgend einen der materiellen Punkte wirkt, ohne Aenderung ihrer Grösse und Richtung nach jenem Punkte versetzt und dann die Resultirende aller dieser Kräfte sucht. Die Componente dieser Kraft nach jeder der Coordinatenrichtungen muss daher die Summe der Componenten aller äusseren Kräfte in der betreffenden Coordinatenrichtung sein, welche auf alle materiellen Punkte des Systems wirken. Natürlich muss dieser einzige materielle Punkt auch zu Anfang der Zeit gleiche Lage haben wie der Schwerpunkt des Systems und seine Anfangsgeschwindigkeit muss gleiche Grösse und Richtung haben.[1])

Bewegt sich speciell das System der n materiellen Punkte blos unter dem Einflusse der zwischen je zwei derselben wirkenden Centrikräfte, so sind keine äusseren Kräfte vor-

---

[1]) Wegen der grossen Entfernung zwischen Erde und Sonne ist die Kraft, welche die Sonne nach dem Newton'schen Gesetze auf irgend einen Punkt der Erde ausübt, nahezu dem Quadrate der Entfernung des Erdschwerpunktes vom Sonnenschwerpunkte verkehrt proportional und gegen den letzteren gerichtet. Wenn also nur Erde und Sonne aufeinander wirken würden, so würden sich ihre Schwerpunkte wie materielle mit der Masse des betreffenden Himmelskörpers behaftete Punkte bewegen, die sich mit einer dem Quadrate ihrer Entfernung verkehrt proportionalen Kraft anziehen, also ganz nach den in §§ 21 und 25 erläuterten Gesetzen, wodurch deren Anwendung auf praktische Fälle klar wird. Dies gilt übrigens, wenn man Erde und Sonne als starre Kugeln betrachtet, auch ohne Vernachlässigung, wie wir in der Potentialtheorie sehen werden.

handen und der Schwerpunkt ruht für alle Zeiten, wenn er zu Anfang der Zeit ruhte. Sonst bewegt er sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit in einer Geraden. Die inneren Kräfte, welche ja aus den Gleichungen 64) vollkommen herausgefallen sind, afficiren also die Bewegung des Schwerpunktes gar nicht.

Wenn eine geladene Kanone, welche frei von jeder Einwirkung anderer Körper im Raume schweben würde, anfangs ruhte und plötzlich in Folge der Einwirkung innerer Kräfte losginge, würde zwar die Kugel in heftige Bewegung in einer bestimmten Richtung gerathen, der Körper der Kanone aber würde genau mit einer solchen Geschwindigkeit sich in entgegengesetzter Richtung zu bewegen anfangen, dass der Schwerpunkt des von der Kugel und Kanone gebildeten Systems nach wie vor ruhen würde. Dasselbe gilt von jedem Körper, dessen Theile blos durch innere Kräfte in relative Bewegung gegeneinander kommen.

§ 28. Masse und Gewicht des Gramms. Dyn. Schwerpunktsberechnung.

Wir kommen jetzt wenigstens in einer Hinsicht in Contact mit der Wirklichkeit. Wir sahen, dass die Masse eines von allen materiellen Punkten ganz willkürlich gewählt werden kann. Statt dessen können wir, da wir einzelne materielle Punkte nicht wahrnehmen, jetzt die Gesammtmasse irgend eines bestimmten Körpers willkürlich wählen. Wir wollen z. B. die Summe der Massen aller materiellen Punkte, die in einem Cubikcentimeter reinen destillirten Wassers bei dem dem Normalbarometerstande entsprechenden Drucke und der Temperatur des Dichtemaximums vorhanden sind, mit 1 bezeichnen.

Eine theoretische Möglichkeit, die Masse irgend eines anderen Körpers zu bestimmen, ergiebt sich dann wie folgt. Die Resultirende aller Kräfte, welche die materiellen Punkte irgend eines Körpers A auf die irgend eines anderen Körpers B ausüben, muss, wenn man alle in demselben Punkte angreifend denkt, gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sein der Resultirenden der Kräfte, welche umgekehrt die mate-

riellen Punkte des Körpers B auf die des Körpers A ausüben, da dies für jede einzelne dieser Kräfte gilt. Die Massen zweier in Wechselwirkung befindlicher Körper verhalten sich daher umgekehrt wie die beobachtbaren Beschleunigungen, welche ihre Schwerpunkte durch diese Wechselwirkung erfahren, also z. B. auch umgekehrt wie die gesammten Geschwindigkeitsänderungen, welche sie beim Stosse aufeinander erhalten.

Als Krafteinheit haben wir, wenn zu den Formeln 9), 13) etc. kein constanter Factor dazutreten soll, diejenige Kraft zu bezeichnen, welche dem Schwerpunkte eines Körpers von der Masse 1 in der Zeiteinheit die Beschleunigung 1 ertheilt, wobei wir Secunde und Centimeter als Zeit- und Längeneinheit wählen. Wir wollen diese Kraft Dyn nennen. Wenn wir z. B. an einem ϱ cm langen Faden einen kleinen Körper, dessen Masse gleich μ Gramm, also durch Stoss oder sonstige Wechselwirkungsversuche μ mal so gross, als die oben definirte Wassermasse gefunden wurde, so im Kreise schwingen, dass er in der Secunde einen Weg von γ Centimetern zurücklegt, so ersehen wir aus Formel 15), dass der Faden mit einer Kraft von $\mu\gamma^2/\varrho$ Dynen gespannt wird.

Schon das am Schlusse des § 14 Angeführte macht es wahrscheinlich, dass an einer bestimmten Stelle der Erde durch die Wirkung der Schwere allein alle Punkte aller Körper dieselbe Beschleunigung g (in unseren Breiten am Meeresniveau etwa 981 cm in der Secunde) erhalten. Alle Consequenzen, die man aus dieser Annahme ziehen kann, haben sich so vollständig bestätigt (vergl. Schluss des § 51), dass wir dieselbe als wohlbegründete Erfahrungsthatsache bezeichnen können. Die Intensität der Kraft, welche die Schwere auf einen beliebigen Körper von der Masse m ausübt (das Gewicht dieses Körpers), ist also nach Formel 14)

$$P = mg.$$

Das Gewicht eines Körpers von der Masse eines Gramms ertheilt daher in unseren Gegenden diesem eine etwa 981 mal grössere Beschleunigung, als die Kraft eines Dyns. Dieses

Gewicht, welches man auch das Gewicht eines Gramms (nicht zu verwechseln mit der Masse eines Gramms) nennt, ist also etwa gleich 981 Dynen. Ein Dyn ist der 981. Theil des Gewichts eines Gramms, rund das Gewicht eines Milligramms.

Das Verhältniss der Massen zweier Körper braucht man daher nicht durch Stossversuche oder sonstige Versuche der Wechselwirkung derselben zu bestimmen, sondern dieses Verhältniss ist gleich dem Verhältnisse ihrer Gewichte an derselben Stelle des Erdkörpers, da daselbst g für alle Körper denselben Werth hat. Letzteres Verhältniss aber kann ebenso bequem als genau durch die Waage bestimmt werden, deren Theorie wir freilich erst etwas später kennen lernen werden. (Vergl. § 56.)

Am Aequator erhält jeder Körper durch die Schwere wieder die gleiche Beschleunigung, wie jeder andere. Diese ist aber etwas kleiner als die in unseren Breiten, wogegen sie in der Nähe des Poles etwas grösser ist. Am Aequator ist daher das Gewicht eines und desselben Körpers etwas kleiner, in der Nähe des Poles etwas grösser als bei uns. Es würde auch dieselbe elastische Feder bei gleicher Temperatur durch Anhängung desselben Körpers am Pole etwas mehr, am Aequator etwas weniger gedehnt, als bei uns. Die Masse eines und desselben Körpers aber bleibt überall genau gleich. Bei der Masse eines Cubikcentimeter Wassers liegt dies einfach in unserer Definition der Masse 1. Die Constanz des Massenverhältnisses zweier Körper aber folgt aus der Uebereinstimmung unserer Grundannahme 6 mit der Erfahrung.

Um anzuzeigen, in welcher Weise sich die eine Grösse ausdrückende Zahl mit den gewählten Einheiten ändert, schreiben wir jeder Grösse gewisse Dimensionen zu. Wir sagen, jede Strecke hat die Dimension einer Länge $[l]$, d. h. sie wird durch eine $l$fache Zahl dargestellt, wenn wir die Längeneinheit l mal kleiner wählen, eine Fläche hat die Dimension $[l^2]$, ein Volum $[l^3]$, weil im gleichen Falle die sie darstellenden Zahlen l^2, resp. l^3 mal grösser werden. Eine Kraft hat die Dimension $[m l t^{-2}]$, weil sie durch eine

$m l t^{-2}$ mal so grosse Zahl dargestellt wird, wenn wir die Masseneinheit m mal, die Längeneinheit l mal, die Zeiteinheit t mal kleiner wählen. Diese Dimensionen sind unmittelbar aus der definirenden Formel $X = m\, d^2 x / d t^2$ ersichtlich, d und d^2 haben keine Dimensionen, da sie nur Zuwächse ausdrücken.

Ein Vector als eine Länge kann einer Kraft oder einer Geschwindigkeit so wenig gleich sein, wie eine Anzahl Aepfel einer Zahl Birnen. Es kann nur die Länge des ersten durch dieselbe Zahl, wie die Intensität der zweiten ausgedrückt werden. Man strebt auch dies, also dass ein Dyn gerade durch einen Pfeil von der Länge eines Centimeters dargestellt wird, in den seltensten Fällen an. Man würde also besser sagen, dass die Intensitäten aller Kräfte gleich den mit demselben Reductionsfactor Γ multiplicirten Längen der Pfeile sind. Nur weil man sich auch so zu verstehen glaubt, schweigt man von diesem Reductionsfactor, der immer hinzuzudenken ist, wenn man eine Gleichung wie P(Kraft)$= A B$(Länge) schreibt.

Da wir nur ein richtiges Bild der Körper erhalten, wenn wir uns jeden Körper aus sehr vielen, nicht einzeln aufzählbaren materiellen Punkten bestehend denken, so könnte die in den Formeln 65) angezeigte Summirung nicht wirklich ausgeführt werden, wenn es nicht möglich wäre, in allen Fällen dadurch gute Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu erzielen, dass man sich in der Anordnung der materiellen Punkte gewisse Regelmässigkeiten denkt. Die höchste Regelmässigkeit ist die, dass alle materiellen Punkte gleich beschaffen und gleichmässig im ganzen Volumen des Körpers vertheilt sind. Ihre Voraussetzung liefert oft gute Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Dann verhält sich die in irgend einem Volumtheile des Körpers enthaltene Masse m zur Gesammtmasse M des Körpers wie das Volumen ω dieses Volumtheiles zum gesammten Volumen Ω des Körpers. Es ist also $m = \varrho\, \omega$, wobei $\varrho = M / \Omega$ die auf die Volumeinheit entfallende Masse (die Dichte des Körpers) ist. Wenn die Anordnung der Massentheilchen nicht in dieser Weise regelmässig ist, so machen wir die freilich in keiner anderen

Weise als durch die wenigstens angenäherte Uebereinstimmung der aus ihr folgenden Bilder mit der Erfahrung beweisbare Annahme, dass diese Regelmässigkeit wenigstens in in der unmittelbaren Umgebung eines jeden Punktes des Körpers vorhanden ist, d. h. dass der Quotient des Volumens do jedes Volumelementes des Körpers in die gesammte darin enthaltene Masse dm mit abnehmender Grösse des do stets gegen eine feste endliche Grenze ϱ convergirt, deren Werth sich continuirlich von Punkt zu Punkt im Körper ändern kann, so dass man mit Vernachlässigung von unendlich Kleinem höherer Ordnung hat

$$dm = \varrho\, do.$$

Die Summen der Formeln 65) verwandeln sich dann in Integrale, die über das gesammte Volumen des Körpers zu erstrecken sind, und es wird:

67) $$\left\{\begin{aligned} M &= \int dm = \int \varrho\, do, \quad \xi = \frac{1}{M}\int x \varrho\, do,\\ \eta &= \frac{1}{M}\int y \varrho\, do, \quad \zeta = \frac{1}{M}\int z \varrho\, do. \end{aligned}\right.$$

Der Fall eines dünnen Bleches oder eines geraden oder krummen Drahtes veranlasst uns zur Fiction einer ebenen oder krummen Fläche und einer geraden oder krummen Linie, welche continuirlich mit materiellen Punkten besetzt sind. Für die Fläche sei df ein Element derselben und $\varphi\, df$ bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung die darauf befindliche Masse. Für die Linie sei ds ein Längenelement und $\sigma\, ds$ die Masse darauf, dann ist im ersten Falle

68) $$\left\{\begin{aligned} M = \int \varphi\, df, \quad \xi = \frac{1}{M}\int x \varphi\, df, \quad \eta = \frac{1}{M}\int y \varphi\, df,\\ \zeta = \frac{1}{M}\int z \varphi\, df, \end{aligned}\right.$$

und im zweiten

69) $$\left\{\begin{aligned} M = \int \sigma\, ds, \quad \xi = \frac{1}{M}\int x \sigma\, ds, \quad \eta = \frac{1}{M}\int y \sigma\, ds,\\ \zeta = \frac{1}{M}\int z \sigma\, ds. \end{aligned}\right.$$

ϱ heisst die räumliche, φ die Flächendichte, σ die lineare Dichte der Massenvertheilung. Falls die Massen gleichförmig vertheilt sind, sind es natürlich Constanten, die vor die Integralzeichen kommen können.

§ 29. Moment einer Kraft. Drehungssinn.

Wir schreiben nun die der Gleichung 63) analoge für die y-Axe hin und multipliciren sie mit x_1, ferner multipliciren wir die Gleichung 63) selbst mit $-y_1$ und addiren schliesslich die beiden so gebildeten Gleichungen; es ergiebt sich:

$$69\,a)\quad \begin{cases} m_1\left(x_1 \dfrac{d^2 y_1}{d t^2} - y_1 \dfrac{d^2 x_1}{d t^2}\right) = \\ \quad = x_1 \mathfrak{Y}_1 - y_1 \mathfrak{X}_1 + \sum\limits_{k=2}^{k=n} f_{1k}(r_{1k}) \dfrac{x_k y_1 - x_1 y_k}{r_{1k}}. \end{cases}$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann in der Form geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\left(x_1 \frac{d y_1}{d t} - y_1 \frac{d x_1}{d t}\right)\right].$$

Bildet man die der Gleichung 69 a) analogen Gleichungen für alle übrigen der n materiellen Punkte unseres Systems und addirt alle diese Gleichungen, so tilgen sich die Glieder, welche die verschiedenen Functionen f enthalten, vollständig und man erhält:

$$70)\quad \frac{d}{dt} \sum_{h=1}^{h=n} m_h \left(x_h \frac{d y_h}{d t} - y_h \frac{d x_h}{d t}\right) = \sum_{h=1}^{h=n} (x_h \mathfrak{Y}_h - y_h \mathfrak{X}_h).$$

Es sei nun irgend eine gerichtete Gerade G im Raume gegeben. $\mathfrak{P}_h$ sei eine beliebige Kraft, A ihr Angriffspunkt, dessen Coordinaten wie in Formel 70) mit x_h, y_h, z_h bezeichnet werden sollen, AB der Pfeil, der diese Kraft in Grösse und Richtung darstellt, wobei wir, wie allgemein üblich, den Reductionsfactor weglassen, obwohl correcter $\mathfrak{P}_h$ gleich Γmal AB zu setzen wäre.

Wir definiren nun das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_h$ bezüglich der Geraden G als das Product

71) $$\pm pK$$

der zur Geraden senkrechten Componente K dieser Kraft in den Abstand p der Kraftrichtung von der Geraden und zwar mit positiven oder negativen Zeichen genommen, je nachdem die Drehungsrichtung der Kraft um die Gerade gegen diese dieselbe oder die entgegengesetzte Lage hat, wie gegen die positive z-Axe die Drehung von der positiven x-Axe auf kürzestem Wege zur positiven y-Axe. Den Sinn der letzteren Angabe kann man folgendermaassen näher erläutern. Eine von der Geraden G begrenzte Halbebene gehe zuerst durch den Anfangspunkt A des Pfeiles AB, der die Kraft $\mathfrak{P}_h$ darstellt und werde dann auf kürzestem Wege so gedreht, dass sie noch immer von der Geraden G begrenzt durch den Endpunkt B desselben Pfeiles geht. Wenn diese Drehung für ein Auge, das von dorther blickt, wohin die Gerade G gerichtet ist, im selben Sinne erfolgt wie die Drehung, welche die positive x-Axe auf kürzestem Wege in die positive y-Axe überführt für ein Auge, das von dorther blickt, wohin die positive z-Axe zeigt, so haben wir das positive Zeichen zu wählen. Wir nennen diesen Drehungssinn immer den positiven um jene gerichtete Gerade. Gemäss dieser Uebereinkunft ist also durch den Sinn, in dem eine Axe gezogen wird, zugleich der positive Drehungssinn um dieselbe mitbestimmt.

Wäre dann A ein Punkt eines starren, um die Axe G drehbaren Körpers, so würde die Kraft $\mathfrak{P}_h$ diesen Körper im positiven Sinne um die Axe G zu drehen suchen. Wir sagen kurz, die Kraft $\mathfrak{P}_h$ wirkt im positiven Sinne drehend um die gerichtete Axe G.

Im entgegengesetzten Falle, wenn die Kraft im nega-Sinne um die Axe G zu drehen sucht, ist in Formel 71) das negative Zeichen zu wählen. Diese Formel zeigt, dass das Moment die Dimension Kraft $\times$ Länge hat. Wir können es auch so construiren.

Wir wählen auf der Geraden G einen beliebigen Punkt C

und legen durch denselben eine Ebene E senkrecht zur Geraden. A' und B' seien die Projectionen der Endpunkte A und B des die Kraft $\mathfrak{P}_h$ darstellenden Pfeiles auf diese Ebene. Dann stellt also der Pfeil $A'B'$ die Componente K der Kraft $\mathfrak{P}_h$ senkrecht zur Geraden G dar. Das Product dieser Componente in den senkrechten Abstand der Kraftrichtung von der Geraden ist also der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $CA'B'$, da wir die Länge des Pfeiles AB einfach gleich der Intensität der Kraft $\mathfrak{P}_h$ gesetzt haben. Dieser der früher gegebenen Regel entsprechend positiv oder negativ zu nehmende doppelte Flächeninhalt

72) $$\pm 2\, CA'B'$$

ist also nach unserer Definition gleich dem Momente der Kraft $\mathfrak{P}_h$ bezüglich der Geraden G.

Wir können auch so verfahren: Wir errichten auf der Ebene des Dreiecks CAB, dessen Flächeninhalt wir ebenfalls mit CAB bezeichnen, im Punkte C eine Normale N in dem Sinne, dass die Kraft $\mathfrak{P}_h$ im positiven Sinne um N drehend wirkt, dann ist:

$$CA'B' = \pm\, CAB \cos(N, G),$$

wo immer dasselbe Zeichen wie in den Ausdrücken 71) oder 72) gilt. Es kann also das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_h$ bezüglich der Axe G auch definirt werden als die Grösse

73) $$2\, CAB \cos(N, G),$$

wobei die beiden Vorzeichen ausgefallen sind. Das Vorzeichen dieses Ausdruckes ist also dafür ausschlaggebend, in welchem Sinne die Kraft $\mathfrak{P}_h$ um die Axe drehend wirkt. Ebenso ist, wie wir später sehen werden, der Zahlenwerth dieser Grösse ausschlaggebend für die Intensität, mit welcher jene Kraft einen starren Körper um die Axe G zu drehen sucht. Dies ist der Grund, weshalb diese Grösse das Moment oder auch das Drehmoment der Kraft bezüglich jener Axe heisst.

Wir wollen nun gemäss der zweiten Definition das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_h$, deren Angriffspunkt, wie dies in Formel 70) vorausgesetzt ist, die Coordinaten x_h, y_h, z_h haben

soll, bezüglich der z-Axe als Drehungsaxe suchen, welche natürlich von den negativen z gegen die positiven gerichtet zu denken ist. Als Punkt C können wir dann den Coordinatenursprung wählen, so dass die xy-Ebene an Stelle der Ebene E tritt. Da x_h, y_h, z_h die Coordinaten des Angriffspunktes A der Kraft sind, so sind x_h, y_h, 0 die des Punktes A'. Da ferner $A'B'$ die Projection der Kraft $\mathfrak{P}_h$ auf die xy-Ebene ist, so sind

$$x_h + \mathfrak{X}_h, \quad y_h + \mathfrak{Y}_h, \quad 0$$

die Coordinaten des Punktes B'. Nach dem bekannten Ausdrucke für den Flächeninhalt eines Dreiecks durch die Coordinaten seiner Eckpunkte ist also in diesem Falle der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $CA'B'$ gleich

$$\pm (x_h \mathfrak{Y}_h - y_h \mathfrak{X}_h)$$

und man sieht leicht, dass wieder wie in Formel 71) und 72) das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Gerade OA' durch eine positive oder negative Drehung um die z-Axe auf kürzestem Wege in die Lage OB' gelangt. Es ist also in jedem Falle $x_h \mathfrak{Y}_h - y_h \mathfrak{X}_h$ das, was wir als das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_h$ bezüglich der z-Axe definirt haben. Hätten wir einen Reductionsfactor Γ zur Reduction der Längen der Pfeile auf die Intensitäten der Kräfte eingeführt, so wäre dieser jetzt, da wir die Pfeile wieder durch Kräfte ausdrückten, wieder weggefallen. Die rechte Seite der Gleichung 70) ist also die Summe der Momente aller auf das System der n materiellen Punkte von aussen wirkenden Kräfte bezüglich der z-Axe.

§ 30. Französisches und englisches Coordinatensystem.

Es ist dabei vollkommen gleichgültig, in welchem Sinne für ein Auge, welches aus jener Richtung auf den Coordinatenursprung blickt, nach welcher die positive z-Axe zeigt, die Drehung von der positiven x- gegen die positive y-Axe auf kürzestem Wege geschieht, wenn nur die Drehung um jede gerichtete Axe im selben Sinne als positiv aufgefasst wird. Es erfolgt dann immer auch im positiven Sinne um die positive x-Axe die Drehung von der positiven y- zu

der positiven z-Axe auf kürzestem Wege und um die positive y-Axe die Drehung von der positiven z- gegen die positive x-Axe auf kürzestem Wege, wie schon die cyklische Vertauschung lehrt.

Wenn dieser Sinn derjenige ist, in welchem sich der Zeiger einer Uhr dreht, deren Zifferblatt dorthin gewendet ist, wohin die Axe gerichtet ist, so nennt man das Coordinatensystem ein französisches, im entgegengesetzten Falle ein englisches. Ersteres kann auch so definirt werden: Eine Person, welche ihren Kopf nach der positiven z-Richtung, ihr Gesicht nach der positiven y-Richtung kehrt, hat die positive x-Richtung zur linken Hand, oder: wenn man auf der Schultafel die positive z-Richtung nach aufwärts, die positive y-Richtung gegen den Beschauer zieht, so ist die positive x-Richtung gegen die Rechte des Beschauers gewendet, oder: wenn in ein Brett, das der xy-Ebene parallel ist, eine Schraubenmutter eingeschnitten ist, so dreht sich darin eine in dem in Europa allgemein üblichen Sinne geschnittene Schraube, welche im Sinne der positiven z-Richtung fortschreitet so, wie man auf kürzestem Wege von der positiven y- zu der positiven x-Richtung gelangt, oder: wenn die xy-Ebene ein Ackerfeld, die z-Axe eine Holzstange ist, so schlingt sich eine nach aufwärts wachsende Hopfenranke so um die z-Axe, wie man von der positiven x-Richtung auf kürzestem Wege zur positiven y-Richtung gelangt, eine Weinranke im entgegengesetzten Sinne. Natürlich verhält sich ein englisches Coordinatensystem in allen diesen Fällen gerade umgekehrt. Bringt man bei beiden Coordinatensystemen die positiven x- und y-Axen zur Deckung, so fällt die positive z-Axe des einen genau in die Richtung der negativen z-Axe des anderen. Beide Coordinatensysteme lassen sich daher, wenn man die positive und negative Coordinatenrichtung als verschieden betrachtet, nicht vollständig zur Deckung bringen, sondern verhalten sich zu einander wie Spiegelbilder, wie ein sonst gleicher rechter und linker Handschuh.

Eine Entscheidung für das eine oder andere System braucht man erst zu treffen, wenn man zur Darstellung von

Phänomenen übergeht, bei denen nicht beide Rotationsrichtungen gleich berechtigt sind, wo also physikalisch gegebene Rotationen, wie die Erddrehung, oder asymmetrische Naturkörper eine Rolle spielen, wie bei der Wechselwirkung von elektrischen Strömen und Magneten, der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch den Magnetismus etc. oder wenn man selbst eine räumliche Construction ausführt.

Das französische Coordinatensystem hat folgenden Vortheil. Will man bei Construction der Fläche $z = f(x, y)$ die x-Axe in die Tafel und die z-Axe vertical nach aufwärts legen, so schreiten die wachsenden x wie man schreibt, die wachsenden y nach dem Beschauer fort. Beim englischen Systeme muss man entweder die $+x$ wie die Orientalen schreiben, oder die $+y$ vom Beschauer weg, oder die $+z$ nach abwärts, während wir doch aufwärts bauen, fortschreiten lassen; oder man muss die y-Axe in die Tafel und die x-Axe gegen den Beschauer oder die y-Axe aufwärts und die z-Axe gegen den Beschauer ziehen, was alles unbequemer oder doch ungewohnter ist. Für den Physiker dagegen hat das englische System den Vorzug, dass der Strom der positiven Elektricität ein Solenoid in dem nach diesem Systeme positiven Sinne umkreist, wenn dessen Nordpol (das nach dem geographischen Norden zeigende, meist als positiv bezeichnete Ende) dorthin zeigt, wohin die Drehungsaxe weist.

Wir wollen im Folgenden in unseren Figuren das französische Coordinatensystem benutzen, unter einer positiven Drehung um eine gerichtete Axe also eine solche verstehen, welche einem Auge, das von dort herblickt, wohin die Axe gerichtet ist, im Sinne des Uhrzeigers zu geschehen scheint.

§ 31. Der Flächensatz.

Aehnliche Betrachtungen, wie wir sie in § 29 angestellt haben, lassen sich auch auf die linke Seite der Gleichung 70) anwenden. Sei wieder G eine beliebig gerichtete Gerade, C ein Punkt derselben und E die durch diesen Punkt zur Geraden senkrecht gelegte Ebene. Aber es sei jetzt A der Punkt des Raumes, wo sich zur Zeit t der materielle Punkt mit der Masse m_h befindet, dessen

Coordinaten, wie schon in Formel 70), ebenfalls mit x_h, y_h, z_h bezeichnet werden sollen. Ferner sei jetzt B der Punkt, wo sich die Masse m_h zur Zeit $t + dt$ befindet, so dass also, wie in Formel 70), die Coordinaten des Punktes B mit $x_h + dx_h$, $y_h + dy_h$, $z_h + dz_h$ zu bezeichnen sind. Endlich seien A' und B' die Projectionen von A und B auf die Ebene E, df_h und df_h' die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke CAB und $CA'B'$ und N die auf die Ebene des ersten Dreiecks im Punkte C nach derjenigen Seite gezogene Normale, dass die Drehung der Geraden CA in die Lage CB auf kürzestem Wege eine positive Drehung um die Normale ist; wir sagen kurz, dass die Bewegung von A nach B im positiven Sinne um die Normale N geschieht. Das Product aus der Masse m_h, dem Cosinus des Winkels (N, G) und der Limite, welcher sich der Quotient df_h/dt nähert, also die Grösse

$$m_h \cos(N, G)\, df_h/dt \tag{74}$$

bezeichnen wir dann als das Flächenmoment der Masse m_h bezüglich der Axe G. Dasselbe ist auch gleich

$$\pm\, m_h\, df_h'/dt, \tag{75}$$

wobei natürlich wieder das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Bewegung von A nach B im positiven oder negativen Sinne um die Axe G geschieht.

Im speciellen Falle, dass man unter G die positive z-Axe versteht, kann man an Stelle des Punktes C den Coordinatenursprung setzen, was in diesem Paragraphen nun immer geschehen soll. Dann sind die x- und y-Coordinaten der drei Punkte C, A', B' gleich 0, 0; x_h, y_h resp. $x_h + dx_h$, $y_h + dy_h$. Daher ist:

$$df' = \pm\,(x_h\, dy_h - y_h\, dx_h),$$

wobei das Zeichen genau dasselbe wie im Ausdrucke 75) ist. Daher ist der von uns eingeführten Definition des Flächenmomentes gemäss

$$m_h\left(x_h \frac{dy_h}{dt} - y_h \frac{dx_h}{dt}\right)$$

zur Zeit t das Flächenmoment der Masse m_h bezüglich der z-Axe.

Die Grösse, welche auf der linken Seite der Gleichung 70) nach t differentiirt erscheint, ist also die Summe W der Flächenmomente aller n materiellen Punkte des Systems bezüglich der z-Axe; wir wollen W kurz das gesammte Flächenmoment des Systems bezüglich der z-Axe nennen. Nach 74) ist:

$$W = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \cos(N,z) \frac{d f_h}{d t}.$$

$d f_h$ ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks, dessen eine Ecke die Lage des materiellen Punktes m_h zur Zeit t, dessen zweite Ecke die Lage desselben Punktes zur Zeit $t + dt$, dessen dritte der Coordinatenursprung ist. N ist die auf dieses Dreieck so gezogene Normale, dass um sie die Drehung von A nach B eine positive ist.

Ist U und V im gleichen Sinne das gesammte Flächenmoment unseres Systems bezüglich der x- resp. y-Axe, so ist ebenso:

$$U = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \left(y_h \frac{d z_h}{d t} - z_h \frac{d y_h}{d t} \right) = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \cos(N,x) \frac{d f_h}{d t},$$

$$V = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \left(z_h \frac{d x_h}{d t} - x_h \frac{d z_h}{d t} \right) = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \cos(N,y) \frac{d f_h}{d t}.$$

Das gesammte Flächenmoment des Systems bezüglich einer beliebigen, durch den Coordinatenursprung gezogenen gerichteten Geraden G aber ist:

$$76)\quad \begin{cases} \Phi = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \cos(G,N) \frac{d f_h}{d t} = \\ = U \cos(G,x) + V \cos(G,y) + W \cos(G,z). \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit Δ die positive Quadratwurzel aus $U^2 + V^2 + W^2$ und ziehen durch den Coordinatenursprung die gerichtete Gerade L so, dass

$$\cos(L,x) = U/\Delta, \quad \cos(L,y) = V/\Delta, \quad \cos(L,z) = W/\Delta$$

ist, wobei die betreffenden Winkel spitz oder stumpf sind, je nachdem U, V oder W positiv oder negativ sind, so ist

nach Formel 76) das gesammte Flächenmoment des Systems bezüglich der Axe L gleich $\varDelta$, bezüglich der beliebigen durch O gehenden Axe G gleich der Projection der in der Richtung von L aufgetragenen Geraden $\varDelta$ auf die Richtung G und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Projection auf die positive oder negative Seite der Geraden G fällt. Das gesammte Flächenmoment ist also bezüglich der Axe L grösser als bezüglich jeder anderen durch den Coordinatenursprung O gezogenen Axe (Axe des grössten Flächenmomentes bezüglich des Punktes O).

Bezüglich jeder durch O senkrecht zu L gezogenen Geraden aber ist das gesammte Flächenmoment Null.

Man beweist leicht, dass das gesammte Flächenmoment eines beliebigen Systems bezüglich einer beliebigen Axe gleich ist dem Momente bezüglich einer parallelen durch den Schwerpunkt des Systems gehenden Axe, vermehrt um das Flächenmoment, welches die gesammte Masse des Systems bezüglich der ersteren Axe hätte, wenn sie sich im Schwerpunkte des Systems befände und mit der Geschwindigkeit desselben in der Bewegungsrichtung desselben bewegte.

Ebenso leicht sieht man, dass sich ganz in analoger Weise aus der geometrischen Darstellung der Kräftemomente durch Dreiecksflächen analoge Sätze von den Momenten aller Kräfte, die von aussen auf ein beliebiges System wirken, beweisen lassen. Seien:

$$D = \sum_{h=1}^{h=n} (y_h \mathfrak{Z}_h - z_h \mathfrak{Y}_h), \quad E = \sum_{h=1}^{h=n} (z_h \mathfrak{X}_h - x_h \mathfrak{Z}_h),$$

$$F = \sum_{h=1}^{h=n} (x_h \mathfrak{Y}_h - y_h \mathfrak{X}_h)$$

die Momente bezüglich der Coordinatenaxen, so ist das Moment derselben Kräfte bezüglich einer beliebigen, durch den Coordinatenursprung O gezogenen gerichteten Geraden G

$$D \cos(G, x) + E \cos(G, y) + F \cos(G, z) = H \cos(G, H),$$

wobei H eine von O aus gezogene Gerade von der Länge $+\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}$ ist, welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus D/H, E/H, F/H sind. Das

Moment bezüglich der Axe, welche die Richtung der Geraden H hat, ist gleich H, bezüglich jeder durch O senkrecht zu H gezogenen Geraden Null, bezüglich jeder anderen durch O gezogenen Geraden liegt es zwischen $-H$ und $+H$. Endlich ist das Moment aller auf das System wirkenden Kräfte bezüglich irgend einer Axe gleich dem Momente bezüglich einer parallelen und gleichgerichteten Axe vermehrt um das Moment, welches alle darauf wirkenden Kräfte bezüglich der ersten Axe hätten, wenn sie ohne Aenderung ihrer Grösse und Richtung in einem Punkte der zweiten Axe angreifen würden. Das Gesammtmoment der inneren Kräfte eines Systems, d. h. der Centrikräfte zwischen je zwei Punkten ist natürlich bezüglich jeder Axe Null.

Wenn speciell von aussen keine Kräfte auf das System wirken, so sind auch die Momente der äusseren Kräfte gleich Null; es ist also $D = E = F = 0$ und aus Gleichung 70) und den analogen für die y- und z-Axe folgt, dass U, V und W drei Constanten sein müssen. Es hat also die durch einen beliebigen ruhenden oder geradlinig und gleichförmig bewegten Punkt P gezogene Axe L des Maximums des Flächenmomentes, sowie die auf der Axe senkrechte Ebene eine unveränderliche Richtung im Raume (unveränderliche Axe, unveränderliche Ebene) und das Flächenmoment bezüglich jeder solchen Axe ändert sich ebenfalls nicht mit der Zeit.

Wenn z. B. ein Körper ohne Einwirkung äusserer Kräfte frei im Raume sich befindet, anfangs alle seine Theile in Ruhe waren und dann blos durch innere Kräfte ein Theil desselben in drehende Bewegung kommt, so muss ein anderer Theil derart in eine entgegengesetzte Drehung gerathen, dass das gesammte Flächenmoment bezüglich einer beliebigen Axe gleich Null bleibt, da es ja anfangs gleich Null war. In dieser Beziehung hat der Flächensatz eine gewisse Verwandtschaft mit dem Schwerpunktssatze. Doch besteht der folgende wesentliche Unterschied. Bei diesem sind die Differentialquotienten, welche gleich Null sind (die linken Seiten der Gleichung 64) und der entsprechenden Gleichungen für die übrigen Coordinatenaxen), die vollständigen Differentialquotienten bestimmter Grössen, nämlich der Coordinaten des

Schwerpunktes. Die Grössen aber, welche gemäss des Flächenprincips bei Ermangelung äusserer Kräfte gleich Null werden (nämlich die linken Seiten der Gleichung 70) und der entsprechenden Gleichungen für die übrigen Coordinatenaxen), sind nicht die vollständigen Differentialquotienten von Functionen der Coordinaten nach der Zeit.

Ein Körper schwebe ohne Einwirkung äusserer Kräfte frei im Raume. Anfangs ruhe er. Später sollen seine Theile durch innere Kräfte in relative Bewegungen gerathen. Sobald dieselben zu zwei verschiedenen Zeiten t_0 und t_1 die gleiche relative Lage gegeneinander haben, muss nothwendig auch der Schwerpunkt des Körpers die gleiche absolute Lage im Raume haben, da er diese überhaupt nicht ändert. Aber der Körper kann sich während der Zeit $t_1 - t_0$ beliebig um den Schwerpunkt gedreht haben, wenn gewisse Theile desselben nicht auf dem gleichen Wege in ihre ursprüngliche Lage zurückgekehrt sind, auf welchem sie diese verliessen, sondern sich in geschlossenen Bahnen bewegt haben, die eine endliche Fläche umschliessen.

Eine frei im Raume schwebende, anfangs ruhende Katze kann sich beliebig um ihre Axe drehen, wenn sie ihre Pfoten in vom Körper weggestreckter Lage nach links bewegt, dann gegen den Körper zu einzieht, im eingezogenen Zustande nach rechts bewegt, dann wieder ausstreckt und dasselbe Spiel wiederholt. Dieselbe Katze kann aber in keiner Weise die Lage ihres Schwerpunktes ändern. So lange sehr viele Schiffe im Sinne der Axendrehung um die Erde herumfahren, wird der Tag verlängert. Die Axendrehung des als fest gedachten Erdkörpers nimmt zwar sofort wieder die alte Geschwindigkeit an, sobald die Schiffe still stehen, aber eine vom Erdmittelpunkte nach einer festen Bergspitze am Aequator gezogene Gerade ist durch das Manöver der Schiffe dauernd um eine bestimmte Constante in ihrer Winkeldrehung zurückgeblieben, also die astronomische Zeit ist zurückgeblieben.

IV. Das Princip der virtuellen Verschiebungen.

§ 32. Starre und einseitige Verbindungen.

Wir wollen wieder der Wirklichkeit um einen Schritt näher treten. In der Erfahrung sind uns zahlreiche Körper gegeben, welche die mannigfaltigsten Bewegungen im Raume machen, ohne dass sich dabei ihre Gestalt, also die relative Lage ihrer einzelnen Theile gegeneinander in bemerkbarer Weise verändert. Wir nennen solche Körper feste, und bilden uns das Ideal eines starren Körpers, d. h. eines Körpers, dessen Theile in ihrer relativen Lage niemals die mindeste Veränderung erfahren können.

Wenn wir uns also einen solchen Körper aus materiellen Punkten bestehend denken, so müssen die Coordinaten derselben während der ganzen Bewegung gewisse Gleichungen erfüllen, welche ausdrücken, dass die Entfernung je zweier dieser materiellen Punkte constant bleibt. Wir nennen diese Gleichungen die Bedingungen des Systems. Ihr Bestehen, sowie das sehr verschiedener anderer während der Bewegung materieller Punkte, können wir uns durch Specialisirung des bisherigen mechanischen Bildes gut darstellen.

Von der Bewegung starrer Körper erhalten wir folgendermaassen ein anschauliches Bild. Wir denken uns ein System von sehr vielen sehr dicht gedrängten materiellen Punkten. Diese materiellen Punkte sollen sich ganz nach den bisher aufgestellten Gesetzen bewegen. In einer bestimmten relativen Lage der materiellen Punkte (der Normallage), welche eben die Gestalt des festen Körpers bestimmt, soll die Resultirende aller inneren Kräfte, welche auf jeden derselben wirken, gleich Null sein. Sobald aber die Entfernung irgend zweier benachbarter materieller Punkte nur ein klein wenig grösser oder kleiner wird, sollen sofort enorm grosse innere Kräfte auftreten, welche sie wieder in die ursprüngliche Entfernung (die Normalentfernung) zurückzutreiben suchen.

Diese Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn wir folgende specielle Annahmen über die inneren Kräfte machen. Für

jeden materiellen Punkt soll es mindestens drei oder mehr andere, nicht mit ihm in einer Ebene liegende Punkte (wir wollen sie seine Nachbarpunkte nennen) von folgender Beschaffenheit geben: Die Kraft $f(r)$, welche zwischen ihm und einem Nachbarpunkte in der Entfernung r wirkt, soll gleich Null sein, sobald r gleich der Normalentfernung ist, aber einen sehr grossen positiven Werth annehmen, sobald r ein wenig kleiner, dagegen einen sehr grossen negativen Werth, sobald r ein wenig grösser als die Normalentfernung ist. Im ersteren Falle soll also sofort eine enorme Abstossung, im letzteren eine enorme Anziehung auftreten. Wir sagen dann kurz, die beiden materiellen Punkte sind starr verbunden, da die zwischen ihnen wirkende Centrikraft weder gestattet, dass ihre Entfernung erheblich grösser, noch auch kleiner als die Normalentfernung sei. Für alle übrigen materiellen Punkte, welche nicht das Verhalten derjenigen zeigen, die wir Nachbarpunkte nannten, soll die zwischen ihnen wirkende Kraft in der Normalentfernung und in nicht viel davon verschiedenen Entfernungen verschwinden.

Wenn ausser diesen inneren Kräften noch beliebige andere, von fremden Punkten ausgehende äussere Kräfte auf das Punktesystem wirken, so treten, sobald während der Bewegung die materiellen Punkte ihre relative Lage nur ein wenig ändern, sogleich enorme Kräfte auf, welche die ursprüngliche relative Lage wieder herzustellen suchen, das System wird also angenähert das Bild eines starren Körpers bieten, wenn wir die durch kleine Deformationen geweckten inneren Kräfte genügend gross gegenüber den äusseren denken. Allerdings nur angenähert; denn es werden bei Wirksamkeit äusserer Kräfte im Allgemeinen immer kleine Gestaltänderungen eintreten, ja in bestimmten Specialfällen, wo eine Dimension des von den Punkten erfüllten Raumes klein ist, z. B. wenn dieser die Gestalt einer Uhrfeder hat, werden auch grössere Deformationen möglich sein. Es weicht also unser Bild von dem Ideale des absolut starren Körpers ab; aber gerade in derselben Weise, in der auch die wirklichen festen Körper von diesem Ideale abweichen.

Ausser der starren Verbindung zweier materieller Punkte

ist noch eine andere Verbindungsart, welche wir die einseitige nennen wollen, von hoher Wichtigkeit. Wir haben bisher angenommen, dass die zwischen zwei materiellen Punkten wirksame Kraft weder eine bemerkbare Annäherung noch Entfernung gegenüber der Normaldistanz zulässt.

Es soll jetzt die Kraft entweder zwar für jede Entfernung, die nur ein wenig grösser ist, als die normale, einen enorm grossen negativen Werth annehmen, aber für die normale und jede kleinere Entfernung Null sein, oder zwar für jede Entfernung, die nur ein wenig kleiner als die normale ist, einen enorm grossen positiven Werth haben, aber wieder für die normale und jede grössere Entfernung Null sein. In ersterem Falle wird die zwischen den beiden materiellen Punkten wirksame Kraft zwar jede Entfernung über die normale Distanz verhindern, sich aber einer beliebigen Annäherung nicht in den Weg stellen, in letzterem Falle ist die Annäherung über eine gewisse Grenze unmöglich, aber einer beliebigen Entfernung steht nichts im Wege. Wir sagen in diesen beiden Fällen, dass die beiden materiellen Punkte einseitig verbunden sind.

Ein angenähertes Beispiel für den ersten Fall bieten uns zwei durch einen dünnen, nahezu unausdehnbaren Faden verbundene kleine Körper, ein Beispiel für den zweiten Fall zwei starre Kugeln, deren Mittelpunkte sich entfernen, aber in keinen kleineren Abstand gelangen können, als die Summe ihrer Radien.

§ 33. Verschiedene Formen der Bedingungen, denen Punktsysteme unterworfen sein können.

Man kann durch derartige Verbindungen Fälle darstellen, wo zwischen den Coordinaten der Punkte eines Systems Bedingungsgleichungen vorhanden sind, z. B. den Fall einer Masse, welche gezwungen ist, während ihrer Bewegung auf einer vorgeschriebenen Fläche oder Curve zu bleiben. Die Darstellung geschieht in diesem Falle in folgender Weise:

Es soll eine Kugel vom Radius a ausserordentlich dicht und gleichförmig mit starr verbundenen materiellen Punkten erfüllt sein, so dass sie sich angenähert wie eine starre mate-

rielle Kugel verhält. Ferner sollen zwei continuirliche Flächen, deren senkrechter Abstand immer und überall gleich (gleich $2b$) ist, unendlich dicht mit anderen materiellen Punkten besetzt sein, welche entweder durch entsprechende Kräfte unveränderlich im Raume festgehalten oder in vorgeschriebener Weise bewegt werden, jedoch so, dass der senkrechte Abstand der beiden Flächen immer und überall gleich $2b$ bleibt. Wir bezeichnen diese letzteren materiellen Punkte als die der Vorrichtung, welche die Bewegungsfreiheit beschränkt.

Die Kugel soll sich anfangs genau zwischen den beiden Flächen befinden. Die Kraft, welche irgend ein materieller Punkt einer der Flächen auf irgend einen materiellen Punkt der Oberfläche der Kugel ausübt, soll in der Entfernung $b - a$ und einer grösseren gleich Null, in einer ein wenig kleineren Entfernung aber schon gleich einer enorm grossen Abstossung sein. Andere Kräfte sollen zwischen den materiellen Punkten der Kugel und der Vorrichtung nicht wirken. Die Distanz zweier benachbarter materieller Punkte soll sowohl in der Kugel, als auch in den beiden Flächen sehr klein gegenüber $b - a$ sein. Wir haben dann den Fall nachgeahmt, dass sich eine vollkommen glatte starre Kugel zwischen zwei vollständig glatten festen Flächen bewegt. Der Schwerpunkt der Kugel, welcher mit ihrem Mittelpunkte zusammenfällt, muss dann, wenn noch beliebige äussere Kräfte auf ihn wirken, eine solche Bewegung machen, dass er fortwährend auf der zwischen beiden Flächen in der Mitte liegenden Fläche bleibt, welche unveränderlich oder mit der Zeit in gegebener Weise veränderlich ist, je nachdem diese Flächen es sind. Es wird also während der ganzen Bewegung zwischen seinen Coordinaten eine Gleichung bestehen, welche im letzteren Falle die Zeit explicit enthält. Will man die Bewegung eines einzigen materiellen Punktes darstellen, welcher gezwungen ist, auf einer Fläche zu bleiben, so kann man sich alle Punkte der Kugel bis auf den Mittelpunkt masselos denken oder die Kugel durch einen einzigen materiellen Punkt ersetzen, auf den sehr grosse abstossende Kräfte wirken, wenn seine Entfernung von irgend einem Punkte einer der Flächen ein wenig kleiner als b wird. Die

Entfernung zweier Nachbarpunkte auf je einer der Flächen muss verschwindend klein gegen b sein.

Bilden die materiellen Punkte der Vorrichtung eine Röhre von überall gleichem kreisförmigen Querschnitte, welche die Kugel oder den einen materiellen Punkt umschliesst, so erhalten wir eine Masse, die gezwungen ist, sich auf einer vorgeschriebenen Curve zu bewegen; dann bestehen also während der ganzen Bewegung zwischen ihren Coordinaten zwei Gleichungen.

Es versteht sich von selbst, dass man mittelst der gleichen Hülfsmittel sehr verschiedene Fälle realisiren kann, wo sich materielle Punkte so bewegen, dass zwischen ihren Coordinaten während der Bewegung irgend eine Zahl von Gleichungen besteht, welche die Zeit explicit enthalten oder auch von ihr unabhängig sein können.

Jede Bedingung des Systems, welche durch eine Gleichung

77) $$\varphi(t, x_1, y_1 \ldots z_n) = 0$$

zwischen den Coordinaten $x_1, y_1 \ldots z_n$ seiner materiellen Punkte darstellbar ist, welche die Zeit t explicit enthalten kann oder nicht, wollen wir eine holonome Bedingung nennen. Ein System, welches nur holonomen Bedingungen unterworfen ist, nennen wir ein holonomes System.

Durch starre Verbindungen materieller Punkte können auch Gleichungen dargestellt werden, welche ausser den Coordinaten noch deren Differentiale in einer Verbindung enthalten, die einen nicht integrabeln Differentialausdruck darstellt. Wenn wieder $x_1, y_1, \ldots z_n$ die Coordinaten der materiellen Punkte sind, so ist die einfachste Form dieser Gleichungen die folgende:

78) $$\tau\, dt + \xi_1\, dx_1 + \eta_1\, dy_1 + \ldots \zeta_n\, dz_n = 0,$$

wobei $\tau, \xi_1, \eta_1, \ldots \zeta_n$ beliebige Functionen von $t, x_1, y_1 \ldots z_n$ sind und die linke Seite keinen integrirenden Factor hat.[1]) Jede Bedingung, welche nur in dieser Weise darstellbar ist,

[1]) Noch allgemeinere Formen, wie

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = 5$$

wollen wir ausschliessen.

nennen wir eine nicht holonome und ein System, unter dessen Bedingungen sich auch nur eine nicht holonome befindet, nennen wir ein nicht holonomes.

Eine solche Gleichung würde sich ergeben, wenn sich eine starre Kugel, deren Oberfläche voll von ausserordentlich vielen äquidistanten, sehr feinen Spitzen wäre, zwischen einer glatten und einer mit zahlreichen Löchern versehenen Fläche so bewegen würde, dass die Spitzen stets in die Löcher eingreifen, wodurch mit beliebiger Annäherung die Bedingung dargestellt werden könnte, dass eine feste Kugel gezwungen ist, auf einer festen oder veränderlichen Fläche zu rollen. Ob nicht holonome Bedingungen durch unser Bild anders, als in diesem Sinne mit beliebiger Annäherung dargestellt werden können, lasse ich dahingestellt.

In der Mechanik wird häufig auch der Fall betrachtet, dass zwischen den Coordinaten gewisser materieller Punkte nicht Gleichungen, sondern Ungleichungen bestehen. Sei $\varphi(x, y, z)$ eine Function der rechtwinkeligen Coordinaten, x, y, z eines Punktes, welche auf einer geschlossenen Fläche (der Fläche F) gleich Null, innerhalb derselben < 0, ausserhalb > 0 ist. Die Bedingung, dass für einen materiellen Punkt während der ganzen Zeit seiner Bewegung $\varphi(x,y,z) \leqq 0$ sein soll, kann man dann dadurch darstellen, dass man ausserhalb der Fläche F eine andere Fläche G construirt, welche von der Fläche F immer den senkrechten Abstand a hat und dicht mit materiellen Punkten besäet ist, welche alle auf einen anderen materiellen Punkt in einer Entfernung, die grösser oder gleich a ist, keine Kraft, in einer Entfernung aber, die nur wenig kleiner als a ist, sogleich eine ausserordentlich grosse Abstossung ausüben. Die Entfernung je zweier benachbarter materieller Punkte auf der Fläche G soll dabei sehr klein gegen a sein. Wir haben dann eine undurchdringliche, vollkommen glatte Schale nachgebildet, in deren Innern sich eine materielle Kugel befindet.

Es können also in Folge einseitiger Verbindungen Ungleichungen bestehen, welche nur die Coordinaten der verschiedenen materiellen Punkte und eventuell auch die Zeit t explicit enthalten, also die Form

$$\varphi\,(t, x_1, y_1 \ldots z_n) \leqq 0 \tag{79}$$

haben. Wir nennen sie dann holonome Bedingungsungleichungen. Die betreffenden Ungleichungen können aber auch die Differentiale der Coordinaten enthalten, ohne auf die Form 79) reducirbar zu sein (nicht holonome Bedingungsungleichungen), in welchem Falle wir uns auf solche beschränken, welche in die Form

$$\tau\,dt + \xi_1\,dx_1 + \eta_1\,dy_1 \ldots \zeta_n\,dz_n \leqq 0 \tag{80}$$

gebracht werden können.

Um die Mannigfaltigkeit der auf diese Weise construirbaren Modelle zu zeigen, wollen wir uns noch eine enorm grosse Zahl gleich beschaffener materieller Punkte denken, welche alle in der sehr kleinen Entfernung a und in grösserer Entfernung nicht aufeinander wirken, sich aber in ein wenig kleinerer Entfernung sofort sehr stark abstossen. Alle diese materiellen Punkte sollen durch irgend eine äussere Druckkraft in einem Gefässe dicht aneinander gedrängt werden, so dass zwei benachbarte immer sehr nahe die Entfernung a haben. Sie werden sich dann wie winzig kleine, vollkommen glatte Sandkörner oder auch wie die Theilchen einer reibungslosen unzusammendrückbaren Flüssigkeit verhalten. Letztere können ja auch nur durch einen auf ihre Oberfläche wirkenden Druck an der vollständigen Verdunstung verhindert werden.

Es kann nun sein, dass wir dieselben Gleichungen oder Ungleichungen nicht blos in einer, sondern in mehreren Weisen durch verschiedene Vorrichtungen erzielen können, z. B. die Ungleichung $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ dadurch, dass wir einen materiellen Punkt durch einen unausdehnbaren, aber vollkommen biegsamen Faden mit dem fix gedachten Coordinatenursprung verbinden oder dass wir ihn in eine starre Hohlkugel einschliessen. Wir werden sehen, dass die Bewegungsgleichungen, welche wir aus dem mechanischen Bild erhalten, nur von dem Werthe der expliciten Kräfte und der Form der Bedingungsgleichungen oder Ungleichungen abhängen, nicht aber davon, ob diese Gleichungen oder Ungleichungen durch die eine oder andere Vorrichtung realisirt sind. In allen Fällen also, wo die Bewegung durch

die Bewegungsgleichungen, die Anfangslagen, die Anfangsgeschwindigkeiten und deren Richtungen eindeutig bestimmt ist, kann sie nicht von der speciellen Art abhängen, wie diese Bedingungen mechanisch realisirt sind.

Wenn wir im Folgenden von irgend welchen Bedingungen sprechen, so verstehen wir darunter immer solche, welche durch starre oder einseitige Verbindungen irgendwie realisirt werden können. Unter den dabei geltenden Bewegungsgleichungen verstehen wir diejenigen, welche nach dem mechanischen Bilde aus diesen Verbindungen folgen. Man hat es als selbstverständlich betrachtet, dass für die Bewegungsgleichungen nur die Beschränkung maassgebend sein kann, welche die Bewegung durch die Bedingungen in der unmittelbar benachbarten Zeit erfährt, sowie dass diese durch Relationen bestimmt ist, welche wie die Relationen 78) oder 80) die Coordinatenzuwächse linear enthalten und worin die Coordinaten selbst als constant angesehen werden können. Man hat dann bewiesen, dass jede solche lineare Relation zwischen den Coordinatenzuwächsen durch starre und einseitige Verbindungen hergestellt werden kann, dass also beliebige Bedingungen durch allerdings mit der Zeit wechselnde starre und einseitige Verbindungen mit passend gewählten materiellen Punkten ersetzt werden können. Wir wollen jedoch hierauf nicht näher eingehen und nicht näher prüfen, ob es möglich ist, alle denkbaren Gleichungen und Ungleichungen zwischen den Coordinaten in dieser Weise zu realisiren; für uns existiren nur solche Bedingungen, die wir in dieser Weise realisiren können. Ebenso wenig können und wollen wir einen Beweis liefern, dass sich in der Natur Körper, welche während ihrer Bewegung solchen Bedingungsgleichungen unterworfen sind, nach den aus unserem Bilde folgenden Gesetzen bewegen. Zu prüfen, in wie weit dies der Fall ist, ist Sache der Experimentalphysik.

§ 34. Begriff der expliciten, verlorenen Kraft, der virtuellen Verschiebung, etc.

Wir wollen nun die Gleichungen für den allgemeinsten Fall ableiten, welcher durch unser Bild dargestellt werden

kann. Es sei ein System von n materiellen Punkten gegeben, von denen beliebige starr oder einseitig untereinander oder mit anderen μ materiellen Punkten verbunden sind, welche letztere entweder fix sind oder sich irgendwie in vorgeschriebener Weise im Raume bewegen.

Die Kräfte, welche von diesen Verbindungen herrühren, nennen wir die Verbindungskräfte. Ausserdem können noch beliebige der n materiellen Punkte, die nicht starr verbunden sind, untereinander Centrikräfte ausüben (die inneren expliciten Kräfte) oder es können beliebige andere (ν) materielle Punkte vorhanden sein, welche beliebige Centrikräfte auf irgend welche der n materiellen Punkte ausüben (die äusseren expliciten Kräfte). Wir nennen alle diese Kräfte die expliciten Kräfte, weil sie nicht von den starren oder einseitigen Verbindungen der n Punkte untereinander oder mit den μ Punkten herrühren.[1])

Die Verbindungen können wir immer durch gewisse Gleichungen oder Ungleichungen zwischen den Coordinaten der n materiellen Punkte ersetzen, welche wir die Bedingungen des Systems nennen.

Wir bezeichnen nun mit m_h die Masse irgend eines unserer n materiellen Punkte (des $h$ten), mit x_h, y_h, z_h dessen Coordinaten zur Zeit t, mit $\mathfrak{x}_h$, $\mathfrak{y}_h$, $\mathfrak{z}_h$ die nach den Coordinatenrichtungen geschätzten Componenten der Resultirenden aller Verbindungskräfte, sowie mit X_h, Y_h, Z_h die ebenso geschätzten Componenten der Resultirenden aller expliciten Kräfte, welche zur Zeit t auf diesen materiellen Punkt wirken. Dann erhalten wir nach 13) folgende Gleichungen:

$$81)\quad \left\{\begin{array}{l} m_h \dfrac{d^2 x_h}{d t^2} = X_h + \mathfrak{x}_h, \quad m_h \dfrac{d^2 y}{d t^2} = Y_h + \mathfrak{y}_h, \\ \qquad m_h \dfrac{d^2 z_h}{d t^2} = Z_h + \mathfrak{z}_h. \end{array}\right.$$

---

[1]) Die expliciten Kräfte fallen natürlich mit den äusseren zusammen, falls die n materiellen Punkte keine anderen Kräfte als die Verbindungskräfte aufeinander ausüben, d. h. falls zwischen ihnen keine anderen Centrikräfte als diejenigen thätig sind, welche die Verbindungsgleichungen erhalten, z. B. wenn es die Theilchen eines einzigen oder mehrerer nicht aufeinander fernwirkender fester oder tropfbar flüssiger Körper sind.

Theils um das Verständniss anderer Schriften, wo diese Bezeichnungen gebraucht sind, zu erleichtern, theils weil wirklich eine anschauliche Terminologie der Auffassung wesentlich zu Hülfe kommt, wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen: Die Summe (natürlich Vectorsumme) der expliciten und der Verbindungskräfte, welche auf einen Punkt wirken, nennen wir die Totalkraft auf diesen Punkt. Die Componenten der auf einen Punkt des Systems wirkenden Totalkraft in den Coordinatenrichtungen sind also die Ausdrücke 81). Sie sind gleich den mit der Masse desselben multiplicirten entsprechenden Componenten der wirklich eintretenden Beschleunigung dieses Punktes, was selbstverständlich ist, da ja die Totalkraft die Summe aller Kräfte darstellt, die überhaupt auf den betreffenden Punkt wirken.

Dagegen fallen die wirklichen Beschleunigungen nicht mit denen zusammen, welche durch die expliciten Kräfte allein bewirkt würden. Wir stellen uns da vor, dass durch die Verbindungen ein Theil der expliciten Kräfte für die erzeugte Beschleunigung verloren geht. Dieser Theil der expliciten Kräfte, welcher für die wirkliche Beschleunigung verloren geht und nur den Widerstand der Verbindungen überwindet, soll als die verlorene Kraft bezeichnet werden. Die verlorenen Kräfte sind also gleich, aber gerade entgegengesetzt gerichtet den Verbindungskräften, da sie von letzteren aufgehoben werden.

82) $$-\mathfrak{x}_h\,,\quad -\mathfrak{y}_h\,,\quad -\mathfrak{z}_h$$

sind also die Componenten nach den Coordinatenrichtungen von derjenigen Kraft, die von der auf m_h wirkenden expliciten Kraft verloren geht. Wenn man von der expliciten Kraft, deren Componenten X_h, Y_h, Z_h sind, die allein zur Wirksamkeit kommende Totalkraft, deren Componenten $X_h + \mathfrak{x}_h$, $Y_h + \mathfrak{y}_h$, $Z + \mathfrak{z}_h$ sind, abzieht, so erhält man das, was durch die Verbindungskräfte verloren geht, also die Ausdrücke 82).

Ferner wollen wir im Gegensatz zur wirklichen Beschleunigung irgend eines materiellen Punktes, welche in der Abscissenrichtung die Componente

83) $$\frac{d^2 x_h}{d t^2} = \frac{1}{m_h}(X_h + \mathfrak{x}_h)$$

hat, diejenige, die derselbe materielle Punkt, wenn keine Verbindungen vorhanden wären, durch die expliciten Kräfte allein erhalten hätte, die explicite Beschleunigung nennen. Ihre Projection auf die Abscissenrichtung ist

84) $$\frac{1}{m_h} X_h .$$

Durch die Verbindungen wird die explicite Beschleunigung auf die wirkliche reducirt. Was dabei verloren geht, also die durch die Verbindungskräfte verlorene Beschleunigung erhalten wir, wenn wir von der expliciten Beschleunigung die wirkliche abziehen, so dass also

85) $$\frac{1}{m_h} X_h - \frac{1}{m_h}(X_h + \mathfrak{x}_h) = - \frac{1}{m_h}\mathfrak{x}_h$$

die Componente der verlorenen Beschleunigung des Punktes m_h in der Abscissenrichtung ist. Dieselbe ist wieder gleich, aber entgegengesetzt gerichtet als die durch die Verbindungskräfte allein erzeugte Beschleunigung.

Die Componenten X_h, Y_h, Z_h der expliciten Kräfte setzen wir als gegeben voraus, die der Verbindungskräfte $\mathfrak{x}_h$, $\mathfrak{y}_h$, $\mathfrak{z}_h$ werden wir im folgenden Paragraphen eliminiren. Zu diesem Zwecke fassen wir die Lage sämmtlicher materieller Punkte zu irgend einer Zeit t ins Auge und denken uns jedem Raumpunkte, wo sich irgend einer der n materiellen Punkte zur Zeit t befindet, eine ganz beliebige, unendlich kleine Verschiebung ertheilt. Die Coordinaten x_h, y_h, z_h des Raumpunktes, wo sich zur Zeit t der $h$te materielle Punkt befand, sollen dabei um δx_h, δy_h, δz_h wachsen. Alle diese Coordinatenzuwächse sollen nur der einen Bedingung unterworfen sein, dass sie den Bedingungsgleichungen und Ungleichungen des Systems zur Zeit t genügen, in denen jedoch die Zeit t, insofern sie explicit darin vorkommt, als constant zu betrachten ist. Die so erhaltenen Bedingungen des Systems müssten also erfüllt bleiben, wenn jeder materielle Punkt wirklich von dem Raumpunkte, wo er zur Zeit t ist, nach derjenigen Stelle versetzt würde, wohin dieser Raumpunkt verschoben wurde.

Wir wollen alle möglichen unendlich kleinen Verschie-

bungen, welche dieser einen Forderung genügen, virtuelle Verschiebungen nennen. Dieselben sind durchaus nicht zu verwechseln mit den Verschiebungen, welche die materiellen Punkte wirklich während des auf die Zeit t folgenden Zeitdifferentiales dt erleiden. Letztere nennen wir die wirklichen Verschiebungen während der Zeit dt. Die Zuwächse, welche in Folge der letzteren Verschiebungen die Coordinaten des $h$ten der n materiellen Punkte erleiden, bezeichnen wir mit dx_h, dy_h, dz_h und nennen sie die Differentiale der Coordinaten zum Unterschiede von δx_h, δy_h, δz_h, welche wir die Variationen der Coordinaten nennen.

Wenn die materiellen Punkte, welche wir die μ materiellen Punkte nannten, welche wir also zur Realisirung der Bedingungen des Systems benutzten, fix im Raume sind, mit anderen Worten, wenn die Bedingungen des Systems mit der Zeit unveränderlich sind, so müssen die Differentiale denselben Bedingungen wie die Variationen genügen. Es können also die Variationen auch gleich den Differentialen gemacht werden, aber der erstere Begriff ist viel allgemeiner, indem er überhaupt alle möglichen unendlich kleinen Zuwächse umfasst, welche den Bedingungen genügen, während der letztere nur diejenigen speciellen Zuwächse ausdrückt, welche während der Zeit dt wirklich eintreten. Wenn dagegen die Bedingungen des Systems die Zeit explicit enthalten, so sind überhaupt im Allgemeinen die Bedingungen für die Differentiale andere als für die Variationen. Fassen wir eine holonome, die Zeit explicit enthaltende Bedingung ins Auge, die sich durch die Relation 77) oder 79) ausspricht. Dann müssen die variirten Coordinaten $x_h + \delta x_h$, $y_h + \delta y_h$, $z_h + \delta z_h$ noch immer der Bedingung genügen, welche zur Zeit t besteht, wogegen die der Zeit $t + dt$ entsprechenden Coordinaten $x_h + dx_h$, $y + dy_h$, $z_h + dz_h$ der Bedingung genügen müssen, welche zur Zeit $t + dt$ besteht. Man hat also, falls die Function φ für die betreffenden Werthe der Variabeln differentiirbar ist:

$$86)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\,\delta x_h + \frac{\partial\varphi}{\partial y_h}\,\delta y_h + \frac{\partial\varphi}{\partial z_h}\,\delta z_h\right) \leqq 0,$$

wogegen man für die Differentiale die Relation hat:

$$87)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h}dx_h + \frac{\partial \varphi}{\partial y_h}dy_h + \frac{\partial \varphi}{\partial z_h}dz_h\right) \leqq 0.$$

Es gilt das blosse Gleichheitszeichen oder beide Zeichen, je nachdem die Relation durch 77) oder 79) definirt ist. Bei einer nicht holonomen Bedingung müssen die Differentiale eine Relation von der Form 78) oder 80) erfüllen. Wenn man darin t constant setzt, so erhält man die zwischen den Variationen bestehende Relation. Letztere ist also

$$88)\quad \sum_{h=1}^{h=n}(\xi_h\,\delta x_h + \eta_h\,\delta y_h + \zeta_h\,\delta z_h) \leqq 0,$$

wobei natürlich wieder das Gleichheitszeichen der Relation 78), beide Zeichen der Relation 80) entsprechen. Die Relationen 86) und 87) sind übrigens nur specielle Fälle der Relationen 80) und 88), die man erhält, wenn man darin

$$89)\quad \tau = \frac{\partial \varphi}{\partial t},\quad \xi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},\quad \eta_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\dots \zeta_n = \frac{\partial \varphi}{d z_n}$$

setzt. Natürlich sind die Relationen 86) und 87) nicht gleichbedeutend mit der Relation 79), da aus letzterer die Gültigkeit der ersteren Relationen nur folgt, wenn die Ausgangswerthe der Coordinaten die Gleichung 77) befriedigen. Wenn das Ungleichheitszeichen gilt, so sind auch andere Ausgangswerthe möglich und dann besagt die Relation 79) gar nichts über die Differentiale oder Variationen. Es wäre auch möglich, dass eine nicht holonome Relation von der Form 80) nur im Falle des Bestehens gewisser Gleichungen zwischen den Coordinaten gilt, z. B. nur so lange ein fester Körper eine gewisse Fläche berührt, die er nach einer Seite verlassen kann. Eine virtuelle Verrückung des Systems ist in jedem Falle jede unendlich kleine Verrückung desselben, bei welcher die Verschiebungen aller n Punkte des Systems allen, durch irgend welche Bedingungen desselben vorgeschriebenen Relationen 86) oder 88) genügen.

§ 35. Mathematischer Ausdruck des Princips der virtuellen Verschiebungen.

Es seien nun $\delta x_1, \delta y_1 \dots \delta z_n$ die irgend einer virtuellen Verrückung des Systems entsprechenden Coordinatenzuwächse. Wir multipliciren von den Gleichungen, welche wir aus 81) erhalten, wenn wir $h = 1$ setzen, die erste mit δx_1, die zweite mit δy_1, die dritte mit δz_1, ebenso von den Gleichungen, die wir aus 81) erhalten, wenn wir $h = 2$ setzen, die erste mit δx_2, die zweite mit δy_2, die dritte mit δz_2 u. s. f. bis zur letzten. Indem wir dann alle so erhaltenen Gleichungen addiren, folgt:

$$90)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{h=n}\left[\left(m_h\frac{d^2x_h}{dt^2}-X_h\right)\delta x_h+\left(m_h\frac{d^2y_h}{dt^2}-Y_h\right)\delta y_h\right.\\ &\qquad\qquad\qquad\left.+\left(m_h\frac{d^2z_h}{dt^2}-Z_h\right)\delta z_h\right]\\ &=\sum_{h=1}^{h=n}(\mathfrak{X}_h\,\delta x_h+\mathfrak{Y}_h\,\delta y_h+\mathfrak{Z}_h\,\delta z_h). \end{aligned}\right.$$

Es sei nun m_k ein zweiter materieller Punkt, mit welchem der materielle Punkt mit der Masse m_h starr oder einseitig verbunden ist, x_k, y_k, z_k seien die Coordinaten des zweiten materiellen Punktes, r_{hk} die Entfernung beider materieller Punkte, $f_{hk}(r_{hk})$ die vermöge der starren oder einseitigen Verbindung zwischen ihnen wirkende Kraft. Dann liefert diese Kraft in die rechte Seite der Gleichung 90), je nachdem der Punkt m_k den n Punkten oder den μ Punkten angehört, drei oder sechs Addenden, deren Summe jedenfalls gleich

$$91)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{f_{hk}(r_{hk})}{r_{hk}}[(x_h-x_k)(\delta x_h-\delta x_k)+(y_h-y_k)(\delta y_h-\delta y_k)\\ &\qquad+(z_h-z_k)(\delta z_h-\delta z_k)]=f_{hk}(r_{hk})\,\delta r_{hk} \end{aligned}\right.$$

ist, wobei δr_{hk} der Zuwachs der Entfernung r_{hk} in Folge der virtuellen Verschiebungen ist. Es ist ja

$$r_{hk}^2=(x_h-x_k)^2+(y_h-y_k)^2+(z_h-z_k)^2.$$

Der Ausdruck 91) gilt unverändert, ob der materielle Punkt m_k ebenfalls den n materiellen Punkten oder ob er den μ materiellen Punkten angehört; denn in letzterem Falle ist einfach

$\delta x_k = \delta y_k = \delta z_k = 0$, da die virtuellen Verschiebungen ohne Aenderung der Bedingungsgleichungen, also ohne Aenderung der Lage der μ materiellen Punkte vorzunehmen sind. In letzterem Falle liefert die betreffende Verbindungskraft nur drei Addenden in die rechte Seite der Gleichung 90).

Wenn nun die beiden materiellen Punkte m_h und m_k starr miteinander verbunden sind, so müssen die Verschiebungen, damit sie virtuell seien, so gewählt werden, dass dabei die Entfernung der beiden Punkte unverändert bleibt, also $\delta r_{hk} = 0$ ist. Dann reducirt sich also der Ausdruck 91) auf Null. Sind alle Verbindungen starr, so reduciren sich daher für jede Verbindung zweier der n Punkte je sechs Glieder, für jede Verbindung eines der n Punkte mit einem der μ Punkte aber je drei Glieder der rechten Seite der Gleichung 90) auf Null. Es ist also dann die gesammte rechte Seite dieser Gleichung Null.[1])

Für einseitige Verbindungen zweier materieller Punkte sind zwei Fälle möglich.

1. Die zwischen beiden Punkten wirkenden Kräfte lassen keine Verkleinerung der Entfernung derselben zu, ohne sich ihrer Vergrösserung zu widersetzen. Dann kann die zwischen den Punkten wirkende Kraft $f_{hk}(r_{hk})$ nicht anziehend, also nicht negativ sein. Aber auch die Entfernung der Punkte kann nicht abnehmen, auch δr_{hk} kann nicht negativ sein, der Ausdruck 91) kann daher nicht negativ, er kann nur gleich Null oder positiv sein.

2. Die Kraft verhindert nur die Vergrösserung der Entfernung, dann kann sie höchstens anziehend, niemals abstossend sein, kann also keinen positiven Werth haben und auch δr_{hk} kann nicht positiv sein. Das Product 91) ist also wieder entweder gleich Null oder positiv, niemals negativ. Denn damit es negativ wäre, müsste nothwendig ein Factor negativ, der andere aber positiv sein. Daraus folgt, dass wenn unter den Verbindungen einseitige sind, die rechte

[1]) Das im Texte Gesagte gilt für exact starre Verbindungen mathematisch exact, physikalisch aber gilt es nur angenähert. So ist hervorzuheben, dass die Entstehung von unsichtbaren Schwingungen der Punkte gegeneinander aus unserem Bilde sogar vorauszusehen ist.

Seite der Gleichung 90) jedesmal nur gleich Null oder positiv, niemals negativ sein kann, also

$$92)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}(\mathfrak{x}_h\,\delta x_h + \mathfrak{y}_h\,\delta y_h + \mathfrak{z}_h\,\delta z_h) \gtreqq 0.$$

Dasselbe muss daher auch von der linken Seite gelten und wir erhalten:

$$93)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=n}\Big[\Big(m_h\frac{d^2x_h}{dt^2} - X_h\Big)\delta x_h + \Big(m_h\frac{d^2y_h}{dt^2} - Y_h\Big)\delta y_h \\ + \Big(m_h\frac{d^2z_h}{dt^2} - Z_h\Big)\delta z_h\Big] \gtreqq 0, \end{aligned}\right.$$

wobei für durchaus starre Verbindungen das Gleichheitszeichen, für einseitige das Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen gilt.

Wir wollen das durch diese Gleichung ausgesprochene Princip das der virtuellen Verschiebungen nennen, indem wir diesen Namen in etwas allgemeinerem Sinne als Lagrange gebrauchen und Verallgemeinerungen, die durch Fourier, Gauss und durch Beiziehung des d'Alembert'schen Princips daran angebracht wurden, unter diesem Namen mitbegreifen.

Wenn mehrere einseitige Verbindungen bestehen, so kann es geschehen, dass jede virtuelle Verrückung des Systems, sobald man das Zeichen sämmtlicher Variationen der Coordinaten verkehrt, ohne deren Absolutwerth zu ändern, wieder in eine virtuelle Verrückung übergeht, dass immer die entgegengesetzte Verrückung auch virtuell ist. Dann muss in allen Bedingungen blos das Gleichheitszeichen gelten, da ja ihre Richtigkeit durch Umkehrung der Zeichen aller Variationen nicht alterirt werden darf. Dann muss aber auch in der Relation 93) wie im Falle lauter starrer Verbindungen immer das Gleichheitszeichen gelten, da der Ausdruck links auch für keine virtuelle Verrückung positiv sein kann; denn er wäre sonst für die virtuelle Verrückung, die dieser gerade entgegengesetzt ist, negativ, was nach dem allgemeinen Principe unmöglich ist. Ein Beispiel hierfür haben wir, wenn eine starre glatte Kugel zwischen zwei starren glatten

Flächen eingeschlossen ist, deren Abstand überall gleich dem Kugeldurchmesser ist. Sie dürfte sich dann von jeder der Flächen beliebig entfernen, kann es aber nicht vermöge des Widerstandes der gegenüberliegenden Fläche.

Da $\sum_{h=1}^{h=n}(\mathfrak{X}_h \delta x_h + \mathfrak{Y}_h \delta y_h + \mathfrak{Z}_h \delta z_h)$ die bei der betreffenden Verrückung von den Verbindungskräften geleistete Arbeit ist, so kann man sagen: für jede virtuelle Verrückung kann die Arbeit der von den Verbindungen herrührenden Kräfte, wenn lauter Gleichungen bestehen, nur gleich Null, wenn auch Ungleichungen bestehen, nur gleich Null oder positiv sein.[1]) Wenn die Bedingungen die Zeit nicht explicit enthalten, also von der Zeit unabhängig gelten, so muss die wirkliche Verschiebung während der Zeit dt mit denselben Bedingungen verträglich sein, wie die virtuellen Verschiebungen, also ein specieller Fall der letzteren sein. Es muss daher die Arbeit der Verbindungskräfte auch für die wirklichen Verschiebungen die obigen Bedingungen erfüllen. Eine fixe starre glatte Röhre kann auf eine genau hineinpassende starre glatte Kugel keine Arbeit übertragen, noch von ihr empfangen. Aendert sich aber die Lage der Mittellinie mit der Zeit, so kann auf die Kugel Arbeit übertragen werden. Uebrigens kann auch beim Vorhandensein von mit der Zeit unveränderlichen Ungleichungen nur während einer unendlich kurzen Zeit der Bewegung eine unendlich kleine Arbeit übertragen werden, da sich ja hierbei der einseitig gebundene materielle Punkt dann sogleich von der Vorrichtung entfernt.

---

[1]) Der Arbeit der Verbindungskräfte gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet ist die der verlorenen Kräfte, deren Componenten wir ja gleich $-\mathfrak{x}_h$, $-\mathfrak{y}_h$, $-\mathfrak{z}_h$ fanden. Die Relation 92) besagt daher, dass die Arbeit der letzteren beim Uebergange von der wirklichen zu einer anderen möglichen Bewegung nie positiv sein kann. Da Kräfte jede Bewegung zu erzeugen streben, bei der sie positive Arbeit leisten, so kann man auch sagen, die wirkliche Bewegung geschieht so, dass es keine andere mögliche giebt von der Beschaffenheit, dass die verlorenen Kräfte den Uebergang von der wirklichen zu jener möglichen anstrebten. Im Falle des Gleichgewichtes z. B. gehen alle expliciten Kräfte verloren und dieses kann nur bestehen, wenn dieselben keine mögliche Bewegung anstreben, wenn sie bei keiner möglichen Bewegung positive Arbeit leisten.

Man könnte sich versucht fühlen, es als a priori evident hinzustellen, dass die Arbeit der Widerstandskräfte, welche gewisse Bedingungen anfrecht erhalten, bei jeder diesen Bedingungen nicht widersprechenden Bewegung gleich Null sein müsse. Allein in dieser Allgemeinheit wäre diese Behauptung sogar unrichtig; denn die Widerstandskräfte können ja mit Reibung verbunden sein, welche Arbeit verzehrt. Man müsste daher den Satz auf reine Widerstandskräfte, d. h. auf solche beschränken, die ausser der Herhaltung gewisser Bedingungsgleichungen keine Wirkung haben. Da man die Abwesenheit anderer Wirkungen kaum anders als durch die Abwesenheit von Arbeit bei mit den Bedingungen verträglichen Bewegungen definiren kann, so wäre es am besten einfach zu sagen, man verstehe unter reinen Widerstandskräften solche, bei denen diese Arbeit fehlt. Diese rein negative Definition ist natürlich die allgemeinste, giebt aber keine Vorstellung von der Art der Wirksamkeit dieser Kräfte.

Bezeichnet man mit P_h die Resultirende aller expliciten Kräfte, die auf den materiellen Punkt m_h wirken, und mit δl_h die Verschiebung ihres Angriffspunktes, so dass X_h, Y_h, Z_h und δx_h, δy_h, δz_h die Projectionen von P_h und δl_h auf die Coordinatenrichtungen sind, bezeichnet man ferner mit $\delta p_h = \delta l_h \cos(P_h, \delta l_h)$ und $L_h = P_h \cos(P_h, \delta l_h)$ die Componente von δl_h in der Richtung P_h und von P_h in der Richtung δl_h, so ist

$$94) \left\{ \begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=n}(X_h \delta x_h + Y_h \delta y_h + Z_h \delta z_h) &= \sum P_h \delta l_h \cos(P_h, \delta l_h) \\ &= \sum P_h \delta p_h = \sum L_h \delta l_h. \end{aligned} \right.$$

Die Projection δp_h ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem sie in die Richtung von P_h oder in die entgegengesetzte fällt. Analog bestimmt sich das Zeichen von L_h.

Aehnlich kann

$$\sum m_h \left(\frac{d^2 x_h}{d t^2} \delta x_h + \frac{d^2 y_h}{d t^2} \delta y_h + \frac{d^2 z_h}{d t^2} \delta z_h \right)$$

ausgedrückt werden, wenn man den Absolutwerth der Beschleunigung, ihre Componente in der Richtung der Ver-

schiebung und die Projection der letzteren auf die Richtung der Beschleunigung einführt.

Den Fall, dass ein System anfangs ruht und unter dem Einflusse der darauf wirkenden Kräfte dauernd in Ruhe bleibt, nennt man den des Gleichgewichtes im Ruhezustande.

Für diesen verschwinden alle Beschleunigungen und man erhält aus 93)

95) $$\sum_{h=1}^{h=n}(X_h\,\delta x_h + Y_h\,\delta y_h + Z_h\,\delta z_h) \leqq 0$$

oder nach 94)

96) $$\sum_{h=1}^{h=n} P_h\,\delta l_h \cos(P_h, \delta l_h) \leqq 0$$

oder

97) $$\sum_{h=1}^{h=n} P_h\,\delta p_h \leqq 0.$$

§ 36. Lagrange's Beweis des Princips der virtuellen Verschiebungen.

Dem Bestreben, die Unabhängigkeit des Princips der virtuellen Verschiebungen von irgend einer Ansicht über die nähere Natur der Kräfte zu zeigen, verdankt der alte klassische Beweis Lagrange's seine Entstehung. Man denkt sich da an den Angriffspunkt der ersten Kraft P_1, welche auf irgend ein beliebigen Bedingungen unterworfenes System wirkt, einen vollkommen glatten Ring R_1 befestigt und in der Richtung der betreffenden Kraft einen zweiten ebenso glatten Ring S_1 fix im Raume vorhanden. Ebenso befestigt man an dem Angriffspunkte der zweiten Kraft P_2 den Ring R_2 und legt fix im Raume in die Richtung der zweiten Kraft den Ring S_2 u. s. f.

Wir können mit beliebiger Annäherung voraussetzen, dass die Intensitäten sämmtlicher Kräfte das gemeinsame Maass q haben, wenn wir dasselbe genügend klein wählen. Es sei

$$P_1 = n_1 q,\ P_2 = n_2 q,\ \ldots$$

Man befestigt nun an dem Ringe S_1 das eine Ende eines unendlich biegsamen glatten Fadens, zieht diesen hierauf

durch R_1, dann durch S_1, dann wieder durch R_1 etc., bis $2n_1$ Fadentheile die beiden Ringe R_1 und S_1 verbinden. Der letzte dieser Fadentheile geht durch S_1 und wird von dort durch S_2, dann durch R_2, dann wieder durch S_2 etc. gezogen, bis wieder zwischen R_2 und S_2 im Ganzen $2n_2$ Fadenstücke gezogen sind. Nun führt man den Faden nach S_3 u. s. f., bis man den letzten fixen Ring mit dem letzten beweglichen durch eine entsprechende Anzahl von Fadentheilen verbunden hat, worauf man das andere Ende E des Fadens aus dem letzten Ringe heraushängen lässt. Auf dieses Ende wird schliesslich mit der Hand der Zug $\frac{1}{2}q$ ausgeübt.

Da der absolut biegsame und glatte Faden in allen Theilen dieselbe Spannung besitzt, so üben alle Fadentheile auf alle beweglichen Ringe und durch diese auf die Angriffspunkte aller Kräfte dieselbe Wirkung aus, wie die ursprünglich gegebenen Kräfte. Man kann daher das ursprünglich gegebene Kraftsystem weglassen und seine Wirkung durch jene Fäden ersetzen.

Es soll sich nun der Angriffspunkt der ersten Kraft und mit ihm der Ring R_1 um das unendlich kleine Stück δl_1 verschieben, dessen Projection auf die Richtung der Kraft P_1 gleich δp_1 sei, welche Grösse wir mit positiven Zeichen versehen, wenn sie in die Richtung der Kraft P_1 fällt, mit negativem, wenn sie in die entgegengesetzte Richtung fällt. Durch die Verschiebung des Ringes R_1 verkürzt sich jeder der zwischen R_1 und S_1 gespannten Fäden um ein Stück, welches mit Vernachlässigung von unendlich Kleinem höherer Ordnung gleich δp_1 ist, alle zwischen R_1 und S_1 gespannten Fäden zusammen verkürzen sich daher um das Stück $2n_1\,\delta p_1$; das negative Zeichen von δp_1 würde eine Verlängerung bedeuten. Da dasselbe von allen übrigen Fadenstücken gilt, so ist die gesammte Verkürzung aller dieser Fadenstücke und daher auch, da wir den Faden als unausdehnbar voraussetzen, das Stück, um welches das Ende E weiter aus dem letzten fixen Ringe heraustritt, gleich

98) $$2n_1\,\delta p_1 + 2n_2\,\delta p_2 + \dots$$

Wenn anfangs alle Ringe ruhen und irgend eine Verschiebung der Ringe möglich ist, bei welcher diese Grösse positiv ist, bei welcher also das Fadenende E wirklich weiter aus dem fixen Ringe heraustritt, so wird diese sicher durch die Kraft $\frac{1}{2}q$, welche wir darauf ausüben, bewirkt werden. Gleichgewicht kann daher nur bestehen, wenn der Ausdruck 98) für keine mögliche Verschiebung positiv ist. Dieser Ausdruck wird aber durch Multiplication mit der wesentlich positiven Grösse $\frac{1}{2}q$ mit der linken Seite der Relation 97) identisch, wodurch diese Relation für den Fall des Gleichgewichtes und der Ruhe bewiesen ist.

Dieser Beweis charakterisirt die geniale Einfachheit und Anschaulichkeit der alten Schlussweise, aber auch deren Mängel. Dass die Glieder zweiter Ordnung nur auf die Stabilität oder Labilität, nicht auf das Gleichgewicht selbst von Einfluss sind, resp. dass erst nach unendlich langer Zeit eine Bewegung eintritt, wenn blos Verschiebungen möglich sind, bei denen das Fadenende E eine Senkung erfährt, die unendlich klein höherer Ordnung ist, wird als selbstverständlich angenommen; ebenso die Gesetze der Fadenspannung und des Gleitens, sowie dass die Wirkungsgesetze der Kräfte immer dieselben sind, ob diese von dem Zuge von Fäden oder von anderen Ursachen herstammen und dass sie so allgemein gelten, dass die Heranziehung beliebiger idealer Fälle wie absolut glatter und biegsamer Schnüre unbedingt erlaubt ist. Alle diese Gesetze galten damals als weit sicherer, als das Princip selbst. Der Beweis der Relation 93) für den Fall der Bewegung wird dann durch eine ebenfalls nicht ganz einwurfsfreie Begründung des d'Alembert'schen Princips vermittelt. Ueber das d'Alembert'sche Princip vergl. §§ 72 und 73.

§ 37. Ein materieller Punkt ist gezwungen, auf einer Fläche zu bleiben.

Diesen Fall wollen wir zunächst als das einfachste Beispiel für die in den beiden vorigen Paragraphen erörterten Sätze behandeln.

Sei m die Masse des materiellen Punktes; x, y, z dessen Coordinaten zur Zeit t. Unter den expliciten oder äusseren

Kräften haben wir alle auf den materiellen Punkt wirkenden Kräfte zu verstehen mit Ausnahme der Kräfte, welche von der Vorrichtung ausgehen, die ihn zwingt, auf der betreffenden Fläche zu bleiben. Die Summe der Componenten der äusseren Kräfte in der Abscissenrichtung sei X; die gleiche Bedeutung habe Y und Z für die beiden anderen Coordinatenrichtungen. Ferner sei

99) $$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

die Gleichung der Fläche, auf welcher zu bleiben der materielle Punkt gezwungen ist und deren Gestalt mit der Zeit veränderlich sein kann. Wir schliessen zunächst den Fall aus, dass an der Stelle A, wo sich der materielle Punkt gerade befindet, zur betreffenden Zeit die Function φ undifferentiirbar ist oder dass alle drei partiellen Ableitungen derselben nach den drei Coordinaten gleichzeitig verschwinden. Dann wird die Function φ für Punkte, die der Fläche auf der einen Seite sehr nahe anliegen, > 0, auf der anderen < 0 sein. Wir wollen die erste Seite die positive, die letztere die negative nennen.

Es erfahre der materielle Punkt eine beliebige unendlich kleine Verschiebung, wobei seine Coordinaten x, y, z die beliebigen unendlich kleinen Zuwächse δx, δy, δz erleiden sollen. Als Bedingung, dass die Verschiebung eine virtuelle sei, erhalten wir nach 86), wo jetzt das Gleichheitszeichen gilt, da es auch in 99) gilt, die Gleichung:

100) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\delta z = 0.$$

Da die jeder möglichen Verschiebung entgegengesetzte Verschiebung ebenfalls virtuell ist, so gilt auch in Relation 93) das Gleichheitszeichen, welche sich daher auf

101) $$\begin{cases} \left(m\frac{d^2 x}{d t^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2 y}{d t^2} - Y\right)\delta y + \\ \qquad + \left(m\frac{d^2 z}{d t^2} - Z\right)\delta z = 0 \end{cases}$$

reducirt. Hier sind von den drei Coordinatenvariationen δx, δy, δz zwei vollkommen willkürlich. Hat man aber für diese beiden bestimmte Werthe angenommen, so ist der

Werth der dritten durch die Gleichung 100) bestimmt. Man verfährt nun folgendermaassen: man multiplicirt die Gleichung 100) mit einem passend zu bestimmenden Factor $-\lambda$ und addirt sie zur Gleichung 101). Die so gebildete Gleichung wollen wir als die Gleichung 102) bezeichnen und sie der Raumersparniss halber gar nicht anschreiben.

Man kann nun die Grösse λ so wählen, dass in der Gleichung 102) die Variation einer der Coordinaten, z. B. δx,[1]) den Coefficienten Null erhält, d. h. man bestimmt λ durch die Gleichung

103) $$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Dann entfällt in der Gleichung 102) das mit δx multiplicirte Glied vollständig. Die Gleichung 102) muss nun bestehen, wenn man $\delta z = 0$ und δy von Null verschieden annimmt. Es muss also der Coefficient von δy in derselben verschwinden und aus einem analogen Grunde muss auch der Coefficient von δz verschwinden, so dass man noch die beiden Gleichungen

104) $$\begin{cases} m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases}$$

erhält.

Wir haben nebst den drei Coordinaten x, y, z des materiellen Punktes noch eine vierte Unbekannte λ eingeführt. Wir haben aber auch vier Gleichungen 99), 103) und die beiden Gleichungen 104). Die vier Unbekannten können aus diesen vier Gleichungen im Allgemeinen als Functionen der Zeit bestimmt werden. Zu diesem Behufe müssen ausser der Gleichung der Fläche zu jeder Zeit (also der Function φ) und den äusseren Kräften auch noch die Anfangswerthe der Coordinaten und der Componenten der

---

[1]) Falls $\partial\varphi/\partial x = 0$ wäre, so wäre δy, falls auch $\partial\varphi/\partial y = 0$ wäre, δz statt δx zu wählen, damit nicht λ unendlich oder unbestimmt würde. Nur wenn die partiellen Ableitungen des φ nach allen drei Coordinaten verschwinden würden, wäre die Methode nicht anwendbar, vergl. § 39.

Geschwindigkeiten des materiellen Punktes in den Coordinatenrichtungen gegeben sein.

Zur Bestimmung dieser sechs Anfangswerthe reichen vier Variable aus, da zwischen ihnen zwei Gleichungen bestehen. Zunächst muss auch zwischen den Anfangswerthen der Coordinaten die Gleichung 99) bestehen. Da ferner diese Gleichung ebenso zur Zeit $t + dt$ bestehen muss, so hat man nach 87) zu jeder und folglich auch zu Anfang der Zeit die Gleichung

$$105)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Der Anblick der Gleichungen 103) und 104) lehrt, dass die Bewegung genau so geschieht, als ob der materielle Punkt vollkommen frei wäre, aber nebst den äusseren Kräften noch eine Kraft auf ihn wirken würde, welche in den drei Coordinatenrichtungen die Componenten

$$106)\qquad \mathfrak{x} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{y} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{z} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

hat. Dies ist also die Kraft, welche die Vorrichtung auf ihn ausübt, die ihn zwingt, auf der betreffenden Fläche zu bleiben. Auf diese Kraft reduciren sich in diesem Falle die Verbindungskräfte. Wir wollen sie kurz den Widerstand der betreffenden Fläche oder der Vorrichtung nennen.

§ 38. Richtung der Widerstandskraft.

Wir wollen nun im Punkte A der Fläche, wo sich der materielle Punkt zur Zeit t befindet, eine Normale an die betreffende Fläche nach derjenigen Seite hin ziehen, welche wir die positive genannt haben, wo also die Function φ zur Zeit t einen positiven Werth hat, und mit α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche diese Normale mit den positiven Coordinatenaxen bildet. Wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist, sind die Cosinusse dieser Winkel durch folgende Gleichungen gegeben:

$$107)\qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wobei σ die positive Quadratwurzel aus

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$$

ist.

Diese Gleichungen ergeben sich am leichtesten in folgender Weise: Die Fläche, welche zur Zeit t die Gleichung 99) hat, heisse die Fläche F. Wir construiren die ihr unendlich benachbarte Fläche F_1, welche die Gleichung hat

$$108)\qquad \varphi(x, y, z) = \varepsilon,$$

wobei ε eine sehr kleine positive Grösse ist. Die Zeit wurde unter dem Functionszeichen weggelassen, da sie jetzt ein für allemal als Constante anzusehen ist. Wir ziehen vom Punkte A aus, welcher der Fläche F angehört, drei Gerade in den Richtungen der drei Coordinatenaxen und eine normal zur Fläche F. Diese vier Geraden sollen die Fläche F_1 in den vier Punkten B, C, D und E treffen. Dann hat AE die Richtung der nach derjenigen Seite gezogenen Normalen, wo φ wächst. Da die Function φ in der unmittelbaren Nähe des Punktes A keine singuläre Stelle hat, so kann die Fläche F_1 in der unmittelbaren Umgebung von E als eben und parallel mit F betrachtet werden. Es ist also

$$109)\qquad AE = AB\cos\alpha = AC\cos\beta = AD\cos\gamma.$$

Damit in den Gleichungen 109) auch das Zeichen stimmt, wollen wir AE immer als positiv betrachten, AB, AC, AD dagegen sollen positiv oder negativ sein, je nachdem sie vom Punkt A aus gezogen die Richtung der positiven oder negativen Coordinatenaxen haben, also je nachdem α resp. β oder γ spitz oder stumpf sind, so dass AB stets dasselbe Zeichen wie $\cos\alpha$, ebenso AC wie $\cos\beta$ und AD wie $\cos\gamma$ hat. Aus den Gleichungen 109) folgt:

$$110)\qquad \cos\alpha = \frac{\frac{1}{AB}}{\sqrt{\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}}},$$

wobei der Wurzel das positive Zeichen zu geben ist, da AB und $\cos\alpha$ dasselbe Zeichen haben.

Da andererseits die Coordinaten der vier Punkte B, C, D und E die Gleichung 108) erfüllen, so ist

$$\varepsilon = \frac{\partial \varphi}{\partial x} AB = \frac{\partial \varphi}{\partial y} AC = \frac{\partial \varphi}{\partial z} AD,$$

wobei auch das Vorzeichen stimmt, da wir AB, AC und AD positiv oder negativ zu nehmen haben, je nachdem sie in die positive oder negative Coordinatenrichtung fallen, also je nachdem sie einen Zuwachs oder eine Abnahme der betreffenden Coordinaten ausdrücken. Substituirt man die hieraus folgenden Werthe für AB, AC und AD in die Gleichung 110) und in die analogen Gleichungen für $\cos \beta$ und $\cos \gamma$, so erhält man die Gleichungen 107) und zwar mit richtigem Vorzeichen, da ja ε wesentlich positiv ist. Aus den Gleichungen 106) und 107) folgt, dass die immer positiv zu betrachtende Gesammtintensität des Widerstandes der Fläche durch

111) $$i = \pm \lambda \sigma$$

gegeben ist. Die Werthe ihrer Componenten in den Coordinatenrichtungen können vermöge der Gleichungen 107) auch in der Form geschrieben werden:

$$\mathfrak{x} = \pm i \cos \alpha, \quad \mathfrak{y} = \pm i \cos \beta, \quad \mathfrak{z} = \pm i \cos \gamma.$$

Hier gilt überall das positive oder negative Zeichen, je nachdem λ positiv oder negativ ist. Diese Formeln zeigen, dass die Widerstandskraft i, welche die Vorrichtung auf den materiellen Punkt ausübt, immer auf der Fläche, auf welcher zu bleiben derselbe gezwungen ist, senkrecht steht, und dass sie gegen die Seite hin gerichtet ist, wo die Function φ zunimmt oder abnimmt, je nachdem die Gleichungen für λ einen positiven oder negativen Werth ergeben. Da Wirkung und Gegenwirkung immer gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, so ist umgekehrt der Druck, welchen der materielle Punkt auf die Vorrichtung ausübt, immer gleich, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft der Vorrichtung auf den materiellen Punkt. Unsere Formeln lehren daher auch jedesmal die Grösse des letzteren Druckes kennen. Dieser Druck ist derjenige Theil der äusseren Kraft, welcher nicht auf Beschleunigung des materiellen Punktes verwendet

wird, sondern in Ueberwindung des Widerstandes der Fläche verloren geht, also die verlorene äussere Kraft. Die Beschleunigung, welche sie dem materiellen Punkte ertheilen würde, ist die durch den Widerstand der Fläche verlorene Beschleunigung.

Wenn die Fläche, welche die Gleichung 99) hat, mit der Zeit nicht veränderlich ist, oder immer durch den Punkt geht, wo sich das Bewegliche zu Anfang befand, so ist dauernde Ruhe desselben mit den Bedingungen verträglich. Für diese verschwinden die Beschleunigungen und man hat daher als Bedingung des Gleichgewichtes im Ruhezustande:

$$112)\qquad X = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Y = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad Z = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Die äusseren Kräfte müssen also in diesem Falle normal auf der Fläche sein. Dies folgt übrigens ohne Rechnung aus der Formel 96), da der Ausdruck links in dieser Formel nur für $\sphericalangle P, \delta l = 90^0$ verschwinden kann.

In diesem Falle wird der Punkt, wenn er anfangs ruhte, in Ruhe bleiben; dann sind seine Beschleunigungen Null, alle äussere Kraft geht für die Beschleunigung verloren und wird auf Ueberwindung des Widerstandes der Vorrichtung verwendet. Die Kraft, welche der materielle Punkt auf die Vorrichtung ausübt, ist genau gleich der gesammten Kraft, welche von aussen auf ihn wirkt. Wenn er sich bewegt und die äusseren Kräfte stets senkrecht auf der Fläche mit der Gleichung 99) stehen, also die Bedingungen 112) erfüllen, so geschieht die Bewegung, wie man aus den Gleichungen 103) und 104) sieht, gerade so, als ob er den gleichen Bedingungen unterworfen wäre und keine äusseren Kräfte auf ihn wirkten. Zu dem Drucke, den er in letzterem Falle schon auf die Vorrichtung ausüben würde, addiren sich aber dann die äusseren Kräfte.

§ 39. Singuläre Fälle. Bedingungen, die durch Ungleichungen ausgedrückt sind.

Wir wollen nur noch wenige Worte über den Fall sagen, wo alle drei partiellen Ableitungen der Function φ nach

den Coordinaten verschwinden oder der betreffende Punkt der Fläche sonst ein singulärer ist. Wenn das Bewegliche nur in einzelnen Zeitmomenten einzelne derartige singuläre Punkte durchläuft, so kann die Bewegung daselbst mittelst folgender Regeln meist eindeutig bestimmt werden. Wenn eine Bahn möglich ist, für welche die Geschwindigkeiten sich nicht sprungweise ändern, so geschieht die Bewegung in dieser Bahn; wenn es zwei oder mehrere solche Bahnen giebt, in derjenigen, für welche die Beschleunigung am wenigsten von der durch die äusseren Kräfte erzeugten abweicht. Falls sich aber alle möglichen Bahnen knicken oder mehrere mögliche Bahnen osculiren oder das Bewegliche während einer endlichen Zeit lauter singuläre Punkte durchläuft, kann die Bewegung mathematisch unbestimmt werden, was aber, wie wir sahen, ohne praktische Bedeutung ist, da solche Bedingungen durch die von uns angenommenen Vorrichtungen nie mathematisch exact erzeugt werden können.

Für den Fall des Gleichgewichtes an einem solchen singulären Punkte A, wo alle drei partiellen Ableitungen von φ verschwinden, liefern uns die Gleichungen 112), falls nicht λ unendlich wird, $X = Y = Z = 0$. In der That reducirt sich dann $\varphi(x+\alpha,\ y+\beta,\ z+\gamma)$ auf

$$113)\ \begin{cases} \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\gamma^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \\ \qquad +\beta\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}+\alpha\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}+\alpha\beta\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}. \end{cases}$$

Wenn sich dies nicht wieder identisch auf Null oder auf das Quadrat einer linearen Function von α, β, γ reducirt, welche in dieser Formel beliebige sehr kleine Coordinatenzuwächse bedeuten, so hat die Fläche F in der unmittelbaren Umgebung des Punktes A die Gestalt einer Kegelfläche, deren Spitze in A ist, oder zweier sich in A schneidender Ebenen, denn für jeden Punkt der Fläche muss

$$\varphi(x+\alpha,\ y+\beta,\ z+\gamma)=0$$

sein. Das Bewegliche kann also in der That nur im Gleichgewichte sein, wenn keine Kraft darauf wirkt. Ist aber

der Ausdruck 113) ein vollständiges Quadrat einer linearen Function von α, β, γ oder verschwinden auch alle zweiten partiellen Differentialquotienten der Function φ nach den Coordinaten, oder ist diese Function an der betreffenden Stelle überhaupt nicht nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelbar, so treten noch complicirtere Verhältnisse ein, welche eine besondere Untersuchung jedes speciellen Falles erfordern und auf welche wir nicht näher eingehen wollen.

Wir wollen nun noch einige Worte über den Fall sagen, wo zwischen den Coordinaten eines materiellen Punktes nicht eine Gleichung, sondern eine Ungleichung besteht, welche wir immer in die Form bringen können:

114) $$\varphi(x, y, z, t) \leqq 0.$$

Das Bewegliche kann also dann die Fläche, welche die Gleichung 99) hat, nach derjenigen Seite derselben, welche wir die negative genannt haben, ungehindert verlassen, dagegen nicht auf die positive Seite derselben gelangen.

Die Fläche kann nur eine von der positiven Seite gegen die negative hin gerichtete Widerstandskraft auf das Bewegliche, umgekehrt letzteres auf erstere nur eine von der negativen gegen die positive Seite gewendete Druckkraft ausüben. So lange die Widerstandskraft diese Richtung hat, d. h. so lange λ negativ ist, wird die Bewegung wie im früher betrachteten Falle geschehen und auch die Gleichgewichtsbedingungen werden dieselben sein. In dem Momente aber, wo λ einen positiven Werth annehmen würde, wird die Gültigkeit der früher entwickelten Gleichungen aufhören, das Bewegliche wird die Fläche verlassen und sich wie ein vollkommen freier materieller Punkt bewegen. (Vergl. §§ 41 und 74.)

Die wirkliche Bewegung wird nun zwar immer dem Principe der virtuellen Verschiebungen genügen, allein wir haben keinen Beweis geliefert, dass dieses auch die Beschleunigung immer eindeutig bestimmt. Wir werden in der That an speciellen Fällen zeigen, dass die Beschleunigung manchmal erst indirect durch Zuziehung von Continuitätsbetrachtungen bestimmt werden muss. (§ 69.)

Da ein drei unabhängige Differentiale enthaltender

Differentialausdruck bereits nicht integrabel sein kann, so kann ein einzelner materieller Punkt bereits einer nicht holonomen Bedingung von der Form

$$\tau\, dt + \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz \leqq 0$$

unterworfen sein. Es gilt dann alles bisher Gesagte; nur dass ξ, η, ζ an die Stelle von $\partial \varphi / \partial x$, $\partial \varphi / \partial y$ und $\partial \varphi / \partial z$ treten. Nach dieser Vertauschung sind die Beschleunigungen und λ wieder aus den Gleichungen 103) und 104) zu bestimmen, denen noch die zwischen den Geschwindigkeitscomponenten geltende Gleichung

$$\tau + \xi \frac{dx}{dt} + \eta \frac{dy}{dt} + \zeta \frac{dz}{dt} = 0$$

beizuziehen ist. Der Widerstand der Vorrichtung hat immer die Richtung der Geraden, deren Richtungscosinus $\xi / \sigma, \eta / \sigma, \zeta / \sigma$ sind, wo $\sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ist. Wenn man dem Beweglichen alle möglichen unendlich kleinen Verschiebungen ertheilt, für welche $\xi\, \delta x + \eta\, \delta y + \zeta\, \delta z$ verschwindet, so liegen alle Punkte, wohin es dabei verschoben wurde, auf einer unendlich kleinen Ebene. Die Seite dieser Ebene, wohin es gelangt, wenn bei der Verschiebung $\xi\, \delta x + \eta\, \delta y + \zeta\, \delta z$ positiv ist, nennen wir die positive, die andere die negative Seite der Ebene. Der Widerstand der Vorrichtung wirkt wieder nach dieser positiven oder negativen Seite, je nachdem λ positiv oder negativ ist. Ersterer Fall kann nicht eintreten, wenn das Ungleichheitszeichen gilt.

§ 40. Das einfache Pendel.

Wir betrachten nun den ganz speciellen Fall, dass ein schwerer Punkt gezwungen ist, sich auf einer unveränderlichen Kugelfläche zu bewegen und ausser der Schwere und der Kraft, welche ihn zwingt, auf der Kugelfläche zu bleiben, sonst keine Kraft auf ihn wirkt. Die Kugelfläche habe ihren Mittelpunkt im Coordinatenursprunge und ihr Radius sei gleich l, so dass sie die Gleichung hat: $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$. Es ist also

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2.$$

Ferner ist dann, wenn wir die positive z-Axe vertical nach abwärts ziehen,

$$X = Y = 0, \quad Z = mg$$

und die Bewegungsgleichungen 103) und 104) verwandeln sich in

115) $m\frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x, \; m\frac{d^2y}{dt^2} = 2\lambda y, \; m\frac{d^2z}{dt^2} = 2\lambda z + mg.$

Die Addition der mit $-y$ multiplicirten ersten und der mit x multiplicirten zweiten Gleichung liefert:

116) $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k.$$

Die Addition der ersten, zweiten und dritten Gleichung, die erste mit $\frac{dx}{dt}$, die zweite mit $\frac{dy}{dt}$, die dritte mit $\frac{dz}{dt}$ multiplicirt aber liefert:

117) $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = H + 2gz;$$

denn da die Gleichung der Kugel zu jeder Zeit erfüllt sein muss, so folgt durch deren Differentiation:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0.$$

H und k sind Integrationsconstanten.

Die beiden Gleichungen 116) und 117) sind übrigens selbstverständlich; denn erstere drückt das Flächenprincip bezüglich der z-Axe aus, welches weder durch die Schwere, noch durch die stets durch die z-Axe gehende Widerstandskraft der Kugel gestört werden kann, letztere ist der Ausdruck des Princips der lebendigen Kraft, dessen Gültigkeit ebenfalls durch die Widerstandskraft der Kugel nicht beeinträchtigt wird.

Wir führen Polarcoordinaten ein, indem wir setzen

118) $x = l \sin w \cos \vartheta, \; y = l \sin w \sin \vartheta, \; z = l \cos w.$

Dann verwandeln sich die Gleichungen 116) und 117) in

119) $$\begin{cases} l^2 \sin^2 w \frac{d\vartheta}{dt} = k, \\ l^2\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + l^2 \sin^2 w \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - 2gl\cos w = H. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann $d\vartheta$ eliminirt werden und man erhält zunächst t durch Quadraturen durch w ausgedrückt. Mittelst der ersten dieser Gleichungen kann dann auch ϑ durch Quadraturen als Function von w gefunden werden, genau so wie bei der Centralbewegung.

Falls sich das Bewegliche nur wenig von der Ruhelage entfernt, also w sehr klein ist, werden die Gleichungen sogar mit den für die Centralbewegung gefundenen völlig identisch. Setzen wir in diesem Falle

$$r = lw, \quad H + 2gl = h,$$

so erhalten wir:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = k, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = h - \frac{g}{l} r^2.$$

Diese beiden Gleichungen stimmen genau mit den Gleichungen 36) und 37) des § 20, falls man in den letzteren setzt:

$$\varphi(r) = -\frac{mgr^2}{2l}.$$

Die Projection des materiellen Punktes auf die xy-Ebene bewegt sich daher genau so wie ein materieller Punkt, der mit der Kraft mgr/l gegen die Ruhelage gezogen wird. In der That überzeugt man sich leicht, dass die Componente des Gewichtes des materiellen Punktes in der Richtung tangential zur Kugelfläche angenähert diesen Werth hat, während die normal zur Kugelfläche von dem Widerstande derselben aufgehoben wird.

Wir sahen schon damals, dass die Bewegung in einer Ellipse geschieht, deren Mittelpunkt die Ruhelage ist und dass $\pi\sqrt{l/g}$ die Zeit ist, während welcher die Hälfte dieser Ellipse beschrieben wird. Man nennt diese Zeit die Schwingungsdauer des Pendels. Für beliebige, nicht kleine Werthe von w wollen wir nur den Fall behandeln, dass sich der materielle Punkt in einer verticalen Ebene bewegt, als welche man die xz-Ebene wählen kann; dann ist $\vartheta = 0$ und man erhält:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{H}{l^2} + \frac{2g}{l} \cos w,$$

woraus durch Differentiation folgt:

120) $$\frac{d^2 w}{d t^2} = -\frac{g}{l} \sin w.$$

Wenn überhaupt eine Bewegung möglich sein soll, so kann H nicht gleich $-2gl$ sein oder einen noch grösseren negativen Werth haben; es sind also drei Fälle möglich:

Erster Fall:

$$-2gl < H < +2gl.$$

Dann giebt es immer einen zwischen Null und π liegenden Winkel α, dessen Cosinus gleich $-H/2gl$ ist. Führt man diesen Winkel ein, so wird:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos w - \cos \alpha) = \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{w}{2}\right).$$

Da $\frac{dw}{dt}$ sein Zeichen nur wechseln kann, indem es durch Null geht, so muss w zwischen $+\alpha$ und $-\alpha$ hin- und herschwanken. Setzt man

$$\sin\frac{w}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi,$$

so folgt:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\, d\psi \left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wenn α, also die Amplitude der Schwingungen, nicht allzu gross ist, so liefert die Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze immer eine gut convergirende Reihe, welche man ohne Weiteres integriren kann. Die Schwingungsdauer (Zeit, während welcher w von $-\alpha$ bis $+\alpha$ wächst), erhält man, wenn man zwischen diesen Grenzen, also von $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ bis $\psi = +\frac{1}{2}\pi$ integrirt; sie ist also:

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\psi \left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatze und bedenkt, dass

$$2\sqrt{-1}\sin\psi = e^{\psi\sqrt{-1}} - e^{-\psi\sqrt{-1}},$$

daher

$$2^{2n}(-1)^n \sin^{2n}\psi = 2\binom{2n}{0}\cos 2n\psi -$$
$$- 2\binom{2n}{1}\cos(2n-2)\psi, \ldots (-1)^n\binom{2n}{n},$$

daher endlich:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n}(n!)^2}$$

ist, so folgt:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{a^2}{4} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.a^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}a^6\ldots\right),$$

wobei $a = \sin\frac{\alpha}{2}$ ist.

Zweiter Fall.

$$H = 2gl.$$

Dann folgt:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(1 + \cos w) = \frac{4g}{l}\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\text{lognat.}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi - w}{4}\right) + \text{const.}$$

Das Bewegliche nähert sich dann asymptotisch der Stelle, welche vertical über seiner Ruhelage liegt.

Dritter Fall. Es sei

$$H > 2gl.$$

Dann ist

$$dt = \sqrt{\frac{l}{H + 2gl}}\,dw\left(1 - \frac{4gl}{H + 2gl}\sin^2\frac{w}{2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

was man wieder nach dem binomischen Lehrsatze in eine stets convergirende Reihe entwickeln und dann integriren kann.

§ 41. Das Fadenpendel.

Die entwickelten Formeln gelten nur, wenn das Pendel die Kugelfläche nach keiner Seite hin verlassen kann. Als Prototyp der Bewegung beim Vorhandensein einer Ungleichung soll noch kurz der Fall betrachtet werden, wo

ein schwerer materieller Punkt an einem unausdehnbaren, vollkommen biegsamen Faden von der Länge l befestigt ist, dessen anderes Ende fix ist, so dass er die bisher besprochene Kugelfläche nach innen beliebig verlassen kann. Die Bewegung geschieht dann genau nach den früher entwickelten Gesetzen, so lange der Faden auf Spannung beansprucht wird, d. h. die vom Beweglichen auf die Vorrichtung ausgeübte Kraft vom Mittelpunkte der Kugel hinweg, also von der Seite, wo $x^2 + y^2 + z^2 < l^2$ gegen die, wo $x^2 + y^2 + z^2 > l^2$ ist, hin gerichtet ist, d. h. also, so lange λ negativ ist. In dem Momente, wo λ durch Null zu einem positiven Werthe übergeht, müsste der Faden das Bewegliche vom Mittelpunkte der Kugel hinweg drücken, damit es auf der Kugelfläche bleibe und da dies nicht möglich ist, verlässt es diese und beschreibt innerhalb derselben die gewöhnliche Fallparabel.

Wir behandeln nur den Fall, dass sich das Bewegliche in einer Ebene bewegt, welche wir zur xz-Ebene wählen, dass also $y = \vartheta = 0$ ist. Die Gleichungen 115) und 118) liefern, wenn wir wieder die Winkelgeschwindigkeit dw/dt mit ω bezeichnen,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -z\frac{d\omega}{dt} - x\omega^2 = \frac{2\lambda x}{m},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = x\frac{d\omega}{dt} - z\omega^2 = \frac{2\lambda z}{m} + g.$$

Die Addition der mit x multiplicirten ersten zu der mit z multiplicirten zweiten Gleichung liefert:

$$2l\lambda = -m\omega^2 l - \frac{mgz}{l}.$$

Dies ist die Inanspruchnahme des Fadens, so lange λ negativ ist, auf Zug, da die in Formel 111) mit σ bezeichnete Grösse in unserem Falle den Werth $2l$ hat. Man sieht auch sofort, dass das erste Glied die Centrifugalkraft, das zweite die Componente der Schwere in der Fadenrichtung ist. λ kann nur Null oder positiv werden für negative z also, wenn wir $-z = h$ setzen für positive h und zwar wird $\lambda = 0$ für:

121) $$h = \omega^2 l^2/g.$$

Wir wollen der zur Gleichung der lebendigen Kraft hinzutretenden Constante eine solche Form geben, dass diese Gleichung in der Gestalt

$$\text{122)} \qquad \frac{m l^2 \omega^2}{2} = m g (z + k)$$

erscheint. Dann ist also k die grösste Höhe über dem Kugelcentrum, bis zu welcher sich das Bewegliche vermöge der ihm innewohnenden lebendigen Kraft erheben kann und bis zu welcher es sich wirklich erhebt, falls es gezwungen ist, immer auf der Kugelfläche zu bleiben und nicht $k > l$ ist. Setzen wir in 122) wieder $z = -h$, so erhalten wir:

$$\frac{l^2 \omega^2}{g} = 2k - 2h.$$

Setzen wir hier h gleich der Höhe über dem Kugelmittelpunkte, bei welcher das Fadenpendel die Kugelfläche verlässt, so ist ω die Winkelgeschwindigkeit, bei welcher dies geschieht, hat also in der letzten Gleichung dieselbe Bedeutung wie in Gleichung 121) und es folgt aus beiden Gleichungen $h = 2k/3$. Das Fadenpendel kann also die Kugelfläche nur verlassen, wenn k positiv ist, d. h. wenn seine lebendige Kraft ausreicht, es über die durch den Kugelmittelpunkt gehende horizontale Ebene zu heben. Ist $0 < k < l$, so würde das Pendel, wenn es starr mit dem Kugelmittelpunkte verbunden wäre, in der Höhe k über der durch diesen gehenden Horizontalebene umkehren. Ist es aber durch einen biegsamen Faden verbunden, so verlässt er die Kugelfläche schon in der Höhe $2k/3$.

Ist $l < k < 3l/2$, so würde das Bewegliche im ersten Falle den ganzen Kreis beschreiben. Im zweiten Falle verlässt es ihn in der Höhe $2k/3$. Ist endlich $k \gtreqless 3l/2$, so verlässt das Bewegliche auch im zweiten Falle den Kreis nicht mehr. In den Fällen, wo das Bewegliche die Kugelfläche verlässt, folgt es der Fallparabel und trifft nach einiger Zeit die Kugelfläche wieder, aber nicht tangential, sondern unter einem gewissen Winkel. Dann hängt die Weiterbewegung davon ab, ob der Aufhängefaden des Pendels

vollkommen elastisch oder theilweise oder ganz unelastisch ist, also von Fragen, deren Beantwortung in unseren bisherigen Gleichungen nicht enthalten ist.

§ 42. Punkt, der gezwungen ist, auf einer räumlichen Curve zu bleiben.

Wir betrachten nun einen materiellen Punkt, welcher gezwungen ist, auf einer bestimmten räumlichen Curve zu bleiben. Die übrigen Bezeichnungen sollen dieselben wie in § 37 sein. Die Curve aber soll durch die beiden Gleichungen

123) $$\varphi_1(x, y, z, t) = 0$$

und

124) $$\varphi_2(x, y, z, t) = 0$$

charakterisirt sein. Es gilt wieder die Gleichung 101). Dazu kommen aber in dem Falle der Entwickelbarkeit beider Functionen φ nach dem Taylor'schen Lehrsatze die beiden Gleichungen

$$\delta x \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \delta y \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \delta z \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0$$

und

$$\delta x \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \delta y \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \delta z \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0.$$

Wir können die erste dieser Bedingungen mit dem Factor $-\lambda_1$, die zweite mit dem Factor $-\lambda_2$ multiplicirt, zur Gleichung 101) addiren, ferner λ_1 und λ_2 so wählen, dass in der so erhaltenen Gleichung die Coefficienten von δx und δy verschwinden. Dann muss auch der von δz verschwinden, denn dieses ist ja willkürlich, da blos zwei Gleichungen zwischen den drei Coordinatenvariationen bestehen. Die zwei Gleichungen, welche die gewünschte Eigenschaft der λ ausdrücken, vereint mit der, welche das Verschwinden des Coefficienten von δz anzeigt, lauten:

125) $$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2 x}{dt^2} &= X + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ m\frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{d y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ m\frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Diese drei Gleichungen verbunden mit den zwei Gleichungen 123) und 124) geben die fünf Gleichungen, welche zur Bestimmung der fünf Unbekannten $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ erforderlich sind. Die Elimination von λ_1 und λ_2 liefert zwischen den Coordinaten allein die Gleichung

126) $$\begin{vmatrix} m\frac{d^2 x}{dt^2} - X, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\ m\frac{d^2 y}{dt^2} - Y, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ m\frac{d^2 z}{dt^2} - Z, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Der Widerstand, welchen die Vorrichtung auf den materiellen Punkt ausübt, kann als die Resultirende zweier Kräfte aufgefasst werden. Die erste hat in den Coordinatenrichtungen die Componenten $\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$, steht also nach dem im § 38 Bewiesenen senkrecht auf der Fläche, welche die Gleichung 123) hat. Analog sind die Ausdrücke für die Componenten der zweiten Kraft, welche in Folge dessen auf der Fläche mit der Gleichung 124) senkrecht steht. Die Resultirende beider, d. h. der gesammte Widerstand der Curve muss also auf dieser, welche ja die Durchschnittslinie jener beiden Flächen ist, senkrecht stehen.

Die Bedingung des Gleichgewichts erhalten wir, indem wir die Beschleunigung gleich Null setzen. Das Verschwinden der Determinante, welche man so aus der Determinante 126) erhält, giebt die Bedingung, dass der Vector mit den Componenten X, Y, Z, also die auf das Bewegliche wirkende äussere Kraft auf der Durchschnittslinie der beiden Flächen mit den Gleichungen 123) und 124) senkrecht steht.

§ 43. Methode der Multiplicatoren, wenn beliebige Bedingungsgleichungen zwischen beliebigen Punkten bestehen.

Es hat nun keine Schwierigkeit, die Methode der unbestimmten Multiplicatoren auf den allgemeinen Fall anzuwenden, dass ein beliebiges materielles System beliebigen Bedingungen unterworfen ist. Sei zunächst das System

holonom und die Bedingungen durch Gleichungen ausgedrückt, dann können dieselben unter Beibehaltung der Bezeichnungen der §§ 34 und 35 in die Form gebracht werden:

$$127) \qquad \varphi_l(t, x_1, y_1, \ldots z_n) = 0, \quad l = 1, 2 \ldots \sigma,$$

wobei $\sigma < 3n$ sein muss, da sonst alle Coordinaten durch die Bedingungen bestimmt, also bis auf singuläre Fälle keine Bewegung möglich wäre. Die Functionen φ sollen nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickelbar sein.

In Relation 93) gilt dann das Gleichheitszeichen. Dazu treten die Bedingungen:

$$128) \quad \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_n}\delta z_n = 0, \quad l = 1, 2 \ldots \sigma.$$

Man multiplicirt nun die erste dieser Bedingungsgleichungen mit $-\lambda_1$, die zweite mit $-\lambda_2 \ldots$, addirt alle zur Relation 93) und wählt dann sämmtliche λ so, dass die Coefficienten von σ der Variationen verschwinden. Da gerade σ der Variationen durch die Bedingungsgleichungen bestimmt, die übrigen aber voneinander unabhängig sind, so müssen auch die Coefficienten aller übrigen Variationen verschwinden und man erhält die Bedingungsgleichungen in der Form:

$$129) \quad m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} = X_h + \sum_{l=1}^{l=\sigma} \lambda_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h}, \quad h = 1, 2 \ldots n$$

mit zwei analogen Gleichungen für die beiden übrigen Coordinatenaxen. Die Elimination der λ liefert die Bedingung, dass die Determinante von je $\sigma + 1$ Horizontalreihen der nachfolgenden Tabelle 130) verschwinden muss, was im Ganzen $3n - \sigma$ voneinander unabhängige Gleichungen liefert, welche wir, ohne sie hinzuschreiben, die Gleichungen 131) nennen wollen;

$$130) \quad \begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - X_1, \ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_1} \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - Y_1, \ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} - Z_n, \ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n}, \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_n} \ldots \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial z_n}. \end{cases}$$

Ist das System nicht holonom, haben also einige der Bedingungsgleichungen die Form 78), so ändert sich hieran nichts, als dass an Stelle der partiellen Ableitungen der betreffenden Functionen φ die Grössen $\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_n$ treten.

Hiermit sind die Bewegungsgleichungen in dem allgemeinsten Falle, wo ein System beliebiger materieller Punkte beliebigen holonomen oder nicht holonomen Bedingungen unterworfen ist, gefunden, sobald dieselben durch lauter Gleichungen ausgedrückt werden können, also darunter keine durch eine Ungleichung dargestellt wird.

Wenn sich aus den Bedingungen 78) σ der Coordinatendifferentiale bestimmen lassen, so können immer auch aus den Gleichungen 131) $3n - \sigma$ der Beschleunigungen gefunden werden. Wenn der Fall, dass durch die Bedingungen 78) nicht σ der Coordinatendifferentiale bestimmt sind, für ein endliches Werthegebiet der Variabeln eintritt, so sind nicht alle Bedingungsgleichungen voneinander verschieden.[1]) Diese müssen also auf weniger reducirt werden. Für einzelne singuläre Werthe dagegen kann dieser Fall allerdings eintreten, z. B. wenn zwischen den Coordinaten eines einzigen materiellen Punktes eine einzige Gleichung $\varphi(x, y, z, t) = 0$ besteht und alle partiellen Differentialquotienten des φ nach den Coordinaten verschwinden oder wenn zwischen denselben Coordinaten zwei Gleichungen $\varphi(x, y, z, t) = 0$ und $\psi(x, y, z, t) = 0$ bestehen und für gewisse Werthe von x, y, z und t die beiden durch diese Gleichungen dargestellten Flächen dieselbe Tangentialebene haben. Dann können aus dem Princip der virtuellen Verschiebungen aber mehr als $3n - \sigma$ Beschleunigungen bestimmbar sein. Alle diese Fälle, sowie die, dass einzelne der Coefficienten ξ, η, ζ der Gleichungen 78) unendlich oder unbestimmt werden oder die

---

[1]) Die bekannte analytische Bedingung dafür, dass von den Gleichungen $\varphi_1 = \varphi_2 \dots \varphi_\sigma = 0$ nicht alle voneinander unabhängig sind, ist ja, dass diejenigen Determinanten der Ausdrücke 130), welche die Coefficienten der Beschleunigungen in einer der Gleichungen 131) darstellen, sämmtlich verschwinden. Dann reducirt sich in der That eine der letzteren Gleichungen identisch auf Null und ist zur Bestimmung der Beschleunigungen ungeeignet.

Bedingungsgleichungen eine noch complicirtere Form annehmen, bedürfen natürlich einer besonderen Untersuchung und es würde uns zu weit führen, alle hier möglichen Fälle eingehend zu erörtern. Wie schon bei der Bewegung eines materiellen Punktes beim Vorhandensein einer Bedingungsgleichung (Anfang des § 39), so kann auch hier wieder sogar der Fall eintreten, dass die Aufgabe durch die geometrischen Bedingungen des Systems überhaupt nicht eindeutig bestimmt ist, z. B. wenn ein materieller Punkt gezwungen wäre, auf einer Curve zu bleiben, welche sich in zwei oder mehrere Aeste theilt, die sich am Verzweigungspunkte osculiren, also daselbst eine Berührung von der zweiten oder noch höheren Ordnung haben. Allein derartige Mehrdeutigkeiten sind nicht von praktischer Bedeutung, da sie niemals eintreten können, wenn die Bedingungen in der von uns vorausgesetzten Weise durch eine endliche, wenn auch sehr grosse Zahl von noch so plötzlich sich ändernden Verbindungskräften hergestellt werden. Sie können also nur durch den Grenzübergang zu einer unendlichen Zahl materieller Punkte entstanden sein.

Wir werden den Fall, dass auch beliebige Bedingungen vorhanden sind, die durch Ungleichheitszeichen ausgedrückt werden, erst im § 74 behandeln und uns früher mit einem wichtigen speciellen Falle beschäftigen.

V. Anwendung auf feste Körper.

§ 44. Bestimmung der Lage eines festen Körpers.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen für einen einzigen starren Körper, d. h. für ein System materieller Punkte entwickeln, welche so verbunden sind, dass sich während ihrer ganzen Bewegung ihre relative Lage nicht ändern kann, genauer gesprochen, dass jede sehr kleine Aenderung der relativen Lage so grosse innere Kräfte wach-

ruft, dass nie eine merkliche Aenderung der relativen Lage Platz greifen kann, wenn die äusseren Kräfte unter einer gewissen Grenze liegen (vergl. Anfang des § 32, der Körper ist fest für unter dieser Grenze liegende äussere Kräfte). Um auszudrücken, dass es absolut starre Körper nicht giebt, wollen wir den Körper immer einen festen nennen, obwohl wir ihn geometrisch so betrachten, als ob er absolut starr wäre.

Die Lage eines gegebenen festen Körpers im Raume ist durch die dreier Punkte desselben A, B, C, welche nicht in einer Geraden liegen, eindeutig bestimmt. Da der feste Körper gegeben ist, ist die Entfernung jedes anderen Massenpunktes desselben von jedem dieser drei Punkte gegeben und es ist auch gegeben, auf welcher Seite der Ebene der drei Punkte der andere Massenpunkt liegt, wenn er nicht in dieser Ebene liegt. Dadurch ist aber die Lage jedes anderen Massenpunktes gegeben. Es ist dabei nicht einmal nothwendig, dass die Punkte wirklich dem Körper angehören, einer, zwei oder alle drei können auch ausserhalb desselben liegen, wenn nur ihre relative Lage gegen den Körper unveränderlich gegeben ist, dessen sämmtliche Punkte ebenfalls gegebene unveränderliche Lage gegeneinander haben. Wenn die Lage dieser drei Punkte im Raume gegeben ist, so ist dadurch die Lage sämmtlicher materieller Punkte des Körpers bestimmt.

Wir können uns, um dies und ähnliche Sätze nicht fortwährend wiederholen zu müssen, unendlich viele, den ganzen Raum erfüllende Punkte starr mit dem Körper verbunden und sich mit demselben im Raume bewegt denken. Den Inbegriff dieser Punkte nennen wir den erweiterten festen Körper, nur in wenigen dieser Raumpunkte wird sich wirklich Materie befinden.

Zur Bestimmung der Lage des ersten Punktes A, welcher die Position des festen Körpers bestimmt, sind drei Variable (Coordinaten) erforderlich. Zur Bestimmung der Lage des zweiten Punktes B nur noch zwei, da die Entfernung AB gegeben ist. Zur Bestimmung der Lage des dritten Massenpunktes C ist nur noch eine Variable erforderlich, da dessen Entfernung von A und B dadurch ge-

geben ist, dass der feste Körper, d. h. die relative Lage aller seiner Massenpunkte gegeben ist. Der dritte Punkt muss daher in einem Kreise liegen, dessen Ebene senkrecht zur Geraden AB und dessen Radius der gegebene Abstand des Punktes von dieser Geraden ist.

Im Ganzen genügen also sechs Variable zur Bestimmung der Lage eines beliebigen festen Körpers. Ausgenommen davon sind die Grenzfälle, wo alle materiellen Punkte des festen Körpers in einer Geraden liegen oder wo dieser aus einem einzigen materiellen Punkte besteht. Dann genügen fünf resp. drei Variable. Doch wollen wir diese Grenzfälle im Allgemeinen von unseren Betrachtungen ausschliessen.

Da zwischen den materiellen Punkten des Körpers keine anderen Kräfte als die Verbindungskräfte wirken, so sind die expliciten Kräfte mit den von aussen auf den festen Körper wirkenden Kräften (den äusseren Kräften) identisch. Es sind also die Kräfte, deren Componenten in den Formeln 63) bis 70) mit $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$ bezeichnet wurden, mit denen, deren Componenten in den Formeln 81) bis 95) mit X_h, Y_h, Z_h bezeichnet wurden, identisch. Es werden jedenfalls die sechs Gleichungen 66) und 70) der §§ 27 und 29 gelten, welche also zur Berechnung der sechs die Lage des festen Körpers bestimmenden Variabeln ausreichen, so dass wir die Grundgleichungen schon besitzen.

§ 45. Parallelverschiebung und Drehung eines festen Körpers.

Um uns aber die zweckmässigste Wahl der sechs Variabeln zu erleichtern, ist es nothwendig, in die Geometrie der Bewegung eines festen Körpers näher einzugehen. Dabei bietet sich uns zugleich eine neue Ableitung der Gleichungen 66) und 70) aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten. Wenn jeder Punkt eines festen Körpers um eine gleich lange, gleich gerichtete Strecke verschoben wird, so ändert sich dabei die relative Lage sämmtlicher Punkte offenbar nicht. Eine solche Bewegung ist also jedenfalls eine mögliche Bewegung des festen Körpers. Sie heisse eine Parallelverschiebung desselben.

Wenn bei einer Verschiebung eines festen Körpers zwei ihm angehörende oder fest mit ihm verbunden gedachte Punkte A und B ihre Lage im Raume nicht ändern, so können auch alle in der Geraden AB liegenden, mit dem Körper fest verbunden gedachten Punkte ihre Lage nicht ändern, da sie sonst ihre Entfernung mindestens von einem der Punkte A oder B ändern müssten. Ein nicht auf der Geraden AB liegender Punkt des Körpers kann, da seine Entfernung von A und B unveränderlich ist, nur einen Bogen eines Kreises beschreiben, dessen Ebene senkrecht auf AB steht und dessen Mittelpunkt auf AB liegt. Da endlich auch die Entfernungen aller übrigen Punkte voneinander gleich bleiben müssen, so muss der Centriwinkel, welchem dieser Bogen gegenüber liegt, für alle Punkte des Körpers derselbe sein und alle Punkte müssen den Bogen auch in gleichem Sinne beschreiben. Die so definirte Bewegung eines festen Körpers, welche die einzig mögliche ist, wenn zwei Punkte desselben ihre Lage nicht ändern, heisst eine Drehung desselben. Die gerade Verbindungslinie der beiden in Ruhe bleibenden Punkte heisst die Drehungsaxe, der betreffende Centriwinkel der Drehungswinkel, wobei wir aber vorläufig nur die Anfangs- und Endlage, nicht den ganzen Process des Ueberganges ins Auge fassen.

Die Darstellung einer Parallelverschiebung durch einen Vector, d. h. durch eine Gerade von bestimmter Länge und Richtung bedarf keiner Erläuterung. Jede Gerade, welche die gleiche Länge und gleiche Richtung wie die Verschiebung irgend eines Punktes des Körpers hat, kann als solcher Vector dienen. Aber auch die Drehung eines Körpers kann durch einen Vector dargestellt werden, dessen Anfangspunkt jedoch nicht beliebig ist, sondern mit einem Punkte der Drehungsaxe zusammenfallen muss. Die Richtung des Vectors muss die Richtung der Drehungsaxe angeben. Die Grösse des Vectors muss proportional dem positiv vorausgesetzten Drehungswinkel w, also etwa gleich Γw sein, wobei Γ eine beliebige, aber für alle Drehungen gleich anzunehmende Länge ist.

Um durch den Sinn, in welchem der Vector von seinem Anfangspunkte aus gezogen ist, auch den Sinn der Drehung auszudrücken, soll die Richtung des Vectors immer so gewählt werden, dass die Drehung um ihn als Axe im positiven Sinne geschieht, dass sich also seine Richtung zur Drehungsrichtung so verhält, wie die der positiven z-Axe zur Drehung von der positiven x- auf kürzestem Wege zur positiven y-Axe. Wenn wir daher vom französischen Coordinatensystem Gebrauch machen, so soll für ein Auge, welches von dort herblickt, wohin der Vector zeigt, die Drehung im Sinne des Uhrzeigers geschehen.

Ist N der Abstand irgend eines Punktes des Körpers von der Drehungsaxe, w der Drehungswinkel und V der Vector, der die Drehung darstellt, so ist der Bogen, welchen der betreffende materielle Punkt beschreiben würde, wenn sich der Körper continuirlich aus der Anfangslage in die Endlage drehen würde:

132) $$Nw = NV/\Gamma,$$

wobei es natürlich ebenfalls gleichgültig ist, ob der betreffende Punkt wirklich dem Körper angehört oder blos starr damit verbunden gedacht wird. Die Punkte der Axe erfahren, wie schon bemerkt, keine Lagenänderung. Dieselbe kann auch ganz ausserhalb des Körpers liegen, muss aber dann starr mit demselben verbunden gedacht werden.

§ 46. Allgemeinste Verschiebung eines festen Körpers.

Jeder feste Körper kann aus jeder Lage in jede andere durch eine Parallelverschiebung und zwei Drehungen um zwei Axen gebracht werden, welche durch einen beliebig gegebenen Punkt des Raumes oder des Körpers gehen. In speciellen Fällen kann natürlich die Parallelverschiebung oder die Drehung verschwinden, d. h. wegzufallen haben. Wenn beide Drehungen wegfallen, wenn also der Körper von der ersten Lage in die zweite durch eine blosse Parallelverschiebung übergeführt werden kann, nennt man die zweite Lage eine Translation der ersten. Eine Bewegung eines festen Körpers, wobei jede Lage eine Translation der ersten ist, nennt man eine Translations-

bewegung. Dabei kann ein Punkt des Körpers noch eine beliebige Bahn beschreiben.

Sei A' der Punkt des Raumes, durch welchen die beiden Drehungsaxen gehen sollen. Derjenige Punkt a des festen Körpers, der sich in der Endlage in A' befindet, soll sich in der Anfangslage des Körpers in A befunden haben. Wir denken uns dabei den festen Körper immer in dem Sinne, wie wir dies früher definirt haben, erweitert, also den Punkt, welcher sich in der Anfangslage in A, in der Endlage in A' befindet, falls er nicht wirklich dem Körper angehört, mit diesem fest verbunden.

Wir betrachten nun den Körper zunächst in seiner Anfangslage und ertheilen ihm zuvörderst die Parallelverschiebung AA', welche natürlich wegfiele, wenn die Punkte A und A' zusammenfallen. Dabei schreiten alle Punkte des Körpers in derselben Richtung um das Stück AA' fort, der Punkt a des Körpers kommt also von A nach A'. Irgend ein anderer, dem festen Körper angehöriger oder in Gedanken damit starr verbundener Punkt b, welcher in der Anfangslage des Körpers in B war, komme durch jene Parallelverschiebung allein nach B''. In der Endlage des festen Körpers wird er sich im Allgemeinen nicht in B'', sondern in B' befinden, wobei aber $A'B' = A'B''$ sein muss, da die Punkte a und b fest verbunden sind. Man drehe nun den Körper um eine durch A' gehende, auf der Ebene $B'A'B''$ senkrechte Axe um einen solchen Winkel, dass der Punkt b des Körpers von B'' nach B' gelangt. Da die Axe durch den Punkt A' geht, so verändert letzterer dabei seine Lage nicht weiter; es wurden also schon die beiden Punkte a und b des Körpers in diejenige Lage gebracht, die sie in dessen Endlage haben müssen. Wenn der Punkt b schon nach der Parallelverschiebung dort war, wo er sich in der Endlage des Körpers befinden soll, so entfällt natürlich wieder diese Drehung.

Ein dritter Punkt c, der dem starren Körper angehört oder fest damit verbunden zu denken ist und der nicht mit den Punkten a und b in derselben Geraden liegen soll, sei in der Anfangslage des Körpers in C gewesen, durch die

Parallelverschiebung AA' nach C''', durch die erste Drehung nach C'' gelangt, während er in der definitiven Endlage des Körpers in C' sein soll. Man denke sich nun den Körper, nachdem er schon die Parallelverschiebung AA' und die erste Drehung erfahren hat, um eine Axe, welche durch die beiden Punkte A' und B' geht, um einen solchen Winkel gedreht, dass auch der Punkt c von C'' nach C' übergeführt wird. Nun sind drei Punkte des starren Körpers, die nicht in einer Geraden liegen, an diejenigen Stellen gelangt, welche sie in der Endlage des Körpers einnehmen müssen, folglich ist der ganze Körper in seine Endlage übergeführt worden, da dessen Lage durch die dieser drei Punkte bestimmt ist.

Wenn also Anfangslage und Endlage gegeben sind, so können wir immer eine gewisse Parallelverschiebung und zwei Drehungen um zwei durch einen beliebig gegebenen Punkt gehende Axen finden, welche den festen Körper aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage überführen. Falls der Punkt C'' ohnedies schon mit C' zusammenfiele, würde die dritte Drehung in Wegfall kommen.

§ 47. Zusammensetzung zweier Drehungen.

Wenn ein fester Körper nacheinander zwei Drehungen um zwei Axen erfährt, die sich in einem Punkte schneiden, so kann die gesammte Lagenänderung, welche er dadurch erhält, immer durch eine einzige Drehung um eine andere, ebenfalls durch diesen Punkt gehende Axe ersetzt werden. Sei A der Punkt, wo sich die beiden Axen schneiden. Wir construiren um A als Mittelpunkt eine Kugelfläche vom Radius 1. Dieselbe werde von den beiden gegebenen Drehungsaxen in den Punkten B_1 und B_2 durchstochen. w_1 und w_2 seien die beiden Winkel, um welche der Körper nacheinander um diese Axen gedreht werden soll. Wir construiren auf der Kugel mit dem Radius 1 die beiden grössten Kreise K_1 und K_2, welche durch B_1 gehen und mit dem grössten Kreise $B_1 B_2$ nach der einen und der anderen Seite hin den Winkel $\frac{1}{2} w_1$ bilden. Von dem Bogen $B_1 B_2$ komme man nach K_2 auf kürzestem Wege im Sinne der Drehung, die der feste Körper um die Axe AB_1 macht,

nach K_1 im entgegengesetzten Sinne (Fig. 14). Ebenso construiren wir die beiden grössten Kreise K_3 und K_4, welche beide durch B_2 gehen und den Winkel $\frac{1}{2} w_2$ mit $B_2 B_1$ einschliessen, so dass man wieder von $B_2 B_1$ nach K_3 auf kürzestem Wege so gelangt, wie sich der Körper um die Axe $A B_2$ dreht. Es seien C_1 und C_2 diejenigen Durchschnittspunkte der grössten Kreise K_1 und K_3 resp. K_2 und K_4, welche den Punkten B_1 und B_2 am nächsten liegen. Derjenige Punkt des festen Körpers, welcher sich anfangs in C_1 befand, wird durch

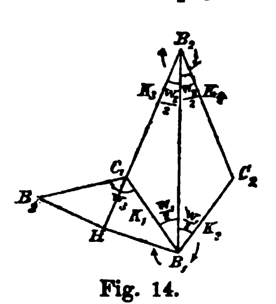


Fig. 14.

die Drehung, welche der Körper um die Axe $A B_1$ erfährt, nach C_2, durch die darauffolgende Drehung um $A B_2$ aber wieder nach C_1 zurückgeführt und da auch der Punkt A durch beide Drehungen keine Lagenänderung erfährt, so kann die gesammte durch beide Drehungen erzeugte Lagenänderung jedenfalls auch durch eine einzige Drehung um die Axe $A C_1$ erzeugt werden, welche wir die resultirende der beiden ursprünglich gegebenen Drehungen nennen wollen. Die Grösse des entsprechenden Drehungswinkels kann leicht gefunden werden. Der Punkt des festen Körpers, welcher anfangs in B_1 lag, erfährt durch die erste Drehung keine Lagenänderung. Durch die zweite um die Axe $A B_2$ soll er den Bogen $B_1 B_3$, dessen Halbirungspunkt H sei, beschreiben. Durch die resultirende Drehung muss dieser Punkt des festen Körpers ebenfalls nach B_3 übergeführt werden. Es muss also der Winkel

$$w_3 = B_1 C_1 B_3 = 2 B_1 C_1 H$$

der Drehungswinkel der resultirenden Drehung sein. Man sieht, dass durch diese resultirende Drehung die drei Punkte des festen Körpers, welche sich anfangs in C_1 und B_1 und im Kugelmittelpunkte A befanden und welche wir, falls sie nicht dem Körper selbst angehören, mit diesem starr verbunden denken können, in dieselben Lagen übergeführt werden, als ob der Körper zuerst die gegebene Drehung

um die Axe $A B_1$, dann die um die Axe $A B_2$ machte, womit bewiesen ist, dass der Körper durch die resultirende Drehung allein genau in dieselbe schliessliche Lage übergeführt wird, wie durch die beiden gegebenen Drehungen, welche wir die zusammensetzenden Drehungen oder die Componenten nennen wollen.

Aus dem sphärischen Dreiecke $B_1 B_2 C_1$ finden wir:

$$\sin(B_1 A C_1) : \sin(B_2 A C_1) = \sin\frac{w_2}{2} : \sin\frac{w_1}{2}$$

und

$$\cos\frac{w_3}{2} = \cos\frac{w_1}{2}\cos\frac{w_2}{2} - \frac{\sin w_1}{2}\sin\frac{w_2}{2}\cos(B_1 A B_2).$$

Mit Rücksicht hierauf lassen sich die beiden Drehungen des Lehrsatzes des § 46 immer durch eine einzige ersetzen. Dieser Lehrsatz kann daher auch so ausgesprochen werden: Jeder feste Körper kann aus jeder gegebenen Lage in jede andere durch eine passend gewählte Parallelverschiebung und eine einzige Drehung übergeführt werden. Dabei kann noch ein Punkt vorgeschrieben werden, durch welchen die Drehungsaxe gehen muss. Ihre Lage im Raume und der Drehungswinkel sind aber dann bestimmt.

§ 48. Die Drehungen sind unendlich klein.

Die Formeln für die Lage der Axe und Grösse des Winkels der resultirenden Drehung vereinfachen sich, wenn die beiden Drehungswinkel w_1 und w_2 der ursprünglich gegebenen Drehungen sehr klein sind. Dann fällt die Axe $A C_1$ in die Ebene der beiden anderen Drehungsaxen AB_1 und AB_2. Ferner wird dann

$$\sin(B_1 A C_1) : \sin(B_2 A C_1) = w_2 : w_1$$

und

$$w_3^2 = w_1^2 + w_2^2 + 2 w_1 w_2 \cos(B_1 A B_2).$$

Stellt man sich jetzt die drei Drehungen durch Vectoren dar, indem man vom Punkte A aus auf der Axe $A B_1$ eine Strecke von der Länge Γw_1, auf der Axe $A B_2$ eine Strecke von der Länge Γw_2, auf der Axe $A C_1$ eine Strecke von der Länge Γw_3 aufträgt, so sieht man, dass der Vector, welcher die resultirende Drehung darstellt, aus den Vectoren,

welche die Componenten darstellen, durch dieselbe Construction gefunden wird wie die Resultirende aus zwei gegebenen Kräften.[1]) Es ist dann auch gleichgültig, welche der beiden zusammensetzenden Drehungen früher und welche nachher erfolgt, während dies bei endlichen Drehungen für die Lage der resultirenden Drehungsaxe nicht gleichgültig ist. Bei endlichen Drehungen ist ferner nur bei gegebener Anfangsposition die Endposition, welche der Körper in Folge

[1]) Man führt für sehr kleine Drehungen diesen Beweis einfacher so. In Fig. 15 soll $A B_1 C B_2$ ein Parallelogramm sein. Ferner seien CD, CE, $B_1 G$ und $B_1 F$ senkrecht auf AB_1, AB_2, AC und AB_2 resp. Es sollen nun die drei Vectoren AB_1, AB_2, AC der Fig. 15 drei unendlich kleine Drehungen eines beliebigen festen Körpers um die betreffenden Axen im Sinne der den Scheibchen beigesetzten Pfeile darstellen. $w_1 = \Gamma . A B_1$, $w_2 = \Gamma . A B_2$, $w_3 = \Gamma . A C$ seien die entsprechenden Drehungswinkel. Der Punkt A des festen Körpers erfährt in Folge aller drei Drehungen keine Verschiebung. Der Punkt C erfährt in Folge der ersten Drehung die unendlich kleine Verschiebung $w_1 . CD = \Gamma . AB_1 . CD$ hinter die Ebene der Zeichnung, in Folge der zweiten Drehung die Verschiebung $w_2 . CE = \Gamma . A B_2 . CE$ vor die Ebene der Zeichnung, beide senkrecht zu dieser Ebene. Da, wie man leicht beweist, diese beiden Grössen gleich sind, so erfährt er in Folge der beiden Drehungen zusammen keine Verschiebung, also dieselbe, die er durch die Drehung $A C$ allein erfahren würde. Der Punkt B_1 endlich erfährt durch die erste Drehung keine Verschiebung, durch die zweite die Verschiebung $w_2 . B_1 F = \Gamma . A B_2 . B_1 F$, in Folge der dritten die Verschiebung $w_3 . B_1 G = \Gamma . A C . B_1 G$, beide senkrecht zur Zeichnungsebene vor dieselbe. Aus der Gleichheit der beiden Dreiecke $A B_2 B_1$ und $A C B_1$, welche beide halb so gross als das Parallelogramm $A B_1 C B_2$ sind, folgt die Gleichheit dieser beiden Verschiebungen, da der Flächeninhalt des ersten Dreiecks gleich $AB_2 . B_1 F$, der des zweiten gleich $A C . B_1 G$ ist. Es erfahren daher alle drei Punkte A, C und B_1 und daher auch der ganze Körper in Folge der Drehung $A C$ dieselbe Lagenänderung wie in Folge der beiden Drehungen $A B_1$ und $A B_2$ zusammen. Der letztere Schluss würde hinfällig, wenn die drei Punkte A, B_1, B_2 in dieselbe Gerade fielen. Doch überzeugt man sich leicht, dass der Lehrsatz auch dann richtig ist, da sich dann die Drehungen einfach addiren oder subtrahiren.

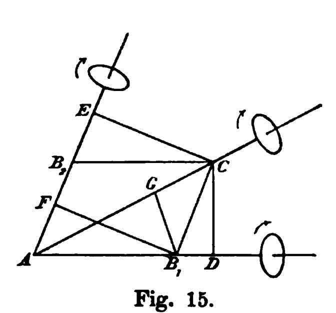


Fig. 15.

der resultirenden Drehung annimmt, gleich der, welche er annimmt, wenn er zuerst die erste, dann die zweite der zusammensetzenden Drehungen erfährt. Bei unendlich kleinen Drehungen dagegen ist die resultirende Drehung fortwährend den Componenten äquivalent; genauer gesprochen: Wenn sich der Körper zuerst um $\frac{1}{n}$ des Winkels w_1 um die Axe AB_1, dann um $\frac{1}{n}$ des Winkels w_2 um die Axe AB_2 dreht, so erfährt er bis auf unendlich Kleines zweiter Ordnung wiederum dieselbe Lagenänderung, als wenn er sich um $\frac{1}{n}$ des Winkels w_3 um die Axe AC_1 dreht und dasselbe gilt, wenn er sich abermals um $\frac{1}{n}$ dieser Winkel dreht, bis die ganzen Winkel beschrieben sind.

Alle Sätze über Zerlegung und Zusammensetzung von Kräften folgen aus dem Satze vom Kräftenparallelogramme und sind daher unverändert auf unendlich kleine Drehungen anwendbar, wenn letztere in der geschilderten Weise durch Vectoren dargestellt werden. Man kann beliebig viele unendlich kleine Drehungen um Axen, die sich in einem Punkte schneiden, zu einer einzigen Resultirenden zusammensetzen oder eine Drehung in beliebig viele Componenten um derartige Axen zerlegen. Unter anderen kann man eine beliebige unendlich kleine Drehung um eine Axe, die durch den Coordinatenursprung geht, in drei zusammensetzende Drehungen um die drei Coordinatenaxen zerlegen, wobei die Pfeile, welche die Drehungen darstellen, so gefunden werden, als ob sie Kräfte darstellten.

§ 49. Allgemeine Bewegungsgleichungen für einen festen Körper.

Nach dem Gesagten ist es ein Leichtes, die analytische Form für die virtuelle Verschiebung eines festen Körpers zu finden, dessen Theile sonst keiner Bedingung unterworfen sind, als dass sie sämmtlich starr verbunden sind. Wir können jede beliebige unendlich kleine Verschiebung des Körpers erzeugen durch eine Parallelverschiebung und eine

Drehung um eine Axe, die durch den Coordinatenursprung geht. Die Parallelverschiebung können wir in drei Verschiebungen nach den drei Coordinatenrichtungen um die Stücke $\delta\xi$ resp. $\delta\eta$, $\delta\zeta$ zerlegen, die Drehung in drei zusammensetzende Drehungen um die drei Coordinatenaxen um die Winkel $\delta\alpha$ resp. $\delta\beta$ und $\delta\gamma$. Diese sechs Grössen

133) $$\delta\xi,\ \delta\eta,\ \delta\zeta,\ \delta\alpha,\ \delta\beta,\ \delta\gamma$$

können offenbar ganz unabhängig voneinander ganz beliebige Werthe haben.

Den Coefficienten von $\delta\xi$ im Ausdrucke 93) finden wir, indem wir alle übrigen der Grössen 133) gleich Null setzen. Es werden dann die Variationen der x-Coordinaten für alle Punkte untereinander gleich und gleich $\delta\xi$, alle anderen Coordinatenvariationen aber gleich Null. Die linke Seite des Ausdruckes 93) verwandelt sich daher in:

$$\delta\xi\sum_{h=1}^{h=n}\left(m_h\frac{d^2x_h}{dt^2}-X_h\right).$$

Der Coefficient von $\delta\xi$ muss verschwinden, da die sechs Variabeln 133) vollkommen voneinander unabhängig sind. Daher folgt:

$$\sum_{h=1}^{h=n} m_h\frac{d^2x_h}{dt^2}=\sum_{h=1}^{h=n}X_h,$$

was mit der ersten der Gleichungen 64) identisch ist.

Ebenso folgen die entsprechenden, auf die anderen Coordinatenaxen Bezug habenden Gleichungen.

Häufig, besonders wenn nach mehreren Indices zu summiren ist, entstehen leicht Verwirrungen, wenn man nicht jede Grösse, die in den verschiedenen Gliedern der Summe einen verschiedenen Werth hat, durch einen angehängten Index bezeichnet. Hier ist jedoch die Sache so einfach, dass wir künftig den Index h und die Grenzwerthe über und unter dem Summenzeichen weglassen wollen, ohne einen Irrthum zu befürchten, wie die Summe zu bilden ist.

Dazu kommt noch folgender Umstand: Es kann sein, dass auf diejenigen materiellen Punkte des Körpers keine

äusseren Kraft wirkt, welche gerade dessen Hauptmasse ausmachen. Andererseits können die Punkte, auf welche die äusseren Kräfte wirken, durch Stangen von verhältnissmässig kleiner Masse mit dem Körper verbunden sein, was zur Fiction führt, dass sie durch massenlose Vorrichtungen starr damit verbunden sind, dass also die Massenpunkte des Körpers andere als die Angriffspunkte der Kräfte sind. Dann ist es oft bequemer, die Summation nach den Massen nur über die ersteren, die über die Kräfte nur über die letzteren Punkte zu erstrecken, obwohl man auch dann beide Summen über alle Punkte erstrecken und für die ersteren einfach die Kräfte, für die letzteren die Massen gleich Null setzen kann. Wir schreiben also statt der letzten Formel einfach

134) $$\sum m \frac{d^2 x}{d t^2} = \sum X.$$

Um den Coefficienten von $\delta\alpha$ im Ausdrucke 93) zu finden, haben wir wieder alle anderen der Grössen 133) bis auf $\delta\alpha$ gleich Null zu setzen und die in diesem Falle auftretenden Zuwächse der Coordinaten der verschiedenen Punkte des Körpers zu bestimmen. Diese Coordinatenzuwächse sind diejenigen, welche eintreten, wenn der Körper keine andere Lagenänderung als eine Drehung um den unendlich kleinen Winkel $\delta\alpha$ um die Abscissenaxe in dem Sinne erfährt, in dem man auf kürzestem Wege von der positiven y- zur positiven z-Axe gelangt. Dabei beschreibt ein Punkt, der die Coordinaten x, y, z hat und sich in der Entfernung r von der Abscissenaxe befindet, einen unendlich kleinen Kreisbogen von der Länge $r\delta\alpha$, der senkrecht auf der Geraden r steht. Die Projectionen dieses Bogens auf die drei Coordinatenrichtungen sind daher: Null, $-z\delta\alpha$, $y\delta\alpha$. Die Veränderungen der Coordinaten des in Rede stehenden Punktes sind daher

135) $$\delta x = 0, \quad \delta y = -z\delta\alpha, \quad \delta z = y\delta\alpha.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht die linke Seite der Relation 93) über in:

$$\delta\alpha \sum \left[m \left(y \frac{d^2 z}{d t^2} - z \frac{d^2 y}{d^2 t} \right) + z Y - y Z \right].$$

Hier muss wieder der Coefficient von $\delta\alpha$ verschwinden, wodurch sich die mit der Gleichung 70) identische Gleichung:

$$136)\quad \frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\sum(yZ-zY)$$

ergiebt. Die sechs Gleichungen, welche man erhält, wenn man zu den Gleichungen 134) und 136) die analogen für die y- und z-Axe hinzufügt, sind also nothwendig und hinreichend, um die sechs zur Bestimmung der Lage eines festen Körpers erforderlichen Variabeln als Functionen der Zeit zu finden, wenn die Anfangswerthe der Variabeln selbst und ihrer Differentialquotienten nach der Zeit, sowie die äusseren Kräfte gegeben sind. Die letzteren kommen nur in den sechs Ausdrücken

$$137)\quad \begin{cases} A=\sum X, \quad B=\sum Y, \quad C=\sum Z, \\ D=\sum(yZ-zY), \quad E=\sum(zX-xZ), \\ F=\sum(xY-yX) \end{cases}$$

vor, welche wir schon in § 29 die Componentensummen und die Momente der Kräfte bezüglich der Coordinatenaxen genannt haben. Wenn daher ein beliebiges anderes System von Kräften auf denselben festen Körper wirkt, dessen Theilchen dieselben Positionen, Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen haben, so wird derselbe, wenn zur betreffenden Zeit für das zweite Kraftsystem diese sechs Grössen dieselben Werthe wie für das erste haben, durch dasselbe die gleichen Beschleunigungen wie durch das erste erfahren. Man sagt dann, beide Kräftesysteme sind einander äquivalent. Wenn dies durch eine längere Zeit gilt und die Positionen, Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen aller materiellen Punkte zu Anfang dieser Zeit die gleichen sind, so wird der Körper unter dem Einflusse des einen oder des anderen Kraftsystems während der ganzen Zeit dieselbe Bewegung machen.[1])

---

[1]) Wenn ein Kräftesystem K einem anderen A äquivalent ist, so erzeugt, wie man sofort aus unseren Gleichungen sieht, auch K mit einem dritten Kräftesysteme K' zusammen dieselbe Bewegung, wie A mit K' zusammen. Speciell wenn sich K und K' das Gleichgewicht halten, so halten sich auch A und K' das Gleichgewicht.

So ist jede Kraft einer gleichen gleichgerichteten äquivalent, wenn die Verbindungslinie beider Angriffspunkte in die Richtung der Kräfte fällt. Man sagt, der Angriffspunkt jeder Kraft kann bei ungeänderter Grösse und Richtung derselben nach jedem anderen in ihrer Richtung liegenden Punkte versetzt werden, ohne deren Wirkung auf den festen Körper zu ändern; denn dadurch werden weder die Grössen A, B, C, noch die Momente der betreffenden Kraft bezüglich der Coordinatenrichtungen verändert. Letzteres folgt unmittelbar aus der in § 29 durch die Gleichung 71) gegebenen geometrischen Definition des Momentes.

Lässt man irgend ein Kraftsystem und gleichzeitig ein damit äquivalentes, in dem man aber die Richtung jeder Kraft ohne Aenderung der Grösse umgekehrt hat, auf den Körper wirken, so haben alle sechs Grössen 137) den Werth Null; der Körper bewegt sich also gerade so, als ob gar keine Kräfte auf ihn wirkten, wobei selbstverständlich, wenn der Körper nicht ruht, im Allgemeinen nicht die Beschleunigungen aller Punkte desselben Null sein werden. Jedes Kräftesystem hält daher einem umgekehrten äquivalenten das Gleichgewicht (vergl. Schluss des § 35, sowie §§ 70 und 73). Alle Kräfte eines auf einen festen Körper wirkenden Kräftesystems werden sich das Gleichgewicht halten, wenn die sechs Grössen 137) verschwinden. Der feste Körper wird dann, wenn anfangs alle seine Punkte in Ruhe waren, in Ruhe bleiben, wenn er in Bewegung war, sich so bewegen, als ob keine Kräfte auf ihn wirkten, oder wenn das Gleichgewicht nur in einem bestimmten Zeitmomente herrschte, so werden alle seine Punkte in diesem Zeitmomente dieselbe Beschleunigung erfahren, als ob in diesem Zeitmomente keine Kräfte auf ihn wirkten.

Es sei hier noch ein Satz erwähnt, der später in der Elasticitätslehre Anwendung findet. Wenn auf einen festen Körper gewisse Kräfte wirken, so wird er im Allgemeinen durch dieselben ein wenig deformirt. Wenn er nach der Deformation ruht und sich die Kräfte das Gleichgewicht halten, so kann dieses dadurch nicht gestört werden, dass man die Theile des Körpers in der Lage, die sie nach der

Deformation angenommen haben, beliebig starr verbindet. Denn die Theilchen üben ohnedies schon solche innere Kräfte aufeinander aus, welche den äusseren das Gleichgewicht halten. Durch die starre Verbindung würden sie dazu noch befähigt, bei der kleinsten Aenderung ihrer Entfernung Verbindungskräfte von beliebiger Grösse aufeinander auszuüben. Sie sind also um so mehr noch fähig, die Kräfte, welche sie ohnedies schon aufeinander ausüben, weiter ungeändert auszuüben.

§ 50. Wann haben Kräfte, die auf einen festen Körper wirken, eine Resultirende?

Wir können nach dem Gesagten auch die Frage beantworten, wann sich ein auf einen festen Körper wirkendes System von Kräften durch eine einzige Kraft ersetzen lässt, welche also, wenn dies nur für einen Zeitmoment gilt, während dieses Zeitmomentes dieselbe Beschleunigung jedes Punktes des Körpers erzeugt. Wenn sich aber das während jedes Zeitmomentes einer endlichen Zeit auf den festen Körper wirkende System von Kräften durch eine einzige Kraft ersetzen lässt, die natürlich in Grösse und Richtung mit der Zeit veränderlich sein kann, so erzeugt dieselbe während jener ganzen Zeit bei gleichen Anfangsbedingungen dieselbe Bewegung, wie das System von Kräften. Man sagt dann, diese einzige Kraft ist dem Kraftsysteme äquivalent oder sie ist eine Resultirende desselben.

Dazu ist erforderlich, dass die sechs Grössen 137) für die eine Kraft (die Resultirende) dieselben Werthe haben, wie für das gegebene Kraftsystem. Es müssen also A, B, C die Componenten der Resultirenden nach den drei Coordinatenrichtungen sein. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten ihres Angriffspunktes, so muss ferner:

$$138)\quad \eta C - \zeta B = D,\ \zeta A - \xi C = E,\ \xi B - \eta A = F$$

sein. Hierbei sind A, B, C, D, E, F die Werthe der sechs Grössen 137) für das gegebene Kraftsystem. Addirt man die Gleichungen 138), nachdem man die erste mit A, die zweite mit B, die dritte mit C multiplicirt hat, so folgt:

$$139)\qquad AD + BE + CF = 0.$$

Diese Gleichung muss also zwischen den sechs durch das gegebene Kräftesystem bedingten Grössen 137) nothwendig erfüllt sein, wenn dieses überhaupt durch eine einzige Kraft ersetzbar sein soll, d. h. wenn überhaupt eine Resultirende existiren soll. Ist sie erfüllt und wenigstens eine der Grössen A, B, C von Null verschieden, so existirt immer eine Resultirende. Ist z. B. A von Null verschieden, so folgt aus den beiden letzten der Gleichungen 138)

140) $$\eta = \frac{\xi B}{A} - \frac{F}{A}, \quad \zeta = \frac{\xi C}{A} + \frac{E}{A}$$

und die Substitution dieser Werthe zeigt, dass auch die erste der Gleichungen 138) erfüllt ist. Da zwischen den drei Coordinaten des Angriffspunktes der Resultirenden nur die zwei Gleichungen 140) bestehen, so ist diese zwar in Grösse und Richtung bestimmt, als Angriffspunkt derselben kann aber jeder beliebige Punkt der durch die Gleichungen 140) bestimmten Geraden, welche die Richtung der Resultirenden hat, gewählt werden. Dass, wenn eine Resultirende existirt, auch jeder andere Punkt ihrer Richtung als Angriffspunkt gewählt werden kann, folgt natürlich schon aus dem Satze über die Versetzbarkeit von Kräften an festen Körpern. Falls der gewählte Angriffspunkt der Resultirenden nicht ohnehin schon dem festen Körper angehören würde, müsste er natürlich fest damit verbunden gedacht werden (durch massenlose Versteifungen etc.). Denn unsere Formeln gelten nur für Punkte, welche fest mit dem Körper verbunden sind.

Falls $A = B = C = 0$ ist, können die Gleichungen 138) nur erfüllt sein, wenn auch $D = E = F = 0$, wenn also die Kräfte des gegebenen Kräftesystems sich untereinander das Gleichgewicht halten. Die Resultirende ist dann natürlich Null.

Ein specielles Beispiel liefert der Fall, dass alle Kräfte, welche auf einen festen Körper wirken, untereinander parallel sind. Wir wollen dann mit a, b, c die Richtungscosinus einer mit ihnen parallelen Geraden G bezeichnen, welche wir, wenn alle Kräfte im selben Sinne wirken, ebenfalls in diesem Sinne ziehen. Wenn nicht, so wollen wir sie in dem Sinne ziehen, dass die Summe der Intensitäten der im gleichen

Sinne wirkenden Kräfte grösser ist als die Summe der im entgegengesetzten Sinne wirkenden Kräfte. Dann ist

$$X = aP, \quad Y = bP, \quad Z = cP.$$

Dabei ist P die Kraft, welche auf irgend einen Punkt des Körpers, dessen Coordinaten x, y, z sind, wirkt. Wir geben ihr das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem sie die Richtung der Geraden G oder die entgegengesetzte hat. X, Y, Z sind die Componenten der Kraft P in den Coordinatenrichtungen. Der Factor a ist für alle Kräfte gleich, ebenso b und c. Es ist also

$$A = a\sum P, \quad B = b\sum P, \quad C = c\sum P,$$
$$D = b\sum zP - c\sum yP, \quad E = c\sum xP - a\sum zP,$$
$$F = a\sum yP - b\sum xP.$$

Die Bedingung 139) ist also erfüllt und es existirt immer eine Resultirende, wenn nicht $A = B = C = 0$, also $\sum P = 0$ ist, von welchem Falle später die Rede sein soll.

Die Intensität der Resultirenden ist $\sum P$, also die algebraische Summe der Intensitäten aller Einzelkräfte. Dieselbe hat die Richtung der Geraden G, ist also parallel den gegebenen Kräften und wirkt in dem Sinne, für welchen die Summe der Intensitäten der dahin gerichteten Kräfte grösser ausfällt. Die Gleichungen 140) reduciren sich auf

$$\frac{1}{a}\left(\xi - \frac{\sum xP}{\sum P}\right) = \frac{1}{b}\left(\eta - \frac{\sum yP}{\sum P}\right) = \frac{1}{c}\left(\zeta - \frac{\sum zP}{\sum P}\right).$$

Diese Gleichungen sind sicher erfüllt, wenn

141) $$\xi = \frac{\sum xP}{\sum P}, \quad \eta = \frac{\sum yP}{\sum P}, \quad \zeta = \frac{\sum zP}{\sum P}$$

ist. Der Punkt, dessen Coordinaten durch diese Gleichungen bestimmt sind, heisst der Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Er kann als Angriffspunkt der Resultirenden gewählt werden. Als solcher kann auch jeder andere Punkt der durch ihn der Richtung der Kräfte parallel gezogenen Geraden gewählt werden. Der erstere Angriffspunkt hat jedoch einen besonderen Vorzug. Die durch die Gleichungen 141) gegebenen Werthe seiner Coordinaten sind nämlich unabhängig von a, b, c, also von der Richtung der parallelen Kräfte. Er hört also nicht auf, Angriffspunkt der Resultirenden zu

sein, wenn sich blos diese Richtung ändert, d. h. wenn die Intensität jeder der Kräfte unverändert bleibt und auch jede unverändert auf denselben Punkt des Körpers wirkt, sich aber die Richtung aller Kräfte in gleicher Weise ändert, so dass alle parallel bleiben und auch die Gleichgerichteten wieder gleichgerichtet sind.

Da nur die relative Lagenänderung maassgebend ist, so bleibt der Mittelpunkt auch Angriffspunkt der Resultirenden, wenn er mit dem Körper fest verbunden ist und letzterer sich beliebig dreht oder im Raume verschiebt, sobald dabei auch die Angriffspunkte der auf ihn wirkenden parallelen Kräfte fest mit dem Körper verbunden sind und letztere weder Grösse noch Richtung ändern.

Wir haben bisher den Fall ausgeschlossen, dass $\sum P = 0$ ist. In diesem Falle wird $A = B = C = 0$. Eine Resultirende existirt, wie wir sahen, dann nur, wenn auch $D = E = F = 0$ ist, d. h. die gegebenen Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

§ 51. Specielle Fälle paralleler Kräfte.

Als ganz specielles Beispiel erwähnen wir den Fall, dass zwei parallele Kräfte auf einen festen Körper wirken. Wir wählen den Angriffspunkt der ersten zum Coordinatenursprung und ziehen die positive Abscissenaxe durch den Angriffspunkt der zweiten Kraft. Der Mittelpunkt liegt dann auf der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte und seine Entfernungen von diesen verhalten sich umgekehrt wie die Intensitäten der Kräfte. Wenn die beiden Kräfte gleich gerichtet sind, so liegt der Mittelpunkt zwischen ihren Angriffspunkten, sonst jenseits des Angriffspunktes der grösseren Kraft.

Die Ableitung dieser Resultate aus den Gleichungen 141) ist so leicht, dass wir nicht weiter darauf eingehen wollen. Wenn beide Kräfte gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, so halten sie sich das Gleichgewicht, wenn ihre Richtungen in dieselbe Gerade fallen. Sonst haben sie keine Resultirende, sondern bilden das, was man ein Kräftepaar nennt, wovon später die Rede sein soll.

Wir sahen bereits, dass jedes Massentheilchen m eines schweren, geworfenen, sich nicht drehenden Körpers so be-

wegt, als ob darauf eine unveränderliche, gegen den Erdmittelpunkt gerichtete Kraft mg (dessen Gewicht) wirkte, wobei g an derselben Stelle der Erde für alle Massentheilchen denselben Werth hat und die Beschleunigung der Schwere heisst. Wir suchen nun unter der Hypothese, dass auch in allen anderen Fällen die Wirkung der Schwere mit der eben beschriebenen Kraft mg identisch ist, die Resultirende der gesammten Wirkung der Schwere auf irgend einen festen Körper. Wegen der grossen Entfernung des Erdmittelpunktes sind alle auf die verschiedenen Massentheilchen wirkenden Kräfte parallel und gleich gerichtet.

Die Resultirende aller Kräfte, welche die Schwere auf den ganzen Körper ausübt, ist daher ebenfalls gegen den Erdmittelpunkt gerichtet; ihre Intensität

$$g\sum m$$

ist gleich der Summe der Gewichte aller Massentheilchen, welche man das gesammte Gewicht des Körpers nennt und welches gleich der mit der Beschleunigung der Schwere multiplicirten Gesammtmasse desselben ist. Der Mittelpunkt der parallelen Kräfte hat vermöge der Gleichungen 141) die Coordinaten

$$\xi = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad \eta = \frac{\sum my}{\sum m}, \quad \zeta = \frac{\sum mz}{\sum m}.$$

Es ist also der Punkt, welchen wir schon früher den Schwerpunkt genannt haben. Wenn sich der Körper dreht, ändert sich das Gewicht der einzelnen Massentheilchen weder in Grösse, noch in Richtung, noch im Angriffspunkte. Der mit dem Körper fest verbunden gedachte Schwerpunkt hört also nicht auf Angriffspunkt der Resultirenden aller auf alle Massentheilchen des Körpers wirkenden Schwerkräfte zu sein, wenn sich der Körper beliebig bewegt. Wenn man daher eine einzige Kraft von der Intensität des gesammten Gewichtes des Körpers an dessen Schwerpunkte anbringt, so erzeugt dieselbe in jedem Augenblicke die gleiche Bewegung, wie die verschiedenen auf die einzelnen Theilchen des Körpers wirkenden Schwerkräfte. Man kann, wie man sich ausdrückt, das ganze Gewicht des Körpers in dessen

Schwerpunkte concentrirt denken. Man darf aber dabei nicht vergessen, dass dies nur so lange gilt, als der Körper als starr betrachtet werden darf. Die elastische Deformation des Körpers, z. B. die Compression oder Biegung durch sein eigenes Gewicht, wäre natürlich eine ganz andere, wenn die Schwere statt auf alle Theilchen des Körpers nur auf dessen Schwerpunkt wirken würde. Alle diese Gesetze bestätigen sich in der Erfahrung, so dass wir also unsere Hypothese über die Wirkung der Schwere auf die Massentheilchen eines Körpers als in der Erfahrung wohlbegründet betrachten dürfen.

§ 52. Theorie der Kräftepaare.

Unter einem Kräftepaare verstanden wir zwei gleiche entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die auf einen festen Körper wirken und nicht die gleiche Richtung wie die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte haben. Die Ebene, welche beide Angriffspunkte und die Richtungen beider Kräfte enthält, heisst die Ebene des Kräftepaares. Die darauf errichtete Normale heisst die Axe des Kräftepaares. Sie ist immer in dem Sinne zu ziehen, dass das Paar um sie im positiven Sinne zu drehen sucht, d. h. dass sie gegen die Drehungsrichtung des Kräftepaares dieselbe Lage hat, wie die positive z-Axe gegen die Drehung von der positiven x-Axe auf kürzestem Wege zur positiven y-Axe, dass also bei Zugrundelegung eines französischen Coordinatensystems das Paar für ein Auge im Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht, das von dorther blickt, wohin die Axe zeigt.

Wir wollen beide Kräfte durch Pfeile ausdrücken und den Proportionalitätsfactor zwischen Kraft und Pfeil gleich 1 setzen. Das Parallelogramm, welches wir erhalten, wenn wir den Angriffspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der anderen Kraft verbinden, nennen wir das Parallelogramm des Kräftepaares, seinen Flächeninhalt dessen Totalmoment. Für jedes Kräftepaar ist $A = B = C = 0$. Das Moment D der beiden Kräfte des Kräftepaares bezüglich der Abscissenaxe finden wir nach Formel 71), indem wir die Pfeile, welche die beiden Kräfte darstellen, auf die yz-Ebene projiciren, jede

Projection mit ihrem senkrechten Abstande vom Coordinatenursprunge multipliciren und die Differenz dieser beiden Producte bilden. Diese Differenz ist, wie man unmittelbar sieht, gleich dem Flächeninhalte der Projection des Parallelogramms des Kräftepaares, also seines Totalmomentes auf die yz-Ebene und zwar mit positiven oder negativen Zeichen, je nachdem die Projection des Paares auf die yz-Ebene den Körper im positiven oder negativen Sinne um die positive Abscissenaxe zu drehen sucht. Analog werden E und F gefunden.

Die Werthe von D, E und F sind alle nur abhängig von der Richtung der Ebene des Paares, von dem Totalmomente desselben und von dem Sinne, in dem es zu drehen sucht. Da aber A, B und C für jedes Paar verschwinden, so sind alle Paare äquivalent, d. h. sie erzeugen unter allen Umständen dieselbe Bewegung des festen Körpers, wenn nur ihre Ebenen parallel, ihre Totalmomente gleich und ihr Drehungssinn derselbe ist. Man kann daher jedes Kräftepaar in seiner Ebene beliebig versetzen, sein Parallelogramm in derselben beliebig drehen und durch ein anderes von gleicher Fläche und gleichem Drehungssinn ersetzen und auch die Ebene des Paares parallel zu sich selbst beliebig verschieben, ohne dass das Kräftepaar aufhört, genau die gleiche Wirkung auf den festen Körper auszuüben.

Wie Drehungen, kann man auch jedes Kräftepaar durch einen Vector V darstellen. Derselbe kann von einem beliebigen Punkte des Raumes aus gezogen werden, seine Richtung muss die der Axe des Kräftepaares, seine mit einem passenden, ein für allemal constantem Reductionsfactor Γ multiplicirte Länge gleich dem Totalmomente des Kräftepaares sein. Wenn man von den Dimensionen absieht, kann man natürlich auch $\Gamma = 1$ setzen.

Die drei Grössen D, E, F sind die mit Γ multiplicirten Projectionen dieses Vectors auf die drei Coordinatenrichtungen, denen wir das positive oder negative Zeichen ertheilen, je nachdem sie in die positive oder negative Coordinatenrichtung fallen. D, E und F sind also durch den Vector eindeutig bestimmt. Alle Paare, welche in dieser

Weise durch den gleichen Vector dargestellt werden, sind äquivalent und man sieht sofort, dass bei dieser Darstellungsweise Kräftepaare genau so zu Resultirenden zusammengesetzt oder in Componenten zerlegt werden können, wie einfache Kräfte. Seien V_1, V_2, V_3 die Projectionen des Vectors V, welcher unser Kräftepaar darstellt, auf die drei Coordinatenaxen, so stellen diese drei neuen Vectoren Kräftepaare dar, für welche die Momente bezüglich der Coordinatenaxe die Werthe

$$D,\ 0,\ 0;\ \ 0,\ E,\ 0 \text{ resp. } 0,\ 0,\ F$$

haben. Für diese drei Kräftepaare zusammen ist also die Summe der Momente bezüglich der Coordinatenaxen genau so gross, wie für das ursprünglich gegebene Kräftepaar, und da für alle Paare $A = B = C = 0$ ist, so sind die drei durch die Vectoren V_1, V_2, V_3 dargestellten Kräftepaare zusammen dem einzigen durch den Vector V dargestellten äquivalent, genau so wie die drei durch die Pfeile V_1, V_2, V_3 dargestellten Kräfte die Componenten der durch V dargestellten Kraft sind. Dieser Satz ist zwar nur ein specieller Fall der Anwendbarkeit der Construction des Kräftenparallelogramms auf Kräftepaare; man kann aber sofort daraus den allgemeinen Fall beweisen, indem man jedes Paar in drei Componenten nach den drei Coordinatenaxen zerlegt und dann nachweist, dass diese für die Resultirende gleich ausfallen würden, wie für die Vereinigung aller Componenten.

§ 53. Ersetzung beliebiger Kräfte durch eine Kraft und ein Paar.

Es sei ein beliebiges auf einen festen Körper wirkendes System von Kräften gegeben. Wir sahen, dass es nicht immer möglich ist, eine einzige Kraft zu finden, welche dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent ist. Es ist aber immer möglich, eine Kraft und ein Kräftepaar zu finden, welche zusammen dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent sind, wobei noch der Angriffspunkt der Kraft beliebig gewählt werden kann. Seien A, B, C die Summen der Componenten der gegebenen Kräfte, D, E, F die Summen ihrer Momente

bezüglich der Coordinatenaxen, so kann man vom Coordinatenursprunge aus, den man beliebig wählen kann, zwei Vectoren von OK und OP ziehen, welche eine Kraft und ein Kräftepaar mit den Componenten A, B, C resp. D, E, F in den Coordinatenrichtungen darstellen. Man nennt sie die resultirende Kraft und das resultirende Paar. Beide zusammen sind dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent, da für die Kraft D, E und F, für das Paar A, B und C verschwinden, daher für die Kraft und das Paar zusammen die sechs Grössen A, B, C, D, E, F dieselben Werthe haben, wie für das ursprünglich gegebene Kräftesystem.

Das Paar können wir dabei durch einen beliebigen gleichen und gleich gerichteten, von einem anderen Punkte des Raumes ausgehenden Vector darstellen. Wenn wir aber für die Kraft einen anderen, nicht in ihrer Richtung liegenden Angriffspunkt wählen, so müssen wir das Paar in einer Weise verändern, die man durch die nachfolgenden Betrachtungen finden kann.

Es wirke auf einen festen Körper eine einzige Kraft. O sei ihr Angriffspunkt, OK der Pfeil, der sie in Grösse und Richtung darstellt. Wir können ihre Wirkung auf den festen Körper immer ersetzen durch eine gleiche, gleich gerichtete Kraft, die in irgend einem anderen Punkte O' angreift, der nicht in der Richtung der ersteren Kraft liegt, und ein Kräftepaar. Um dies zu zeigen, fügen wir noch zwei Kräfte $O'K'$ und $O'K''$ hinzu, welche beide im Punkte O' angreifen, von denen die erste gleich und gleich gerichtet, die zweite ebenfalls gleich, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft OK ist. Da sich diese beiden Kräfte aufheben, so ist die gegebene Kraft OK äquivalent mit dem Systeme, das aus den drei Kräften OK, $O'K'$ und $O'K''$ besteht. Die beiden Kräfte OK und $O'K''$ bilden aber ein Kräftepaar, welches wir durch einen Vector $O'P'$ darstellen können, der senkrecht auf der Ebene OKO' in demjenigen Sinne steht, dass um ihn die Drehungsrichtung des Paares, also auch die von OK gegen OO' auf kürzestem Wege im positiven Sinne geschieht. Das Moment des durch $O'P'$ dargestellten Kräftepaares ist gleich der Fläche des Parallelo-

gramms $OKO'K''$, also der doppelten Fläche des Dreiecks OKO'. Diese doppelte Fläche ist also gleich der mit Γ multiplicirten Länge des Vectors $O'P'$.

Die Kraft $O'K'$ und das so gefundene Paar $O'P'$ sind immer der einen Kraft OK äquivalent, was wir den Satz 142) nennen wollen.

Sei nun ein beliebiger fester Körper und ein beliebiges darauf wirkendes System von Kräften gegeben. Dasselbe sei der Kraft OK und dem Paare OP äquivalent. O' sei ein beliebiger anderer Punkt. Es sei die Aufgabe gestellt, das ursprünglich gegebene Kräftesystem durch eine im Punkte O' angreifende Kraft und ein Kräftepaar zu ersetzen.

Wir können das Paar auch durch einen von O' gezogenen, mit OP gleichen und gleich gerichteten Pfeil $O'P''$, die Kraft aber durch eine auf O' wirkende, mit OK gleiche und gleich gerichtete Kraft $O'K'$ und noch durch ein Paar $O'P'$ ersetzen, das durch die Bedingungen 142) bestimmt ist. Die beiden Paare $O'P'$ und $O'P''$ können wir zu einem einzigen Paare $O'P'''$ zusammensetzen, welches also mit der Kraft $O'K'$ vereint dem ursprünglich gegebenen Kräftesysteme äquivalent ist, womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Die neue Resultirende $O'K'$ ist gleich und gleich gerichtet der alten OK. Das neue resultirende Paar $O'P'''$ aber hat nur dann das gleiche Moment und eine gleich gerichtete Axe wie das frühere resultirende Paar OP, wenn der Punkt O' in der Richtung der Kraft OK liegt.

Es verdient noch erwähnt zu werden, dass der Angriffspunkt O' der resultirenden Kraft immer so gewählt werden kann, dass dieselbe auf der Ebene desjenigen Paares, welches mit ihr vereint dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent ist, senkrecht steht, dass also die Axe des resultirenden Paares die Richtung der resultirenden Kraft hat. Man nennt den Inbegriff einer auf einen festen Körper wirkenden Kraft und eines ebenfalls darauf wirkenden Paares, dessen Axe die Richtung der Kraft hat, öfters eine Dyname.

Dass der Angriffspunkt der resultirenden Kraft wirklich immer so gewählt werden kann, beweisen wir wie folgt.

Es giebt stets, wie wir wissen, eine in einem beliebigen Punkte O angreifende Kraft OK, welche, vereint mit einem Paare OP, dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent ist. Man kann das Paar immer in zwei Componenten zerlegen, welche durch die Vectoren OF, ON dargestellt sind, von denen der erstere in dieselbe Gerade wie die Kraft OK fällt, der letztere darauf senkrecht steht. Man ziehe nun die Gerade OO' senkrecht auf die Ebene NOK nach derjenigen Seite hin, dass die Drehung, welche OK auf kürzestem Wege nach OO' überführt, um ON im negativen Sinne geschieht. Dem Stücke OO' giebt man die Länge $\Gamma . ON/OK$.

Nach dem Satze 142) ist nun die Kraft OK äquivalent einer gleichen, gleich gerichteten, in O' angreifenden Kraft $O'K'$ und einem Paare, welches dieselbe Axe und dasselbe Gesammtmoment, aber gerade den entgegengesetzten Drehungssinn wie das Paar ON hat und sich daher mit diesem aufhebt. Das Paar OF aber kann auch durch einen gleichen, gleich gerichteten, von O' aus gezogenen Pfeil $O'F'$ dargestellt werden. Die Kraft $O'K'$ und das Paar $O'F'$, dessen Axe in die Richtung der Kraft $O'K'$ fällt, dessen Ebene also senkrecht darauf steht, sind also dem ursprünglich gegebenen Kräftesysteme äquivalent. Da OF und ON die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks sind, dessen Hypothenuse OP ist, so ist nothwendig $OF < OP$.

Wenn also die resultirende Kraft in O' oder einem beliebigen anderen Punkte der unendlichen Geraden $O'K'$ angreift, so dass sie die Richtung der Axe des dazu gehörigen resultirenden Paares hat, so ist das Moment des letzteren kleiner, als bei jeder anderen Lage des Angriffspunktes der resultirenden Kraft.

§ 54. Ersatz einer Drehung durch eine andere und eine Parallelverschiebung. Schraubenbewegung.

Ganz analoge Sätze lassen sich für Drehungen entwickeln. Gerade so wie jedes Kräftesystem durch eine einzige Kraft und ein einziges Paar ersetzt werden kann, so kann jede beliebige Lagenänderung eines festen Körpers durch den Verein einer einzigen Drehung und einer einzigen Parallel-

verschiebung erzeugt werden. Gerade so wie der Vector, der ein Kräftepaar darstellt, von jedem Punkte des Raumes aus gezogen werden kann, so kann auch der Vector, der die Parallelverschiebung darstellt, von jedem Punkte des Raumes aus gezogen werden. Derselbe soll daher wieder mit OP bezeichnet werden. Der Vector, welcher die Drehung ausdrückt, kann von jedem Punkte der Drehungsaxe aus gezogen werden, wie der Vector, der eine Kraft darstellt, von jedem Punkte ihrer Richtung aus gezogen werden kann. Ein Vector, welcher eine Drehung darstellt, soll daher wieder mit OK bezeichnet werden. Ein von einem beliebigen anderen Punkte O' aus gezogener Vector $O'K'$, der gleich und gleich gerichtet wie OK ist, stellt uns eine gleiche, gleich gerichtete Drehung um eine parallele Axe dar.

Genau so wie früher die Kraft OK äquivalent der Kraft $O'K'$ und einem Paare $O'P'$ war, so ist auch die Lagenänderung, welche durch die Drehung OK erzeugt wird, identisch mit der, welche durch die Drehung $O'K'$ vereint mit einer Parallelverschiebung $O'P'$ erzeugt wird.

Wir beschränken uns auf unendlich kleine Drehungen und Parallelverschiebungen, für welche auch die Parallelverschiebung $O'P'$ in Grösse und Richtung durch Regeln bestimmt ist, die dem Satze 142) vollkommen analog sind, welcher damals das Paar $O'P'$ bestimmte.

Durch die Drehung OK erfährt, wenn sie unendlich klein ist, der Punkt O' eine Verschiebung $O'P'$ senkrecht zur Ebene OKO' in dem Sinne, dass um die von O' nach P' gerichtete Gerade die Drehung der Geraden OK auf kürzestem Wege in die Lage OO' im positiven Sinne erfolgt. Die Grösse dieser Verschiebung ist $w \, . \, O'A$, wobei w der Drehungswinkel der durch OK dargestellten Drehung, $O'A$ der senkrechte Abstand des Punktes O' von der Drehungsaxe OK ist. Sei Γ der Reductionsfactor, so dass die Länge des Pfeiles OK gleich Γw ist, so ist also:

143) $$O'P' = \frac{OK \, . \, O'A}{\Gamma} = \frac{2\, OKO'}{\Gamma},$$

wobei OKO' der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist.

Ertheilen wir nun dem ganzen festen Körper die Parallelverschiebung $O'P'$ und die durch $O'K'$ dargestellten Drehung um eine zu OK parallele, durch O' gehende Axe, wobei auch der Drehungssinn und Drehungswinkel derselbe wie bei der Drehung OK ist. Dadurch wird, wie man leicht beweist, der Punkt A des festen Körpers und daher auch jeder Punkt desselben, der ursprünglich in der Geraden OK lag, schliesslich wieder in seine alte Lage zurückgeführt. Ferner kommen alle Punkte des Körpers, die in der durch O' in der Richtung $O\dot{K}$ gezogenen Geraden liegen, daher auch schliesslich der ganze feste Körper in dieselbe Lage, wie durch die Drehung OK. Es erfährt daher der ganze Körper durch die Drehung OK allein dieselbe Lagenänderung, wie durch die Drehung $O'K'$ und die durch die Formel 143) gegebene Parallelverschiebung $O'P'$ zusammen.

Daraus ersieht man sofort Folgendes: 1. Sei OP die Parallelverschiebung und OK die Drehung, durch welche irgend eine unendlich kleine Lagenänderung irgend eines festen Körpers erzeugt werden kann und O' ein beliebig gegebener Punkt. Es sei die Aufgabe gestellt, dieselbe Lagenänderung durch eine Parallelverschiebung und eine Drehung um eine durch O' gehende Axe zu erzeugen. Die Parallelverschiebung können wir auch durch einen Pfeil $O'P''$, der gleich und gleich gerichtet wie OP vom Punkte O' aus gezogen ist, darstellen. Die Drehung OK aber können wir durch eine Drehung, die durch einen von O' aus gezogenen, mit OK gleichen und gleich gerichteten Pfeil $O'K'$ dargestellt ist, im Vereine mit einer Parallelverschiebung $O'P'$ ersetzen. Die Grösse der letzteren ist durch Formel 143) und ihre Richtung durch die bei Entwickelung jener Formel gegebene Regel bestimmt. $O'P'$ muss so senkrecht auf der Ebene OKO' sein, dass die Drehung von OK auf kürzestem Wege nach OO' eine positive Drehung um $O'P'$ ist. Die Aufgabe ist dann gelöst, wenn man noch die beiden Parallelverschiebungen $O'P'$ und $O'P''$ zu einer einzigen $O'P'''$ zusammengesetzt hat.

2. Es kann auch hier wieder der Punkt O' so gewählt werden, dass die Parallelverschiebung in dieselbe Gerade

fällt, wie die Drehungsaxe. Um den hierzu geeigneten Punkt O' zu finden, zerlegen wir die Parallelverschiebung OP in zwei Componenten OF und ON, von denen die erstere in die Richtung OK fällt, die letztere darauf senkrecht steht. Wir ziehen nun die Gerade OO' so senkrecht auf die Ebene KON, dass die Drehung der Geraden OK auf kürzestem Wege in die Lage OO' im negativen Sinne um ON geschieht und machen die Länge

$$OO' = \Gamma . ON/OK.$$

Dann wird die Drehung OK dieselbe Lagenänderung erzeugen, wie die durch einen von O' aus gezogenen, mit OK gleichen und gleich gerichteten Pfeil $O'K'$ dargestellte Drehung vereint mit einer Parallelverschiebung, welche die Parallelverschiebung ON gerade aufhebt. Die Drehung $O'K'$ und die Parallelverschiebung OF längs der Axe derselben erzeugen daher jedesmal die gegebene Lagenänderung des festen Körpers.

Eine Drehung vereint mit einer Parallelverschiebung in der Richtung der Drehungsaxe nennt man eine Schraubenbewegung, da eine Schraube, die sich in ihrer Mutter dreht, stets eine solche Bewegung macht. Jede unendlich kleine Lagenänderung eines festen Körpers kann daher durch eine einzige Schraubenbewegung erzeugt werden, wenn der Drehungswinkel, die Axe und die Ganghöhe der Schraube passend gewählt werden.

§ 55. Allgemeine Gleichungen für die Drehung eines festen Körpers um eine feste Axe.

Wir gehen nun zur Bewegung eines festen Körpers über, in welchem zwei Punkte, daher auch alle Punkte, die in ihrer Verbindungslinie liegen, festgehalten werden. Wir können z. B. durch den festen Körper eine fest damit verbundene Axe gesteckt denken, deren beide Enden zugespitzt sind und in festen Lagern ruhen.

Die Position des festen Körpers ist in diesem Falle durch die eines einzigen Punktes A desselben bestimmt, der nicht auf der Axe liegt. Um aber diese zu bestimmen, fällen wir von A eine Senkrechte auf die Axe und bezeichnen den

Winkel zwischen der Lage, welche diese Senkrechte zu Anfang der Zeit hatte und der, welche sie zu irgend einer Zeit t hat, mit w. Dieser Winkel misst ja in der That die Drehung, welche der Körper seit dem Zeitanfange erfahren hat. Wir können den Winkel w in beliebigem Sinne herum zählen, bezeichnen aber diejenige Richtung der Drehungsaxe, um welche diese Zählung im positiven Sinne erfolgt, als die positive.

Wir können die Gleichungen, welche für einen vollkommen freien Körper gelten, auch in diesem Falle anwenden, wenn wir zu den äusseren Kräften auch die Kräfte rechnen, welche die Drehungsaxe resp. die beiden Lager in unveränderlicher Lage erhalten.

Irgend ein Massentheilchen m des Körpers habe zur Zeit t die Coordinaten x, y, z und die Entfernung r von der Drehungsaxe, welche wir zur Abscissenaxe wählen (und zwar ihre positive Richtung als positive Abscissenaxe). Die Gerade r, von der Axe gegen den Punkt m gezogen, schliesse mit der positiven xy-Ebene den ebenfalls im positiven Sinne zu zählenden Winkel α ein, so dass

144) $$y = r \cos \alpha, \quad z = r \sin \alpha$$

ist. Während der Zeit dt soll der Winkel w um dw wachsen, so dass sich also der Körper um den Winkel dw um die Abscissenaxe dreht und zwar im positiven oder negativen Sinne, je nachdem dw positiv oder negativ ist. Den Differentialquotienten dw/dt bezeichnen wir mit ω und nennen ihn die Winkelgeschwindigkeit. Daher ist auch der Zuwachs $d\alpha$ des Winkels α gleich dw, während r und x constant bleiben. Man findet daher aus den Gleichungen 144):

145) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -r \sin \alpha \,.\, \frac{dw}{dt} = -z\omega, \\ &\qquad\qquad \frac{dz}{dt} = r \cos \alpha \,.\, \omega = y\omega, \\ &\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -y\omega^2 - z\frac{d\omega}{dt}, \\ &\qquad\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -z\omega^2 + y\frac{d\omega}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Wir wollen ferner mit $-A_l$, $-B_l$, $-C_l$ die Summe der Componenten der von den Lagern auf die Axe und durch diese auf den Körper wirkenden Kräfte in den drei Coordinatenrichtungen, mit $-D_l$, $-E_l$, $-F_l$ die Summe der Momente derselben bezüglich der Coordinatenaxen, ferner mit A_a, B_a, C_a, D_a, E_a, F_a dieselben Grössen bezüglich der übrigen äusseren Kräfte bezeichnen, die auf den Körper wirken. Die auf die Axe wirkenden Kräfte können wir uns an den beiden Spitzen derselben angreifend denken. Ihre Angriffspunkte liegen daher jedenfalls in der Abscissenaxe und ihr Moment bezüglich der Abscissenaxe ist gleich Null. Es ist also $D_l = 0$.

Die Substitution der Werthe 144) und 145) für die Coordinaten, sowie der Werthe für die Kraftcomponenten und Momente in die Gleichungen 134) und 136), wobei letztere in der Form $\sum m\left(y\frac{d^2 z}{dt^2} - z\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = D$ etc. zu schreiben sind, liefert die folgenden Gleichungen:

$$146)\quad \begin{cases} -A_l + A_a = 0, \\ -B_l + B_a = -\omega^2\sum m y - \frac{d\omega}{dt}\sum m z, \\ -C_l + C_a = -\omega^2\sum m z + \frac{d\omega}{dt}\sum m y, \\ -E_l + E_a = \omega^2\sum m x z - \frac{d\omega}{dt}\sum m x y, \\ -F_l + F_a = -\omega^2\sum m x y - \frac{d\omega}{dt}\sum m x z, \\ \qquad D_a = \frac{d\omega}{dt}\sum m(y^2 + z^2). \end{cases}$$

Dabei wurde ω^2 und $\frac{d\omega}{dt}$ vor die Summenzeichen gesetzt, da w sowie dessen Differentialquotienten nach der Zeit für alle Punkte des Körpers dieselben Werthe haben.

Die ersten fünf dieser Gleichungen bestimmen die Kraftcomponenten $-A_l$, $-B_l$, $-C_l$ und die Drehmomente $-E_l$ und $-F_l$, welche von den Lagern auf die Axe ausgeübt werden, dienen daher auch umgekehrt zur Bestimmung der Summen A_l, B_l, C_l der Componenten der Kräfte nach den

Coordinatenaxen und der Drehmomente E_l und F_l bezüglich der y- und z-Axe, welche der Körper auf die Vorrichtung, welche die Lager festhält, ausübt. Die letzte Gleichung dient zur Bestimmung der Bewegung des Körpers.

Die auf ihrer linken Seite mit $d\omega/dt$ multiplicirte Summe wird gebildet, wenn man jedes Massentheilchen des Körpers mit dem Quadrate seiner Entfernung von der Axe multiplicirt und alle so gebildete Producte addirt. Sie heisst das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich dieser Axe und soll mit K bezeichnet werden. Da sich während der Bewegung weder die Masse eines Massentheilchens, noch dessen Entfernung von der Drehungsaxe verändert, so bleibt das Trägheitsmoment während der ganzen Bewegung constant. Unter Einführung desselben erhält man aus der letzten der Gleichungen 146):

147) $$K\frac{d\omega}{dt} = D_a, \quad \omega = \frac{dw}{dt}.$$

Man sieht, dass für die Winkelbeschleunigung

$$d\omega/dt = d^2 w/dt^2$$

nur die Grösse D_a ausschlaggebend ist. Zwei Kräfte, welche zu dieser Grösse denselben Betrag liefern, üben genau dieselbe drehende Wirkung um die betreffende Axe auf den Körper aus, woher der Name Drehmoment bezüglich einer Axe stammt.

§ 56. Gleichförmige und gleichförmig beschleunigte Drehung. Physisches Pendel. Waage.

Die Gleichungen 147) haben genau dieselbe Form wie die Gleichungen 13) und 14) für die Bewegung eines Körpers in einer geraden oder krummen Linie. Man kann daher jeden Satz, den wir für die letztere Bewegung gefunden haben, in einen entsprechenden Satz für die drehende Bewegung eines festen Körpers um eine feste Axe verwandeln, indem man folgende Vertauschungen vornimmt: Man setzt den Drehungswinkel w statt des Weges s, die Winkelgeschwindigkeit ω statt der Geschwindigkeit c im gewöhnlichen Sinne, das Trägheitsmoment K des Körpers bezüglich der Drehungs-

axe statt der Masse und die Summe D_a der Momente aller auf den Körper wirkenden Kräfte bezüglich der Drehungsaxe statt der Summe S der Componenten der Kräfte in der Richtung der Bewegung des Körpers.

So geschieht, wenn die Summe der Momente der Kräfte bezüglich der Drehungsaxe Null ist, die Drehung gleichförmig; wenn diese Summe constant ist, so erhält man

$$\omega = \frac{D_a t}{K}, \quad w = \frac{D_a t^2}{2K}.$$

Ein weiteres Beispiel ist folgendes: Auf einen Magnet vom Trägheitsmomente K, der in einem Kupfergehäuse an einem Faden aufgehängt ist, übt dessen Torsion und der Erdmagnetismus ein gegen die Ruhelage treibendes Drehmoment $-aw$ aus, welches nahe dem Ausschlagwinkel w proportional ist; ein anderes theils von den im Gehäuse inducirten Strömen, theils vom Luftwiderstande herrührendes Drehmoment $-b\omega$ ist der Winkelgeschwindigkeit proportional und wirkt der Bewegung entgegen. Wir können daher in diesem Falle alle Formeln des § 18 unverändert anwenden, wenn wir K, w, ω statt m, x, u schreiben, wodurch deren Anwendbarkeit auf praktische Fälle illustrirt wird.

Einen Körper, welcher gezwungen ist, sich unter dem Einflusse der Schwere um eine nicht verticale Axe zu drehen, nennt man ein physisches Pendel. Sind die Schwingungen klein, so sind, wenn wir den Luftwiderstand als eine der Winkelgeschwindigkeit proportionale Dämpfung mit in Rechnung ziehen, wieder genau dieselben Formeln wie beim Magnete anwendbar. Ohne hierauf näher einzugehen, will ich noch einiges über endliche Schwingungen bei Ausschluss jeder anderen Kraft ausser der Schwere und der Festigkeit des Körpers und der Axe bemerken.

Sei die Drehungsaxe, welche wir wieder zur Abscissenaxe wählen, horizontal. Die y-Axe wollen wir vertical nach abwärts ziehen. σ sei die Länge der vom Schwerpunkte auf die Drehungsaxe gefällten Senkrechten, welche mit der xy-Ebene den Winkel w bilde, M sei die gesammte Masse des Körpers, K dessen Trägheitsmoment bezüglich der Abscissenaxe. Das ganze Gewicht Mg kann man sich im Schwer-

punkte angreifend denken. Sein Drehungsmoment bezüglich der Abscissenaxe ist also $-Mg\sigma\sin w$, wobei das negative Zeichen gesetzt werden muss, da es den Winkel w zu verkleinern strebt. Man erhält daher die Gleichung:

$$K\frac{d^2 w}{d t^2} = - Mg\sigma \sin w.$$

Vergleicht man dieselbe mit der Gleichung 120), so sieht man, dass sich der Winkel w genau nach demselben Gesetze wie beim einfachen Pendel verändert, nur dass $K/M\sigma$ statt der Pendellänge l zu schreiben ist. So ist die Schwingungsdauer

$$148)\qquad \tau = \pi\sqrt{\frac{K}{M\sigma g}}\left(1 + \frac{1^2 . a^2}{2^2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2}a^4 \ldots\right),$$

wobei wieder a der Sinus des grössten Elongationswinkels ist. Wäre die Drehungsaxe nicht horizontal, so würde an die Stelle von g die Componente der Beschleunigung der Schwere in der Richtung senkrecht zur Drehungsaxe, also g multiplicirt mit dem Sinus des Winkels zwischen der Drehungsaxe und der Verticalen treten.

Unter denselben mechanischen Bedingungen befindet sich die Waage. Wir haben uns da einen schweren, um eine horizontale Axe drehbaren Körper zu denken. Derselbe ist im stabilen Gleichgewichte, d. h. die Schwere führt ihn bei jeder kleinen Störung wieder in die Gleichgewichtslage zurück (vergl. § 70), wenn der Schwerpunkt vertical unter der Drehaxe liegt. In dieser Lage sind zu entgegengesetzten Seiten der Drehaxe zwei gleich schwere Waagschalen so befestigt, dass die Punkte, auf welche sie drücken, vollkommen symmetrisch bezüglich der durch die Drehaxe gelegten Verticalebene liegen. Legt man daher einen Körper auf die eine, einen zweiten auf die andere Waagschale, so kann man daran, dass das Gleichgewicht ohne Drehung des Körpers bestehen bleibt, erkennen, dass beide Körper das gleiche Gewicht und daher auch die gleiche Masse haben, da das Gewicht gleich dem Producte aus Masse und Beschleunigung der Schwere, letztere aber erfahrungsmässig für alle Körper gleich ist. Hält ein auf der einen Waagschale liegender

Körper zwei anderen, unter sich ganz gleich beschaffenen, auf der anderen Waagschale liegenden das Gleichgewicht, so erkennen wir, dass er die doppelte Masse als jeder der letzteren hat etc.

Die Regeln für die einfachste praktische Bestimmung der Masse folgen auch bei uns erst aus sehr verwickelten Consequenzen unseres Bildes. Allein dies ist keine logische Schwäche, wie wenn erst die Grundbegriffe und Fundamentaldefinitionen aus Consequenzen unserer Constructionen folgen würden, zu deren Aufbau sie die Grundpfeiler hätten sein sollen.

§ 57. Trägheitsradius. Trägheitsmomente bezüglich paralleler Axen.

Die Grösse K heisst das Trägheitsmoment, weil sie an die Stelle der Masse tritt, welche ja das Maass des Trägheitswiderstandes ist, den der Körper der Beschleunigung entgegensetzt.

Setzt man $\lambda = \sqrt{\frac{K}{M}}$, so ist λ die Entfernung, in welcher sich die gesammte Masse M des Körpers, wenn sie in einem einzigen Punkte vereint wäre, von der Drehungsaxe befinden müsste, um dasselbe Trägheitsmoment wie der ganze Körper zu haben. Denkt man sich daher den ganzen übrigen Körper massenlos und seine Masse in einem einzigen, fest damit verbundenen Punkte concentrirt, der sich in der Distanz λ von der Drehungsaxe befindet, so würde er unter dem Einflusse derselben Kräfte bei denselben Anfangsbedingungen dieselbe Drehung um die fix gedachte Drehungsaxe machen.

Da jede im Körper gezogene Gerade Drehungsaxe sein kann, so ist es von Wichtigkeit, das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich jeder beliebigen darin gezogenen Geraden leicht bestimmen zu können. Zu diesem Zwecke sind die nun zu behandelnden Sätze nützlich, mittelst welcher das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer beliebigen Axe leicht berechnet werden kann, wenn man das Trägheitsmoment desselben Körpers bezüglich dreier bestimmter, durch seinen Schwerpunkt gehender Axen berechnet hat.

Satz über das Trägheitsmoment bezüglich paralleler Axen.

Heisst K das Trägheitsmoment irgend eines Körpers bezüglich einer beliebigen Axe, L das bezüglich einer parallelen, durch den Schwerpunkt gehenden Axe, welcher von der ersten Axe den Abstand σ haben soll, und ist r die Entfernung irgend eines Massentheilchens m von der ersten, ϱ die von der zweiten Axe, so ist gemäss der Definition des Trägheitsmomentes

$$K = \sum m r^2, \quad L = \sum m \varrho^2.$$

Die Werthe dieser Grössen beziehen sich auf kein Coordinatensystem. Sie sind daher unabhängig von der Lage eines Coordinatensystems, welches wir jetzt erst einführen wollen. Wir wählen den Schwerpunkt als Coordinatenursprung, die von ihm auf die erste Axe gefällte Senkrechte als Abscissenaxe und die der ersten Axe parallele, durch den Schwerpunkt gehende Axe als z-Axe; ferner bezeichnen wir die Coordinaten des Massenpunktes m mit x, y, z. Dann ist:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2,$$

$$r^2 = (x - \sigma)^2 + y^2 = \varrho^2 + \sigma^2 - 2\sigma x,$$

daher:

148a) $$\sum m r^2 = \sum m \varrho^2 + \sigma^2 M - 2\sigma \sum m x.$$

M ist die gesammte Masse des Körpers. Da nun die Abscissenaxe durch den Schwerpunkt geht, so ist dessen Abscisse also auch $\sum m x = 0$. Ferner ist in Gleichung 148a) der Ausdruck links das Trägheitsmoment bezüglich der ersten, das erste Glied rechts das bezüglich der zweiten, parallel durch den Schwerpunkt gehenden Axe. Es ist also

149) $$K = L + M\sigma^2.$$

Dieser Ausdruck erlaubt das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Axe zu berechnen, wenn das bezüglich einer parallelen, durch den Schwerpunkt gehenden, die gesammte Masse des Körpers und die Entfernung des Schwerpunktes von der ersten Axe gegeben sind.

Sei noch eine andere, der ersten Axe parallele Axe gegeben, sei K' das Trägheitsmoment desselben Körpers be-

züglich der letzteren Axe und σ' ihre Entfernung vom Schwerpunkte des Körpers, so ist:

$$K' = L + M\sigma'^2,$$

daher:

$$K' = K + M(\sigma'^2 - \sigma^2).$$

Aus der letzten Formel kann das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Axe berechnet werden, wenn das bezüglich einer beliebigen anderen, ihr parallelen, die Distanz beider Axen vom Schwerpunkte des Körpers und die Gesammtmasse des Körpers gegeben sind.

§ 58. **Das Trägheitsellipsoid.**

Wir bezeichnen nun mit O einen beliebigen Punkt im Innern oder ausserhalb des festen Körpers, ziehen durch denselben Axen nach allen möglichen Richtungen im Raume und stellen uns die Aufgabe, die Relation zu finden, welche zwischen den Trägheitsmomenten desselben Körpers bezüglich dieser verschiedenen Axen besteht.

Wir machen den Punkt O zum Anfangspunkte eines vorläufig noch ganz willkürlichen Coordinatensystems und ziehen durch O eine willkürliche Gerade $\mathfrak{G}$, deren Richtungscosinus bezüglich dieses Coordinatensystems wir mit α, β, γ bezeichnen. K sei das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Geraden $\mathfrak{G}$. Ferner sei m ein beliebiges Massentheilchen des Körpers, r dessen Entfernung von der Geraden $\mathfrak{G}$, R die Länge der vom Coordinatenursprunge nach der Masse m gezogenen Geraden, λ, μ, ν die Richtungscosinus der letzteren Geraden und ε der Winkel, den sie mit der Geraden $\mathfrak{G}$ einschliesst. Endlich seien $x = R\lambda$, $y = R\mu$ und $z = R\nu$ die Coordinaten des Massentheilchens m. Dann ist

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 \sin^2 \varepsilon = R^2 [1 - (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)^2] = \\ &= R^2 [\alpha^2(\mu^2 + \nu^2) + \beta^2(\lambda^2 + \nu^2) + \gamma^2(\lambda^2 + \mu^2) - \\ &\qquad - 2\alpha\beta\lambda\mu - 2\alpha\gamma\lambda\nu - 2\beta\gamma\mu\nu] = \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - \\ &\qquad - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz. \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$150)\begin{cases} a=\sum m(y^2+z^2), \quad b=\sum m(x^2+z^2), \quad c=\sum m(x^2+y^2), \\ d=\sum m y z, \quad e=\sum m x z, \quad f=\sum m x z, \end{cases}$$

so erhält man also für das Trägheitsmoment bezüglich der Axe 𝔊 den Werth:

$$151)\quad K=\sum m r^2 = a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2-2d\beta\gamma-2e\alpha\gamma-2f\alpha\beta.$$

Die Kenntniss der sechs Constanten 150), von denen a, b, c offenbar die Trägheitsmomente desselben Körpers bezüglich der drei Coordinatenaxen sind, genügt also, um das Trägheitsmoment bezüglich jeder beliebigen durch O gezogenen Axe zu berechnen.

Man kann sich von der durch Formel 151) ausgedrückten Abhängigkeit der Grösse des Trägheitsmomentes von der Lage der betreffenden, durch O gehenden Axe ein anschauliches Bild machen, wenn man sich durch O alle möglichen Axen gezogen denkt und auf jeder von O aus eine Länge aufträgt, welche genau gleich dem Trägheitsmomente des Körpers bezüglich dieser Axe ist. (Den Reductionsfactor wollen wir, die Dimensionen nicht beachtend, gleich Eins setzen.) Die O gegenüberliegenden Endpunkte aller dieser Geraden würden dann eine Fläche bilden, die uns ein anschauliches Bild von der Abhängigkeit der Grösse des Trägheitsmomentes von der Richtung der Axe gäbe. Die Anschaulichkeit wird nicht wesentlich geringer werden, wenn wir auf jede Axe das Quadrat oder den Logarithmus oder sonst eine einfache Function des betreffenden Trägheitsmomentes auftrügen. Wir wollen, da dann die betreffende Fläche besonders einfach ausfällt, die reciproke Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente auftragen. Wir tragen also auf die Gerade 𝔊 von O aus ein Stück $OP_1 = \mathfrak{r}$ auf, dessen Länge $1/\sqrt{K}$ sei. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{x}=\mathfrak{r}\alpha$, $\mathfrak{y}=\mathfrak{r}\beta$, $\mathfrak{z}=\mathfrak{r}\gamma$ die Coordinaten des Punktes P_1, so folgt, wenn wir für K seinen Werth $1/\mathfrak{r}^2$ substituiren, aus 151):

$$152)\quad 1 = a\mathfrak{x}^2+b\mathfrak{y}^2+c\mathfrak{z}^2-2d\mathfrak{y}\mathfrak{z}-2e\mathfrak{x}\mathfrak{z}-2f\mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Wenn wir durch O nach allen möglichen Richtungen Gerade ziehen und auf jeder von O aus eine Strecke auf-

tragen, deren Länge die reciproke Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente des Körpers bezüglich der betreffenden Geraden ist, so genügen die Coordinaten der anderen Endpunkte aller dieser Geraden der Gleichung 152). Dieselbe ist also die Gleichung der Fläche, welche von allen diesen Endpunkten gebildet wird. Man nennt sie das Trägheitsellipsoid oder auch das Centralellipsoid, welches zu dem Punkte O des betreffenden Körpers gehört. Schliessen wir nämlich den Fall aus, dass alle Massenpunkte des Körpers in einer Geraden liegen, so kann K niemals Null, daher $\mathfrak{r}$ niemals unendlich werden. Die durch die Gleichung 152) dargestellte Fläche kann sich daher nirgends ins Unendliche erstrecken. Sie muss, da diese Gleichung vom zweiten Grade ist, ein Ellipsoid (einschliesslich der Kugelfläche) sein.

Haben wir die sechs Grössen a, b, c, d, e, f berechnet, so können wir dieses Ellipsoid construiren und erhalten so ein anschauliches Bild der verschiedenen Trägheitsmomente. Die Wahl der Coordinatenaxen war bisher vollkommen willkürlich. Wir können immer die drei Axen des Trägheitsellipsoides (falls dieses ein Rotationsellipsoid oder eine Kugelfläche ist, drei beliebige aufeinander senkrechte Axen desselben) als Coordinatenaxen wählen. Wir bezeichnen diese neuen Coordinatenaxen mit OX_1, OY_1, OZ_1. Die Gleichung des Trägheitsellipsoides reducirt sich dann, wenn $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ die Coordinaten eines Punktes desselben bezüglich der neuen Coordinatenaxen sind, auf

153) $$1 = a_1 \mathfrak{x}_1^2 + b_1 \mathfrak{y}_1^2 + c_1 \mathfrak{z}_1^2 .$$

Da alles, was früher allgemein bewiesen wurde, auch von den neuen Coordinatenaxen gelten muss, so ist, wenn x_1, y_1, z_1 die Coordinaten irgend eines Massentheilchens m des Körpers bezüglich der neuen Coordinatenaxen sind

$$a_1 = \sum m(y_1^2 + z_1^2),\ b_1 = \sum m(x_1^2 + z_1^2),\ c_1 = \sum m(x_1^2 + y_1^2),$$
$$\sum m y_1 z_1 = \sum m x_1 z_1 = \sum m x_1 y_1 = 0.$$

Die letzten drei Summen müssen ja nach 152) für jedes Coordinatensystem gleich den Coefficienten von $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ in der Gleichung des Trägheitsellipsoides sein, welche für unser gegenwärtiges Coordinatensystem verschwinden.

§ 59. Hauptträgheitsmomente.

Jede Axe des Trägheitsellipsoids nennt man eine zum Punkte O gehörige Hauptträgheitsaxe des Körpers und das dazu gehörige Trägheitsmoment ein Hauptträgheitsmoment. Da $1/\sqrt{a_1}$, $1/\sqrt{b_1}$ und $1/\sqrt{c_1}$ die Halbaxen des Trägheitsellipsoides sind, welches, wenn man seine Axen als Coordinatenaxen wählt, ja die Gleichung 153) hat, so sind die Hauptträgheitsmomente die reciproken Quadrate der Halbaxen des Trägheitsellipsoides. Ist das Trägheitsellipsoid ein dreiaxiges Ellipsoid, so giebt es nur drei zum Punkte O gehörige Hauptträgheitsaxen. Ist es ein Rotationsellipsoid, so existirt für den Punkt eine singuläre Hauptträgheitsaxe und jede darauf Senkrechte ist ebenfalls Hauptträgheitsaxe. Dann sind auch alle Trägheitsmomente nach den letzteren Axen gleich. Dies ist selbstverständlich, wenn der Körper um die singuläre Hauptträgheitsaxe symmetrisch, z. B. ein homogen mit Masse erfüllter Rotationskörper und der Punkt O ein Punkt der Rotationsaxe ist. Es kann aber auch ohne Symmetrie des Körpers eintreten. Bei einem beliebigen Körper z. B., dessen Trägheitsellipsoid ein dreiaxiges ist, kann man durch Hinzufügung einer einzigen oder beliebig vieler Massen auf der Axe des mittleren Trägheitsmomentes diesem das kleinste gleich machen. Dann muss der Körper ohne jede Symmetrie für alle in deren Ebene liegenden Axen gleiches Trägheitsmoment haben.

Ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel, so sind alle ihre Radien Hauptträgheitsaxen, alle Trägheitsmomente bezüglich derselben gleich. Dies tritt bei regulären, gleichförmig mit Masse erfüllten Körpern (Kugel, Würfel) immer ein, wenn der Punkt O ihr Mittelpunkt ist, kann aber auch bei ganz unregelmässigen Körpern gewissermaassen zufällig eintreten.

Wenn wir drei Hauptträgheitsaxen als Coordinatenaxen einführen, so verschwinden in Gleichung 152) alle drei Coefficienten d, e und f. Wenn wir dann blos die y- und z-Axe in der yz-Ebene drehen, so erhält blos d einen von Null verschiedenen Werth. Wir können daher eine zu O gehörige Hauptträgheitsaxe als eine solche definiren, für

welche, wenn wir sie als x-Axe und O als Coordinatenursprung wählen, bei beliebiger Lage der y- und z-Axe (natürlich für rechtwinkelige Coordinaten)

154) $$\sum m x y = \sum m x z = 0 \quad \text{wird.}$$

Wenn jedem Massenpunkte des Körpers, der auf der einen Seite irgend einer Ebene liegt, ein anderer von genau gleicher Masse entspricht, der dessen Spiegelbild bezüglich der Ebene ist, so nennt man diese Ebene eine Symmetrieebene des Körpers. Wenn ein Körper eine Symmetrieebene hat und wir diese zur $y z$-Ebene wählen, so entspricht jedem Punkte ein anderer mit gleichem m, y und z, und gleichem, aber entgegengesetzt bezeichneten x, so dass

$$\sum m x y = \sum m x z = 0$$

ist; dann ist also jede auf der Symmetrieebene senkrechte Gerade eine zu ihrem Durchschnittspunkte mit der Symmetrieebene gehörige Hauptträgheitsaxe. Ebenso sieht man, dass, wenn ein Körper zwei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen hat, ihre Durchschnittslinie bezüglich jedes ihrer Punkte Hauptträgheitsaxe ist. Bezüglich jedes dieser Punkte können daher dann die Hauptträgheitsaxen ohne Rechnung gefunden werden, da auch jede durch ihn in einer Symmetrieebene senkrecht zur Durchschnittslinie beider gezogene Axe Hauptträgheitsaxe ist. Man wird daher dann zunächst die drei zum Schwerpunkte gehörigen Hauptträgheitsmomente berechnen, der ja auch auf der Durchschnittslinie der beiden Symmetrieebenen liegen muss. Daraus kann man dann leicht das Trägheitsmoment bezüglich jeder anderen durch den Schwerpunkt gehenden und dann auch bezüglich jeder parallelen Axe berechnen.

Hat aber der Körper keine Symmetrien, so bleibt nichts übrig, als bezüglich irgend welcher, am besten durch den Schwerpunkt gehender Coordinatenaxen die sechs Cofficienten a, b, c, d, e, f zu berechnen, und nach den Methoden der analytischen Geometrie die Axen des Ellipsoides 152) zu suchen.

Um die Trägheitsmomente K_1, K_2 und K_3 eines Körpers bezüglich der drei Coordinatenaxen zu erhalten, empfiehlt es sich oft zuerst die Grössen

155) $L_1 = \sum m x^2, \quad L_2 = \sum m y^2, \quad L_3 = \sum m z^2$

zu berechnen (Binet'sche, Minding'sche Trägheitsmomente), welche natürlich ähnliche Eigenschaften haben wie die gewöhnlichen Trägheitsmomente und durch ähnliche Ellipsoide (Binet's, Darboux's, Culmann's, Reye's Ellipsoid) dargestellt werden können.[1]) Es ist dann

$$K_1 = L_2 + L_3, \quad K_2 = L_1 + L_3, \quad K_3 = L_1 + L_2.$$

Daraus folgt $K_1 + K_2 > K_3 > K_1 - K_2$. Zwei der Trägheitsmomente bezüglich der Coordinatenaxen können daher beliebige positive Werthe haben; das dritte aber muss zwischen deren Summe und Differenz, welche natürlich durch Subtraction des kleineren vom grösseren zu bilden ist, liegen. Da dies auch von den Hauptträgheitsmomenten gilt, welche gleich den reciproken Quadraten der Halbaxen α_1, α_2, α_3 des Trägheitsellipsoides sind, so muss auch

$$\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} > \frac{1}{\alpha_3^2} > \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2}$$

sein. Ein Ellipsoid, dessen Halbaxen dieser Relation nicht genügen, kann also nicht Trägheitsellipsoid sein. Gilt sie für eine Halbaxe α_3 und ist α_1 die kleinere der beiden anderen, so muss sie auch, wie man leicht sieht, für jede andere Halbaxe gelten.

Der von uns bisher ausgeschlossene Fall, dass alle Massen in einer Geraden liegen, bildet nur dann einen singulären Fall, wenn auch der Punkt O in dieser Geraden liegt. Dann ist das Trägheitsmoment bezüglich dieser Geraden, welche natürlich Hauptträgheitsaxe ist, Null, bezüglich jeder darauf Senkrechten, die ebenfalls Hauptträgheitsaxe ist, gleich. Das Trägheitsellipsoid degenerirt also in einen unendlichen Kreiscylinder.

Bei Berechnung der Trägheitsmomente oder der Ausdrücke 155) wird natürlich gerade, wie wir dies in § 28 bei Berechnung der Schwerpunktscoordinaten thaten, der feste Körper meist als ein continuirlich mit Masse von constanter oder veränderlicher Dichte erfülltes Volumen oder als eine

---

[1]) Wied. Beibl. 7, 571, 1883; 8, 269, 1884.

mit Masse continuirlich bedeckte Fläche oder Linie zu betrachten sein. Es werden also die Summenzeichen mit Integralzeichen zu vertauschen und für m zu setzen sein $\varrho\, d o$, $\varphi\, d f$ resp. $\sigma\, d s$, wobei die Buchstaben dieselbe Bedeutung wie in den Formeln 67), 68) und 69) haben.

§ 60. Kräfte auf die Lager.

Wir wollen nun sogleich einige Anwendungen der Sätze über die Trägheitsmomente machen.

Die durch die Formeln 146) bestimmten Grössen A_i, B_i, C_i, E_i, F_i sind die Summen der Componenten bezüglich der Coordinatenaxen und die Momente bezüglich der y- und z-Axe von denjenigen Kräften, welche bei einem nur um eine feste Axe drehbaren Körper letztere auf ihre Lager ausübt. Diese Formeln zeigen zunächst den selbstverständlichen Satz, dass diese, wenn der Körper ruht, gleich denen der äusseren Kräfte sind, welche auf den Körper wirken. Wenn sich aber der Körper dreht, wirken auf die Lager ausser den von aussen auf den Körper wirkenden Kräften noch andere Kräfte, welche durch die negativ genommenen Glieder der rechten Seiten der fünf ersten der Gleichungen 146) gegeben sind.

Wir wollen nur noch den speciellen Fall discutiren, dass dass keine äusseren Kräfte auf den Körper wirken, also $A_a = B_a = C_a = D_a = E_a = F_a = 0$ ist. Dann dreht er sich gleichförmig; es ist also auch $d\omega/dt = 0$ und man erhält

$$156)\quad \begin{cases} A_i = 0,\ B_i = \omega^2 \sum m y,\ C_i = \omega^2 \sum m z, \\ E_i = -\omega^2 \sum m x z,\ F_i = \omega^2 \sum m x y. \end{cases}$$

Sind ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers und ist M dessen Gesammtmasse, so ist $B_i = \omega^2 M \eta$, $C_i = \omega^2 M \zeta$. Dies sind also die Componenten der Centrifugalkraft, welche die ganze Masse des Körpers hätte, wenn sie sich, stets im Schwerpunkte des Körpers concentrirt, mitdrehen würde. Diese Centrifugalkraft überträgt sich daher durch die Axe auf die Lager. Ausserdem wirken aber noch die Drehmomente E_i und F_i auf die die Lager tragende Vorrichtung. Man sieht leicht, dass es die Momente der Centrifugalkräfte der einzelnen Massentheilchen des Körpers bezüglich der y- und

z-Axe sind. Durch diese Kräfte und Momente, welche ihre Richtung fortwährend ändern, wird die Vorrichtung, welche die Axe trägt, hin- und hergeschüttelt, während der Körper gleichmässig rotirt, was man als das Schlagen der Axe bezeichnet. Würde die Axe nicht durch die Lager fixirt, so würde sie sofort aus ihrer Lage weichen. Wenn $\varDelta$ die Länge der Axe, also die Entfernung der beiden Lager ist, so wirkt auf das der positiven Abscissenaxe zugekehrte Lager in der y-Richtung die Kraft $\frac{1}{2} B_i + \frac{F_i}{\varDelta}$, in der z-Richtung die Kraft $\frac{1}{2} C_i - \frac{E_i}{\varDelta}$, auf das andere Lager aber sind die entsprechenden Kraftcomponenten $\frac{1}{2} B_i - \frac{F_i}{\varDelta}$ und $\frac{1}{2} C_i + \frac{E_i}{\varDelta}$; denn diese Kräfte geben die Componentensummen B_i, C_i und die Momente E_i und F_i.

Nur wenn die Ausdrücke 156) verschwinden, wirkt bei Abwesenheit äusserer Kräfte in Folge der Rotation auf keines der Lager eine Kraft, so dass die Axe nicht schlägt und auch dann in unveränderter Lage fortfährt, die Rotationsaxe des Körpers zu sein, wenn die Lager hinweggenommen würden. Die Axe heisst dann eine freie Drehungsaxe. B_i und C_i verschwinden, wenn die Axe durch den Schwerpunkt geht. Es muss aber auch noch E_i und F_i, also $\sum m x y$ und $\sum m x z$ verschwinden, d. h. die Axe muss eine zum Schwerpunkte gehörige Hauptträgheitsaxe sein. Dann ist sie freie Drehungsaxe.

Die Formeln 146) zeigen, dass dann auch, wenn äussere Kräfte auf den Körper wirken, die Componentensummen bezüglich der Coordinatenaxen und die Momente bezüglich der y- und z-Axe für die auf die Lager wirkenden Kräfte und für die äusseren auf den Körper wirkenden Kräfte gleich sind, so dass vermöge der Rotation, mag diese gleichförmig oder beschleunigt sein, keine neuen Kräfte auf die Lager hinzutreten.

§ 61. Das Reversionspendel.

Sei die Länge l und die Schwingungsdauer τ eines einfachen Pendels genau bekannt; dann lässt sich daraus die überaus wichtige und schwer direct bestimmbare Grösse g der Beschleunigung der Schwere mittelst der Formel

157) $$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

berechnen. Leider lässt sich ein einfaches Pendel nur sehr unexact herstellen. Ein zusammengesetztes Pendel (physisches) lässt sich zwar ohne Schwierigkeit herstellen, allein mittelst der zur Bestimmung seiner Schwingungsdauer dienenden Formel kann die Beschleunigung der Schwere nur dann berechnet werden, wenn das Trägheitsmoment, der Schwerpunkt etc. bekannt sind, die wieder nicht leicht mit der genügenden Genauigkeit berechnet werden können. Es ist daher willkommen, dass man, indem man ein zusammengesetztes Pendel um zwei parallele Axen schwingen lässt, leicht die Länge des einfachen Pendels bestimmen kann, welches genau dieselbe Schwingungsdauer wie das zusammengesetzte Pendel hätte. Aus dieser Länge kann dann, wenn auch noch die Schwingungsdauer genau gemessen ist, die Beschleunigung der Schwere bestimmt werden.

Behufs Ableitung der hierzu erforderlichen Sätze denken wir uns einen beliebigen festen Körper von der Masse M, der bezüglich irgend einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Axe das Trägheitsmoment L hat.

$$\lambda = \sqrt{L/M}$$

sei der Trägheitsradius bezüglich dieser Axe. Wir ziehen eine zu dieser Axe Parallele durch den Körper, welche die Entfernung σ vom Schwerpunkte hat, stellen diesen so, dass beide Axen horizontal liegen und lassen ihn unter dem Einflusse der Schwere allein um die letztere Axe schwingen. Sein Trägheitsmoment bezüglich der letzteren Axe ist

$$L + M\sigma^2 = M(\lambda^2 + \sigma^2),$$

daher seine Schwingungsdauer

158) $$\pi\sqrt{\frac{L+M\sigma^2}{Mg\sigma}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{\lambda^2}{\sigma} + \sigma}\,.$$

Dieselbe ist also für alle parallelen, in gleicher Distanz vom Schwerpunkt befindlichen Axen gleich.

Betrachten wir in diesem Ausdrucke nur σ als variabel, so wird er ein Minimum $\pi\sqrt{2\lambda/g}$ für $\sigma = \lambda$ haben. Die

Schwingungsdauer ist also sehr gross, wenn sich die Axe in sehr grosser Entfernung vom Schwerpunkte befindet. Sie wird kleiner, bis die Entfernung der Drehungsaxe vom Schwerpunkte gleich dem Trägheitsradius ist, welcher der parallelen, durch den Schwerpunkt gehenden Axe entspricht. Rückt die Axe noch näher an den Schwerpunkt, so wächst die Schwingungsdauer wieder und wird abermals unendlich, wenn die Axe dem Schwerpunkte unendlich nahe kommt. Wir fragen nun, wie gross σ gewählt werden muss, damit die Schwingungsdauer gleich der eines einfachen Pendels von gegebener Länge l ist. Ist l kleiner als 2λ, so ist offenbar die Schwingungsdauer des einfachen Pendels kleiner als die kleinste Schwingungsdauer des zusammengesetzten, die Aufgabe daher nicht lösbar. Ist $l = 2\lambda$, so tritt die Gleichheit der Schwingungsdauer gerade für die kleinste Schwingungsdauer des zusammengesetzten Pendels, also für $\sigma = \lambda$ ein. Ist endlich $l > 2\lambda$, so muss es immer zwei Werthe von σ geben, σ_1 und σ_2, für welche die Schwingungsdauern gleich werden. In der That liefert die Gleichsetzung der beiden Schwingungsdauern also der beiden Ausdrücke 157) und 158) die quadratische Gleichung $\sigma^2 - l\sigma + \lambda^2 = 0$, welche in diesem Falle stets zwei verschiedene Wurzeln hat. Aus den bekannten Eigenschaften der Wurzeln einer Gleichung folgt, dass die Summe $\sigma_1 + \sigma_2$ der beiden Distanzen der Axe vom Schwerpunkte, für welche die Schwingungsdauer der des einfachen Pendels gleich ist, gleich der Länge l dieses einfachen Pendels ist. Der Trägheitsradius λ, welcher der parallelen, durch den Schwerpunkt gehenden Axe entspricht, ist aber das geometrische Mittel der beiden Werthe des σ.

Das experimentelle Verfahren kann nun folgendermaassen skizzirt werden. Man verfertigt ein bezüglich einer Ebene möglichst symmetrisches Pendel und bringt daran zu entgegengesetzten Seiten des Schwerpunktes zwei Schneiden so an, dass beide ihre scharfe Kante dem Schwerpunkte zukehren und sich so verschieben lassen, dass ihre scharfen Kanten dabei immer möglichst parallel und in der Symmetrieebene bleiben. Man stellt sie dann durch Kunstgriffe, deren Beschreibung nicht hierher gehört, so ein, dass

das Pendel auf jede der beiden Kanten dieser Schneiden aufgelegt genau dieselbe Schwingungsdauer hat, ohne dass jedoch beide dieselbe Entfernung vom Schwerpunkte haben. Dann ist die Summe der Entfernungen der beiden Kanten vom Schwerpunkte, also, da dieser in ihrer Ebene liegt, die Entfernung der beiden Kanten gleich der Länge des einfachen Pendels, welches dieselbe Schwingungsdauer hätte. Die Entfernung der beiden Kanten und die Schwingungsdauer des auf der einen oder anderen Kante ruhenden zusammengesetzten (physischen) Pendels kann aber sehr genau gemessen und so indirect die Länge l eines einfachen Pendels von gleicher Schwingungsdauer τ und diese Schwingungsdauer selbst bestimmt werden, woraus dann g mittelst der Formel 157) folgt. Die Correctionen, welche man wegen des Luftwiderstandes, der mangelnden unendlichen Kleinheit der Amplituden, der unvollständigen Realisirung dieser oder jener Bedingung anzubringen hat, wären nicht allzu schwer ableitbar, aber viel zu weitläufig, um hier erwähnt werden zu können.

§ 62. Der Schwingungsmittelpunkt.

Wir wollen hieran noch einige Bemerkungen knüpfen, welche Maxwell in seiner Mechanik bringt. Wenn ein um eine Axe drehbarer Körper nicht aufhört starr zu sein und dieselben Kräfte auf ihn wirken, so würde er sich, wie wir sahen, unter denselben Anfangsbedingungen in derselben Weise bewegen, wenn die Masse aller übrigen Massentheilchen desselben gleich Null gemacht und nur die eines einzigen Massentheilchens gleich der gesammten Masse M des Körpers gemacht würde, welches sich in einer Entfernung von der Axe befindet, die gleich dem Trägheitsradius λ ist. Man kann sagen, dass sich das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich jener Axe durch das dieser einzigen Masse ersetzen lässt. Wir können dieselbe auch durch zwei Massen μ_1 und μ_2 ersetzen, von denen die eine in der Axe, die andere in einem zu suchenden Abstande davon sich befindet und welche zusammen gleich der Gesammtmasse des Körpers sind. Da wir nun eine verfügbare Grösse mehr haben, so können wir diese beiden Massentheilchen so wählen, dass auch ihr

gemeinsamer Schwerpunkt mit dem des Körpers zusammenfällt. Wir erreichen dadurch einen zweifachen Vortheil.

Erstens ist auch die Resultirende der Schwerkräfte, welche auf diese beiden Massentheilchen wirken, identisch wie für die Schwerkräfte, welche auf den ursprünglich gegebenen Körper wirken.

Zweitens ist nach dem in § 57 entwickelten Satze über das Trägheitsmoment bezüglich paralleler Axen auch das Trägheitsmoment der beiden Massen gleich dem des Körpers bezüglich jeder der ursprünglich gegebenen parallelen Axe.

Um Grösse und Lage dieser beiden Massen zu finden, fällen wir vom Schwerpunkte S des Körpers auf die ursprünglich gegebene Drehungsaxe eine Senkrechte $S\,O$, deren Länge wir wieder mit σ bezeichnen. In O denken wir uns eine Masse μ_1, auf der von O nach S gezogenen Geraden im Punkte P jenseits S eine zweite Masse μ_2 in der Entfernung x von S; wir erhalten

$$\mu_1 + \mu_2 = M,$$

weil die Gesammtmasse,

$$\mu_1 \sigma^2 + \mu_2 x^2 = L = \lambda^2 M,$$

weil das Trägheitsmoment bezüglich der durch den Schwerpunkt gehenden Axe und

$$\mu_1 \sigma = \mu_2 x,$$

weil der Schwerpunkt für den Körper und für das aus beiden Massen gebildete System gleich sein soll.

Substituirt man den aus der ersten Gleichung folgenden Werth von μ_2 in die zweite und dritte und dann den aus der dritten folgenden Werth von μ_1 in die zweite, so folgt

$$x = \lambda^2 / \sigma,$$

daher

$$\mu_1 = \frac{M \lambda^2}{\lambda^2 + \sigma^2}, \quad \mu_2 = \frac{M \sigma^2}{\lambda^2 + \sigma^2}.$$

Da nun das System der beiden starr verbunden gedachten Massen μ_1 und μ_2 dasselbe Trägheitsmoment bezüglich der ursprünglich gegebenen Axe hat, wie der gegebene Körper und auch die Schwere dieselbe Wirkung darauf ausübt, so muss es als zusammengesetztes Pendel unter dem

Einflusse der Schwere um diese Axe, welche wir uns horizontal denken, schwingend auch dieselbe Schwingungsdauer haben. Da ferner μ_1 in der Axe selbst liegt, so ist dies die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, dessen Masse sich in P befindet. Der Körper schwingt also um die betreffende Axe genau so wie ein einfaches Pendel, dessen Masse sich in P befindet, weshalb P der Schwingungsmittelpunkt des zusammengesetzten Pendels heisst. Da dieses einfache Pendel die Länge

$$\sigma + x = \sigma + \lambda^2 / \sigma$$

hat, so ist dies die früher mit l bezeichnete Länge desjenigen einfachen Pendels, das dieselbe Schwingungsdauer hat. Nun hat aber das starr verbundene System der beiden Massen μ_1 und μ_2 auch bezüglich jeder parallelen Axe dasselbe Trägheitsmoment wie der Körper. Wenn wir daher jetzt beide Systeme um eine parallele durch den Punkt P, der früher Schwingungsmittelpunkt war, also durch die Masse μ_2 gehende Axe unter dem Einflusse der Schwere schwingen lassen, so haben beide untereinander wieder dieselbe Schwingungsdauer. Das System der beiden Massen μ_1 und μ_2 ist aber dann wieder ein einfaches Pendel von der Länge $l = \sigma + \lambda^2 / \sigma$. Daher ist jetzt O der Schwingungsmittelpunkt des Körpers, welcher wieder dieselbe Schwingungsdauer hat wie früher, wo O der Drehungspunkt und P der Schwingungsmittelpunkt war und man sieht ohne Rechnung, dass der Körper um beide Axen dieselbe Schwingungsdauer hat, sowie auch ein einfaches Pendel, dessen Länge der Abstand der Axen ist.

Wir wollen durch ein ebenes Bret eine Stricknadel senkrecht auf dessen Ebene stecken. l sei die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes von der Stricknadel, wenn diese horizontal liegt und das Bret als Pendel um sie als Axe schwingt. An die Stricknadel befestigen wir einen Faden von der Länge l, dessen Ende eine kleine Kugel trägt, welche das Bret gerade berühren soll. Wir fassen die beiden Enden der Stricknadel mit den Fingern und bewegen sie beliebig auf und ab und hin und her, jedoch so, dass sie immer horizontal und das Bret immer in derselben Ebene bleibt. Nun ist die Bewegung der Kugel vom

Absolutwerth ihrer Masse unabhängig; bei passender Wahl desselben aber sowohl das Trägheitsmoment, als auch die Wirkung der Schwere für das Bret und die kleine Kugel gleich; daher bewegen sie sich genau in derselben Weise. Die Kugel berührt also das Bret immer in demselben Punkte. Die durch ihren Mittelpunkt gezogene horizontale Gerade geht fortwährend durch den Schwingungsmittelpunkt des Brettes.

§ 63. Der Mittelpunkt des Stosses.

Wir wollen wieder zu dem ursprünglich gegebenen Körper und den beiden starr verbundenen Massen μ_1 und μ_2 zurückkehren. Der Körper und die beiden Massen sollen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die ursprüngliche Axe rotiren. Die Wirkung der Schwere können wir uns dabei, wenn wir wollen, hinwegdenken. Durch die Masse μ_2 sei eine zweite, der ersten Axe parallele, massenlose Axe gelegt und mit beiden Massen starr verbunden. Wir denken uns diese zweite Axe plötzlich festgehalten und gleichzeitig die Lager der ursprünglichen Axe entfernt. Dadurch wird die Masse μ_2 in ihrer Bewegung plötzlich aufgehalten und da μ_1 ohnedies ruhte, kommt das System beider Massen zur Ruhe, ohne dass auf die erste Masse irgend ein Stoss ausgeübt wird. Würden wir dagegen irgend eine andere, mit beiden Massen fest verbundene Axe, welche nicht durch die augenblickliche Bewegungsrichtung der Masse μ_2 hindurchgeht, plötzlich festhalten, so würde das System nur zur Ruhe kommen, wenn wir gleichzeitig die ursprüngliche Axe festhalten würden, welche also einen Stoss erführe. Das Gleiche gilt natürlich auch von dem Körper, da dessen Trägheitsmoment bezüglich aller dieser Axen dasselbe ist. Wenn wir ihn durch irgend eine Kraft plötzlich aufhalten, deren Richtung durch eine durch den Schwingungsmittelpunkt parallel der Drehungsaxe gezogene Gerade geht und senkrecht auf der durch diesen und die Drehungsaxe gelegten Ebene steht, so erfährt die ursprüngliche Drehungsaxe dabei keinen Stoss.

Wenn die Drehungsaxe ausserdem noch Hauptträgheitsaxe bezüglich ihres Durchschnittspunktes mit der zu ihr

senkrechten, die Richtung der Kraft enthaltenden Ebene ist, so erfährt sie auch kein Drehmoment, es erfährt also dann jedes der Lager keinen Stoss. Der Fusspunkt der in diesem Falle von der Axe auf die Richtung der Kraft gefällten Senkrechten heisst der Mittelpunkt des Stosses. Nicht nur wenn die durch ihn der ursprünglichen Drehaxe parallel gezogene Axe, sondern auch wenn dieser eine Punkt während der Drehung plötzlich festgehalten wird, erfährt keines der Lager der ursprünglichen Drehaxe einen Stoss.

§ 64. Reduction der allgemeinen Bewegung eines festen Körpers auf die, wo ein Punkt festgehalten ist. Lebendige Kraft der Bewegung relativ gegen den Schwerpunkt.

Wenn in einem festen Körper ein einziger Punkt festgehalten wird, so kann er sich noch beliebig nach allen Richtungen um denselben drehen. Um die Gesetze dieser Drehung zu finden, müssen wir uns zu den Kräften, welche sonst auf den festen Körper wirken, noch eine in diesem Punkte angreifende Kraft hinzugefügt denken, deren Grösse und Richtung aus den drei Gleichungen 134) stets so zu bestimmen ist, dass dieser Punkt in Ruhe bleibt. Diese Kraft ist eben diejenige, welche die den Punkt festhaltende Vorrichtung auf den Körper ausübt. Wir wollen den festen Punkt als Coordinatenanfangspunkt eines im Raume fixen wählen, dann sind also die Momente dieser Kraft bezüglich der Coordinatenaxen Null. Dieselbe geht also in die drei Gleichungen 136) nicht ein, welche somit die Bewegung des Körpers bestimmen. Bezeichnen wir mit x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punktes des Körpers bezüglich dieses Coordinatensystems und mit X, Y, Z die Componenten der darauf wirkenden gesammten äusseren Kraft in den Coordinatenrichtungen, so erhalten wir, wenn wir immer blos die auf eine der Coordinatenrichtungen bezughabende Gleichung hinschreiben, analog mit Gleichung 136) folgende Gleichung

$$159) \qquad \sum m\left(y'\frac{d^2 x'}{d t^2} - x'\frac{d^2 y'}{d t^2}\right) = \sum (y' Z - x' Y)$$

als Repräsentanten der drei Bewegungsgleichungen des Körpers bei der Drehung um einen festen Punkt.

Wir sahen, dass bei einem beliebigen Systeme die Bewegung des Schwerpunktes durch die Gleichungen 66) bestimmt ist, also immer so geschieht, als ob daselbst die ganze Masse des Körpers vereint wäre und alle auf den Körper wirkenden Kräfte auf sie wirkten. Die Bewegung des Schwerpunktes ist hiermit auf das einfachere, schon behandelte Problem der Bewegung eines einzigen materiellen Punktes unter dem Einflusse gewisser Kräfte zurückgeführt. Dies gilt also auch für einen beliebigen festen Körper. Da wir jetzt die äusseren Kräfte nicht mit den deutschen, sondern den lateinischen Buchstaben bezeichnen, so verwandeln sich die Gleichungen 66) für einen solchen in

$$160)\quad M\frac{d^2\xi}{dt^2}=\sum X,\quad M\frac{d^2\eta}{dt^2}=\sum Y,\quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\sum Z,$$

wenn wie in den Formeln 66) M die Gesammtmasse des Körpers ist.

Wir wollen nun ferner beweisen, dass die Drehung eines vollkommen freien festen Körpers um den Schwerpunkt immer genau so geschieht, als ob der Schwerpunkt festgehalten wäre und im Uebrigen dieselben Kräfte auf den festen Körper wirkten, was wir den Satz über die Reduction der freien Drehung eines festen Körpers auf die um einen festen Punkt nennen wollen. Wir können daher das Problem der Bewegung eines vollkommen freien festen Körpers unter dem Einflusse beliebiger Kräfte als gelöst betrachten, wenn wir das der Drehung desselben um einen festen Punkt unter dem Einflusse beliebiger Kräfte gelöst haben. Wir werden das letztere Problem im zweiten Theile ausführlich behandeln, wollen aber jetzt schon den Beweis des Theorems der Reduction der freien Drehung eines festen Körpers auf die um einen festen Punkt liefern. Die Momentengleichung 70) lautet in unserer jetzigen Bezeichnung für den vollkommen freien Körper:

$$161)\quad \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\sum(yZ-zY),$$

welche wir wieder auch als Repräsentanten der beiden analogen, für die beiden anderen Coordinatenaxen betrachten. Seien wieder ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes S des Körpers. Wir benutzen nun ein zweites bewegliches

Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt S des Körpers sei und dessen Axen denen des ersten Coordinatensystems stets parallel seien. x', y', z' seien die Coordinaten desjenigen Punktes des Körpers bezüglich des zweiten Coordinatensystems, der bezüglich des ersten Coordinatensystems die Coordinaten x, y, z hat. Dann ist

162) $$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta, \quad z = z' + \zeta.$$

Ferner ist, da der Schwerpunkt zu jeder Zeit der Coordinatenursprung des neuen Coordinatensystems ist, zu jeder Zeit

163) $$\sum m x' = \sum m y' = \sum m z' = 0,$$

woraus durch Differentiation nach der Zeit folgt

164) $$\sum m \frac{d x'}{d t} = 0, \quad \sum m \frac{d^2 x'}{d t^2} = 0, \text{ etc.}$$

Mit Rücksicht auf die Werthe 162) folgt

$$\sum m y \frac{d^2 z}{d t^2} = \sum m (y' + \eta)\left(\frac{d^2 z'}{d t^2} + \frac{d^2 \zeta}{d t^2}\right) =$$

$$= \sum m y' \frac{d^2 z'}{d t^2} + \eta \sum m \frac{d^2 z'}{d t^2} + \frac{d^2 \zeta}{d^2 t} \sum m y' + \eta \frac{d^2 \zeta}{d t^2} M.$$

Das zweite und dritte Glied der letzten Zeile verschwindet mit Rücksicht auf 163) und 164), das letzte ist mit Rücksicht auf 160) gleich $\eta \sum Z$. Daher folgt

$$\sum m y \frac{d^2 z}{d t^2} = \sum m y' \frac{d^2 z'}{d t^2} + \eta \sum Z$$

und ebenso

$$\sum m z \frac{d^2 y}{d t^2} = \sum m z' \frac{d^2 y'}{d t^2} + \zeta \sum Y.$$

Da ferner

$$\sum (y Z - z Y) = \sum (y' Z - z' Y) + \eta \sum Z - \zeta \sum Y$$

ist, so folgt endlich aus 161)

$$\sum m \left(y' \frac{d^2 z'}{d t^2} - z' \frac{d^2 y'}{d t^2}\right) = \sum (y' Z - z' Y).$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung 159). Letztere würde die Bewegung desselben Körpers relativ gegen drei stets durch den Schwerpunkt gehende, nicht rotirende Coordinatenaxen bestimmen, wenn nebst den übrigen unverändert auf den Körper wirkenden Kräften auf

dessen Schwerpunkt noch stets eine Kraft wirken würde, die ihn fortwährend in Ruhe erhält. Es geschieht also in der That die Drehung um den Schwerpunkt genau so, als ob derselbe ohne eine andere Veränderung der auf den Körper wirkenden Kräfte fortwährend festgehalten würde. Bevor wir jedoch zur Drehung eines festen Körpers um einen festen Punkt übergehen, wollen wir noch eine Reihe wichtiger allgemeiner Principe kennen lernen.

Wir wollen vorher noch kurz ein allgemeines Theorem, dass sich nicht blos auf feste Körper bezieht, beweisen. Seien n ganz beliebige materielle Punkte gegeben, die starr verbunden sein können oder nicht. ξ, η, ζ seien die Coordinaten des Schwerpunktes des von diesen Punkten gebildeten Systems zur Zeit t bezüglich eines beliebigen fixen Coordinatensystems. x, y, z die Coordinaten eines beliebigen der materiellen Punkte zur selben Zeit bezüglich desselben Coordinatensystems, x', y', z' die Coordinaten desselben materiellen Punktes bezüglich eines Coordinatensystems, dessen Axen immer denen des ursprünglichen parallel sind, aber sich so parallel zu sich selbst im Raume bewegen, dass sie immer durch den Schwerpunkt gehen. Es ist dann:

$$T = \sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

die gesammte lebendige Kraft des Systems. Den Ausdruck

$$T' = \sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

können wir als die lebendige Kraft der relativen Bewegung der materiellen Punkte gegen den Schwerpunkt bezeichnen.

Substituiren wir im Ausdrucke für T die Werthe 162) und bedenken, dass

$$\sum m \frac{d\xi}{dt}\frac{dx'}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\sum m \frac{dx'}{dt}$$

ist, also nach 164) verschwindet, so folgt

$$T = T' + \frac{m}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right].$$

Hier ist das letzte Glied die lebendige Kraft, welche der gesammten Masse aller Punkte zukäme, wenn dieselbe

fortwährend im Schwerpunkte vereint wäre und die Bewegung desselben hätte. Man nennt diese letztere lebendige Kraft die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes. Es ist also die gesammte lebendige Kraft aller Punkte des Systems immer gleich der Summe der lebendigen Kraft ihrer Bewegung relativ gegen den Schwerpunkt und der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes.

VI. Vergleich der Principe, die durch Variation des Zustandes zu einer bestimmten Zeit gewonnen werden.

---

§ 65. Analytischer Beweis eines speciellen* Falles des Gauss'schen Principes.

Wir wollen nun zur Ableitung eines neuen mechanischen Principes übergehen. Es sei zunächst ein beliebiges holonomes System gegeben, dessen Bedingungen ausschliesslich durch Gleichungen definirt seien, die wir also in der Form

$$\varphi_i(t, x_1, y_1 \dots z_n) = 0 \tag{165}$$

schreiben können, welche gleichlautend mit 127) ist. Auch in allem Uebrigen wollen wir die in § 34 gebrauchten Bezeichnungen verwenden. Wir bezeichnen wieder die Bewegung, welche das System bei einem bestimmten Anfangszustande unter dem Einflusse der darauf wirkenden Kräfte und unter den herrschenden Bedingungen macht, als die wirkliche Bewegung desselben. Dabei sind die Coordinaten x_h, y_h, z_h des $h$ten materiellen Punktes gewisse Functionen $\chi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ der Zeit. Wir fanden schon in § 43, dass die wirkliche Bewegung durch die Gleichungen 129) bestimmt ist.

Wir wollen nun die Coordinaten x_h, y_h, z_h jedes materiellen Punktes gleich etwas anderen Functionen $\chi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\omega_1(t)$ der Zeit setzen. Die dadurch bestimmte Bewegung des

* speciell, weil ... ausgeschlossen.

Systems nennen wir die nach Gauss' Manier variirte Bewegung. Diese anderen Functionen der Zeit sollen so gewählt werden, dass zu einer bestimmten Zeit, die übrigens beliebig gewählt werden kann, weder die Werthe der Coordinaten, noch deren erste Differentialquotienten nach der Zeit, die wir durch einen angehängten Strich markiren, eine Veränderung erfahren. Wohl aber sollen die zu dieser Zeit geltenden Werthe der Beschleunigungen x_h'', y_h'', z_h'' für jeden materiellen Punkt unendlich kleine Zuwächse $\delta x_h''$, $\delta y_h''$, $\delta z_h''$ erfahren, welche sonst beliebig sind; sie sollen nur der Beschränkung unterworfen sein, dass die variirte Bewegung ebenfalls den Bedingungen des Systems genügen soll, d. h. die Substitution von $\chi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\omega_1(t)$ für x_h, y_h, z_h soll ebenfalls die Bedingungen des Systems, welche die Form 165) haben, befriedigen. Die Zuwächse, welche die der Zeit t entsprechenden Werthe der verschiedenen Grössen beim Uebergang von der wirklichen zu der nach Gauss' Manier variirten Bewegung erfahren, bezeichnen wir wieder durch ein vorgesetztes δ. Wir wollen nun beweisen, dass für den Uebergang von der wirklichen Bewegung zu der nach Gauss' Methode variirten stets

$$166)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{h=1}^{h=n}[(m_h x_h'' - X_h)\,\delta x_h'' + (m_h y_h'' - Y_h)\,\delta y_h''\\ &\qquad\qquad + (m_h z_h'' - Z_h)\,\delta z_h''] = 0 \quad \text{ist.}\end{aligned}\right.$$

Natürlich gilt dies nur gerade für den fraglichen Zeitmoment, für welchen die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten keine Aenderungen erfahren, also:

$$167)\quad \left\{\begin{aligned}&\delta x_h = \delta y_h = \delta z_h = \delta x_h' = \delta y_h' = \delta z_h' = 0,\\ &\qquad\qquad h = 1,\ 2 \ldots n\end{aligned}\right.$$

ist. Die Functionen $\chi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\omega_1(t)$ können immer so gewählt werden, dass diese Gleichung für einen bestimmten, beliebig gewählten Zeitmoment, nicht aber so, dass sie für eine endliche Zeitdauer erfüllt sind. In letzterem Falle müssten auch $\delta x_h''$, $\delta y_h''$, $\delta z_h''$ während der ganzen Zeit verschwinden. Wir beweisen die Gleichung 166) in folgender Weise: aus den Gleichungen 165) folgt für die wirkliche Bewegung während der Zeit dt

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h} x_h' + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_h} y_h' + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_h} z_h' \right) = 0.$$

Daraus folgt durch nochmalige Differentiation nach t

$$168) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h} x_h'' + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_h} y_h'' + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_h} z_h'' \right) = \Phi,$$

wobei Φ blos die Zeit t, die Coordinaten und deren erste Ableitungen nach der Zeit enthält. Da nun aber weder die Coordinaten, noch deren erste Ableitungen nach der Zeit beim Uebergange von der wirklichen zu der nach Gauss' Manier variirten Bewegung eine Veränderung erfahren, so erfährt weder Φ noch $\partial \varphi_l / \partial x_h$, $\partial \varphi_l / \partial y_h$, $\partial \varphi_l / \partial z_h$ bei diesem Uebergange eine Veränderung. Es folgt also aus Gleichung 168)

$$169) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h} \delta x_h'' + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_h} \delta y_h'' + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_h} \delta z_h'' \right) = 0.$$

Die wirkliche Bewegung erfolgt nun den Gleichungen 129) gemäss. Multiplicirt man die Gleichung 129) mit $\delta x_h''$, die beiden analogen für die y- und z-Axe geltenden aber mit $\delta y_h''$ und $\delta z_h''$ und addirt alle so für alle Werthe des h gebildeten Gleichungen, so folgt mit Rücksicht auf 169) sofort die Gleichung 166). Bilden wir nun den Ausdruck

$$170) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{1}{m_h} \left[(m_h x_h'' - X_h)^2 + (m_h y_h'' - Y_h)^2 + (m_h z_h'' - Z_h)^2 \right],$$

so erfahren in diesem Ausdrucke beim Uebergange von der wirklichen zu der nach Gauss' Manier variirten Bewegung nur die Grössen x_h'', y_h'' und z_h'' Veränderungen. Die erste Variation des Ausdruckes 170) ist also durch die linke Seite der Gleichung 166) gegeben. Diese Gleichung drückt also aus, dass die erste Variation des Ausdruckes 170) beim Uebergange von der wirklichen zu der nach Gauss' Manier variirten Bewegung für die Zeit t verschwindet und da, wie man sofort sieht, die zweite Variation dieses Ausdruckes jedenfalls positiv ist, so ist dieser Ausdruck ein Minimum. Er nimmt für jede Zeit t zu, wenn man für diese Zeit von

der wirklichen Bewegung zu einer beliebigen nach Gauss' Manier variirten übergeht.

Befinden sich unter den Bedingungen nicht holonome Gleichungen von der Form 78), so muss für jede Bedingung von dieser Form beim Uebergange von der wirklichen zur variirten Bewegung, damit der Ausdruck 170) ein Minimum sei, wiederum auch die variirte Bewegung in ihrem zeitlichen Verlaufe jener Bedingung entsprechen. Es muss also auch für die variirte Bewegung

$$\tau + \sum_{h=1}^{h=n}(\xi_h x'_h + \eta_h y'_h + \zeta_h z'_h) = 0$$

sein. Hieraus folgt durch Differentiation nach der Zeit

$$\sum_{h=1}^{h=n}(\xi_h x''_h + \eta_h y''_h + \zeta_h z''_h) = \Phi,$$

wobei Φ wie in 168) eine Function der Grössen ist, deren Variation nach 167) verschwindet. Daher folgt aus der letzten Gleichung durch Variation

$$\sum_{h=1}^{h=n}(\xi_h \delta x''_h + \eta_h \delta y''_h + \zeta_h \delta z''_h) = 0. \tag{171}$$

Das im gegenwärtigen Paragraphen Vorgetragene bildet im Wesentlichsten den Inhalt des Gauss'schen Princips des kleinsten Zwanges. Wir wollen es durch geometrische Constructionen noch weiter veranschaulichen und dabei auch den bisher ausgeschlossenen Fall mit einbeziehen, dass gewisse Bedingungen die Form von Ungleichungen haben.

§ 66. Begriff des Zwanges.

Wir wollen uns die Lage der sämmtlichen n materiellen Punkte zu den Zeiten t, $t + dt$ und $t + 2dt$ verzeichnen. Der $h$te derselben, dessen Masse m_h ist, soll sich zu diesen Zeiten in den Punkten A_h, B_h, C_h befinden (Fig. 16).

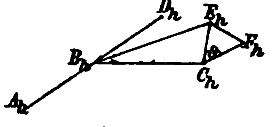


Fig. 16.

Sei ferner D_h der Punkt des Raumes, wohin dieser materielle Punkt zur Zeit $t + 2dt$ gelangt wäre, wenn er sich, wie dies wirklich der Fall ist, zur Zeit t in A_h, zur Zeit $t + dt$ in B_h befunden hätte, wenn aber gar

keine Kräfte auf ihn gewirkt hätten. E_h aber sei der Punkt des Raumes, wohin er zur Zeit $t + 2dt$ gelangt wäre, wenn er wieder zur Zeit t in A_h, zur Zeit $t + dt$ in B_h gewesen wäre und blos die expliciten Kräfte auf ihn gewirkt hätten, deren Resultirende in den Coordinatenrichtungen die Componenten X_h, Y_h, Z_h hat.

Dann ist $B_h D_h = A_h B_h$ und diese Strecken fallen auch in dieselbe Gerade. $D_h E_h$ ist die mit dt^2 multiplicirte Beschleunigung, welche der materielle Punkt durch die expliciten Kräfte allein während der Zeit dt erfahren würde und welche wir in § 34 die explicite Beschleunigung genannt haben. Die Projectionen dieser Strecke $D_h E_h$ auf die Coordinatenaxen sind daher nach 84)

$$\frac{1}{m_h} X_h dt^2, \quad \frac{1}{m_h} Y_h dt^2, \quad \frac{1}{m_h} Z_h dt^2.$$

$D_h C_h$ dagegen ist die mit dt^2 multiplicirte Beschleunigung, welche er wirklich erfährt, welche also durch die Totalkräfte, d. h. die expliciten und die Verbindungskräfte zusammen erzeugt wird.

Bezeichnen wir wie in Gleichung 85) die Componenten der resultirenden Verbindungskraft, welche auf den $h$ten materiellen Punkt wirkt, in den Coordinatenrichtungen mit $\mathfrak{x}_h$, $\mathfrak{y}_h$, $\mathfrak{z}_h$, so sind also nach 81) und 83)

$$\frac{1}{m_h}(X_h + \mathfrak{x}_h) = \frac{d^2 x_h}{dt^2} = x_h'', \quad \frac{1}{m_h}(Y_h + \mathfrak{y}_h) = y_h'',$$
$$\frac{1}{m_h}(Z_h + \mathfrak{z}_h) = z_h''$$

die durch dt^2 dividirten Projectionen der Geraden $D_h C_h$ auf die Coordinatenaxen. Verbinden wir die beiden Punkte E_h und C_h durch die vom ersteren gegen den letzteren Punkt hin gezogene Gerade $E_h C_h$, so stellt diese Gerade die mit dt^2 multiplicirte Beschleunigung dar, welche der materielle Punkt durch die Verbindungskräfte allein während der Zeit dt erhalten hätte. Die durch dt^2 dividirten Projectionen von $E_h C_h$ auf die Cordinatenaxen sind also

$$\frac{1}{m_h}\mathfrak{x}_h, \quad \frac{1}{m_h}\mathfrak{y}_h, \quad \frac{1}{m_h}\mathfrak{z}_h.$$

Die gleiche, aber entgegengesetzte Gerade $C_h E_h$ ist durch dt^2 dividirt, das, was wir in § 34 die verlorene Beschleunigung des betreffenden Punktes nannten, d. h. die Grösse, die man von der Beschleunigung, welche die expliciten Kräfte bei Abwesenheit aller Bedingungen erzeugen würden, abziehen muss, um die wirkliche Beschleunigung zu erhalten. Die durch dt^2 dividirten Projectionen von $C_h E_h$ auf die Coordinatenaxen sind also nach 85)

$$172)\quad \begin{cases} -\frac{\mathfrak{x}_h}{m_h} = \frac{1}{m_h}(X_h - m_h x''_h), \quad -\frac{\mathfrak{y}_h}{m_h} = \frac{1}{m_h}(Y_h - m_h y''_h), \\ -\frac{\mathfrak{z}_h}{m_h} = \frac{1}{m_h}(Z_h - m_h x''_h). \end{cases}$$

Nach 172) ist der Ausdruck 170), von dem wir bewiesen haben, dass er für die wirkliche Bewegung ein Minimum ist, gleich

$$173)\quad \frac{1}{dt^4}\sum_{h=1}^{h=n} m_h . (C_h E_h)^2,$$

eigentlich $E_h C_h^2$ [illegible] die Quadrates derselben.

also gleich der Summe der mit der jedesmaligen Masse multiplicirten Quadrate der verlorenen Beschleunigungen aller materiellen Punkte oder der Summe der durch die Masse dividirten Quadrate aller verlorenen Kräfte, da für jeden Punkt die verlorene Kraft gleich dem Producte seiner Masse in seine verlorene Beschleunigung ist.

Wären keine Verbindungskräfte vorhanden, so wäre der materielle Punkt m_h zur Zeit $t + 2dt$ unter dem Einflusse der wirkenden expliciten Kräfte nach E_h gelangt. In Folge der Verbindungskräfte, welche die Bedingungsgleichungen herhalten, ist er nicht nach E_h, sondern nach C_h gelangt, er wurde also durch die Verbindungskräfte gezwungen, sich nach C_h, statt nach E_h zu bewegen. Die Strecke $E_h C_h$ ist die durch die Verbindungen erzwungene Abweichung von der expliciten Bewegung.

Bekanntlich wird in der Methode der kleinsten Quadrate das Quadrat der Abweichung des beobachteten vom wahren Werthe multiplicirt mit dem sogenannten Gewichte der Beobachtung als ausschlaggebend angesehen. Analog wollen

wir auch hier das mit der Masse des materiellen Punktes multiplicirte Quadrat der Abweichung $E_h C_h$, das wir noch mit der als constant zu betrachtenden Grösse dt^4 dividiren, um Endliches zu erhalten,[1]) also die Grösse

$$m_h \cdot (C_h E_h)^2 / dt^4$$

als das Maass der durch die Verbindungen bewirkten Störung der Bewegung bezeichnen. Wir nennen diese Grösse auch das Maass des Zwanges, den der betreffende Punkt durch die Verbindungen erlitten hat oder kürzer den Zwang des betreffenden Punktes. Die Summe der so für alle materiellen Punkte des Systems gebildeten Grössen, also der Ausdruck 173) heisst der Zwang des ganzen Systems zur betreffenden Zeit.

Der im vorigen Paragraphen gefundene Satz kann also unter Einführung dieser Ausdrucksweise dahin ausgesprochen werden, dass der Zwang des ganzen Systems für die wirkliche Bewegung zu jeder Zeit ein Minimum ist, d. h. dass er zu jeder Zeit wächst, wenn man von der wirklichen Bewegung zu einer beliebigen, nach Gauss' Manier variirten Bewegung übergeht.

Unter dem Zwange des Systems bei der variirten Bewegung verstehen wir dabei den Ausdruck, den wir aus 173) erhalten, wenn wir darin für C_h den Punkt F_h des Raumes setzen, wo sich der betreffende materielle Punkt bei der variirten Bewegung zur Zeit $t + 2\,dt$ befindet. Letzterer Zwang ist also

174) $$\frac{1}{dt^4} \sum_{h=1}^{h=n} m_h \cdot (F_h E_h)^2.$$

Das Minimum des Ausdruckes 173) ist also so zu verstehen: die Lage sämmtlicher Punkte zu den ebenfalls gegebenen Zeiten t und $t + dt$ sei unverändert gegeben. Daraus kann die Lage berechnet werden, welche sie zur Zeit $t + 2\,dt$ hätten, wenn nur die expliciten Kräfte, aber keine Bedingungen

---

[1]) Gerade der Quotient $m_h \cdot (C_h E_h)^2 / dt^4$ ist von der Grösse des dt unabhängig, da $C_h E_h$ proportional dt^2 ist.

vorhanden wären. Der Punkt m_h wäre dann zur Zeit $t + 2\,dt$ in E_h; nun werde sämmtlichen Punkten zur Zeit $t + 2\,dt$ irgend eine andere, aber eine mit den Bedingungen verträgliche Lage gegeben, wobei sich m_h in F_h befinde. Von allen diesen Lagen wird zur Zeit $t + 2\,dt$ unter dem vereinten Einflusse der expliciten Kräfte und der Bedingungen des Systems diejenige wirklich eintreten, für welche $\sum_{h=1}^{h=n} m_h.(E_h F_h)^2$ ein Minimum ist, da ja dt als gegebene Constante zu betrachten ist.

Wenn keine expliciten Kräfte vorhanden sind, so würde ohne Verbindungen keiner der Punkte eine Beschleunigung erfahren. Dann fallen die Punkte D_h und E_h zusammen. $E_h C_h$ ist identisch mit der gesammten Beschleunigung und der Ausdruck 173) stellt einfach die Summe der mit den Massen multiplicirten Quadrate der Beschleunigungen aller materiellen Punkte dar. Die Bewegung, für welche diese Summe ein Minimum ist, nennt man in neuer Zeit auch die geradeste, mit den Bedingungen verträgliche Bewegung. Sie tritt dem Principe des kleinsten Zwanges gemäss bei den herrschenden Bedingungen immer ein, wenn keine expliciten Kräfte wirken.

§ 67. Geometrischer Beweis des Princips des kleinsten Zwanges.

Wir wollen nun noch diese Sätze, für welche wir bisher nur den analytischen Beweis des § 65 gegeben haben, geometrisch beweisen, wobei wir uns auch von der beim früheren Beweise eingeführten Beschränkung frei machen werden, dass die Bedingungen keine Ungleichungen enthalten.

Wir fassen da zunächst den Verlauf der wirklichen und derjenigen Bewegung unserer materiellen Punkte von der Zeit t bis zur Zeit $t + 2\,dt$ ins Auge, welche wir die nach Gauss'scher Manier variirte nannten, jetzt aber kurz die variirte nennen wollen. Bei der letzteren sollen sämmtliche materielle Punkte zur Zeit t dieselbe Lage haben, wie bei der wirklichen Bewegung, ebenso zur Zeit $t + dt$. Dadurch sind die Bedingungen 167) ausgedrückt, dass weder die

Coordinaten, noch deren erste Differentialquotienten nach der Zeit eine Aenderung erfahren sollen.

Zur Zeit $t + 2\,dt$ aber soll der $h$te Punkt bei der wirklichen Bewegung in C_h sein, bei der variirten aber irgend eine andere Lage F_h haben. Alle diese neuen Lagen sollen blos an die Bedingung gebunden sein, dass sie mit den zur Zeit $t + 2\,dt$ herrschenden, durch Gleichungen oder Ungleichungen ausgedrückten Bedingungen des Systems vereinbar sind.

Bezeichnen wir daher mit δa_h, δb_h, δc_h die Projectionen der Verschiebung $C_h F_h$ des materiellen Punktes m_h auf die Coordinatenaxen, so muss jeder holonomen Bedingungsgleichung von der Form 165) an Stelle der Relation 86) die Gleichung oder Ungleichung

$$175)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h}\delta a_h + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_h}\delta b_h + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_h}\delta c_h\right) \gtreqless 0$$

entsprechen. Jeder nicht holonomen Bedingungsgleichung oder Ungleichung von der Form 78) oder 80) aber entspricht, wie wir bei Ableitung der Gleichung 171) sahen, an Stelle der Relation 88) die Gleichung oder Ungleichung

$$176)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}(\xi_h\,\delta a_h + \eta_h\,\delta b_h + \zeta_h\,\delta c_h) \gtreqless 0.$$

In diesen beiden Relationen ist für t eigentlich $t + 2\,dt$ zu setzen, wodurch aber die betreffende Relation nur unendlich wenig abgeändert wird.

Nach unseren Festsetzungen ist also die Verschiebung des Systems aus der wirklichen Lage, welche es zur Zeit $t + 2\,dt$ hat, in die variirte Lage, welche es zur selben Zeit hat, jedenfalls eine der Zeit $t + 2\,dt$ entsprechende Virtuelle. Die Relationen 175) und 176) unterscheiden sich ja von 86) und 88) nur dadurch, dass δa_h, δb_h, δc_h statt δx_h, δy_h, δz_h steht. Es muss also die Relation 92), die ja für alle Zeiten gilt, erfüllt sein. An Stelle der in dieser Relation vorkommenden Grössen δx_h, δy_h, δz_h sind natürlich wieder die Projectionen δa_h, δb_h, δc_h der gegenwärtig mit $C_h F_h$ bezeichneten Verschiebung des materiellen Punktes m_h auf

die Coordinatenrichtungen zu setzen. Diese Relation lautet daher:

$$177)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}(\mathfrak{x}_h\,\delta a_h + \mathfrak{y}_h\,\delta b_h + \mathfrak{z}_h\,\delta c_h) \geqq 0.$$

$-\mathfrak{x}_h$, $-\mathfrak{y}_h$, $-\mathfrak{z}_h$ sind aber nach 172) die mit m_h/dt^2 multiplicirten Projectionen von $C_h E_h$ auf die Coordinatenrichtungen. Es ist daher

$$\mathfrak{x}_h\,\delta a_h + \mathfrak{y}_h\,\delta b_h + \mathfrak{z}_h\,\delta c_h = -\,C_h E_h\,.\,C_h F_h\,.\cos\vartheta_h\,.\,m_h/dt^2,$$

wo ϑ_h der Winkel der gerichteten Geraden $C_h E_h$ und $C_h F_h$ ist (vergl. Fig. 16 S. 212).

Bildet man diesen Ausdruck für alle materiellen Punkte, so erhält man gemäss der Relation 177)

$$178)\qquad \sum_{h=1}^{h=n} m_h\,.\,C_h E_h\,.\,C_h F_h\,.\cos\vartheta_h/dt^2 \leqq 0.$$

Der Zwang für die wirkliche Bewegung wurde durch den Ausdruck 173), der für die variirte Bewegung durch den Ausdruck 174) definirt; nun ist in dem Dreiecke $C_h E_h F_h$ (Fig. 16)

$$F_h E_h^2 = C_h E_h^2 + C_h F_h^2 - 2\,C_h E_h\,.\,C_h F_h \cos\vartheta_h.$$

Daher wird:

$$\sum_{h=1}^{h=n} m_h \frac{(F_h E_h)^2}{dt^4} = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \frac{(C_h E_h)^2}{dt^4} + \sum_{h=1}^{h=n} m_h \frac{(C_h F_h)^2}{dt^4} -$$

$$-\,2\sum_{h=1}^{h=n} m_h \frac{C_h E_h\,.\,C_h F_h}{dt^4}\cos\vartheta_h.$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist nothwendig positiv, wenn nicht alle $C_h F_h = 0$, resp. unendlich klein höherer Ordnung als dt^2 sind, wenn also nicht sämmtliche Beschleunigungen für die variirte Bewegung mit denen für die wirkliche zusammenfallen. Das dritte Glied kann nach 178) auch nicht negativ sein. Da nun nach 174) die linke Seite den Zwang für die variirte, das erste Glied der rechten Seite aber nach 173) den Zwang für die wirkliche Bewegung darstellt, so ist für die wirkliche Bewegung der Zwang immer kleiner, als für jede nach der obigen Festsetzung mögliche variirte.

Ersetzen wir in dem ersten Gliede der rechten Seite $(C_h E_h)^2$ durch die Summe der Quadrate seiner durch 172 gegebenen Componenten in den Coordinatenrichtungen, so geht dasselbe wieder über in:

$$\sum_{h=1}^{h=n} m_h \frac{(C_h E_h)^2}{d t^4} = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \left[\left(x_h'' - \frac{1}{m_h} X_h\right)^2 + \left(y_h'' - \frac{1}{m_h} Y_h\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(z_h'' - \frac{1}{m_h} Z_h\right)^2\right],$$

was mit 170) übereinstimmt. Da in diesem Ausdrucke X_h, Y_h, Z_h als gegeben, die Beschleunigungen aber als variabel zu betrachten sind, so liefert die Bedingung, dass derselbe ein Minimum sein soll, allgemein die Relation

$$179) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{h=1}^{h=n} [(m_h x_h'' - X_h)\, \delta x_h'' + (m_h y_h'' - Y_h)\, \delta y_h'' + \\ &\qquad\qquad + (m_h z_h'' - Z_h)\, \delta z_h''] \geqq 0 . \end{aligned} \right.$$

Die Bedingung, dass die Lage sämmtlicher materieller Punkte zu zwei unendlich nahe liegenden Zeiten (den Zeiten t und $t + dt$) mit den für die wirkliche Bewegung zu diesen Zeiten geltenden Lagen zusammenfallen muss, ist der geometrische Ausdruck der Gleichungen 167). Dieselbe wird häufig als selbstverständlich nicht erwähnt, doch ist es jedenfalls im Interesse der Klarheit, sie ausdrücklich hervorzuheben. Die Functionen, welche die Coordinaten für die wirkliche und für die variirte Bewegung durch die Zeit ausdrücken, dürfen für die fragliche Zeit erst in den zweiten Ableitungen und da nur so abweichen, dass die zu dieser Zeit geltenden Bedingungen des Systems erfüllt bleiben.

Man sieht übrigens leicht, dass die Relation 178) mit 179) identisch ist. Da $C_h F_h$ eine ganz beliebige, der Zeit $t + 2dt$ entsprechende virtuelle Verschiebung ist, so waren wir berechtigt, ihre Projectionen δa_h, δb_h, δc_h auf die Coordinatenaxen für δx_h, δy_h, δz_h in die Relationen 92) zu substituiren.

Wenn wir aber die wirkliche Bewegung des Systems mit der variirten vergleichen, so sehen wir, dass $D_h C_h$ (Fig. 16) die mit dt^2 multiplicirte Beschleunigung des betreffenden

materiellen Punktes für die wirkliche Bewegung, $D_h F_h$ dagegen derselbe Ausdruck für die variirte Bewegung ist. Daher ist $C_h F_h$ die mit dt^2 multiplicirte Variation, welche die Beschleunigung des betreffenden materiellen Punktes beim Uebergange von der wirklichen zur variirten Bewegung erfahren hat. Die mit dt^2 dividirten Projectionen $\delta a_h, \delta b_h, \delta c_h$ von $C_h F_h$ auf die Coordinatenaxen sind also die Zuwächse $\delta x_h''$, $\delta y_h''$, $\delta z_h''$, welche die Componenten der Beschleunigung in den Coordinatenrichtungen beim Uebergange von der wirklichen zur variirten Bewegung erfahren. Substituiren wir diese Werthe und für die Projectionen von $C_h E_h$ die mit dt^2 multiplicirten Ausdrücke 172), so folgt:

$$
\begin{aligned}
&- C_h F_h \,.\, C_h E_h \,.\, \cos \vartheta_h = \\
&= \left[\left(x_h'' - \frac{1}{m_h} X_h\right) \delta x_h'' + \left(y_h'' - \frac{1}{m_h} Y_h\right) \delta y_h'' + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(z_h'' - \frac{1}{m_h} Z_h\right) \delta z_h''\right] dt^4 .
\end{aligned}
$$

Mit Rücksicht hierauf geht die Relation 178) sofort in 179) über. dt gilt wie immer als gegebene Constante.

Substituirt man dieselben Werthe für δa_h, δb_h, δc_h in in die Relationen 175) und 176) und dividirt durch dt^2, so gehen dieselben in folgende Relationen über:

$$
180) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h} \delta x_h'' + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_h} \delta y_h'' + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_h} \delta z_h''\right) \leqq 0, \\
&\sum_{h=1}^{h=n} (\xi_h \delta x_h'' + \eta_h \delta y_h'' + \zeta_h \delta z_h'') \leqq 0,
\end{aligned}
\right.
$$

von denen die erste irgend einer holonomen, die zweite irgend einer nicht holonomen Bedingungsgleichung oder Ungleichung entspricht. Diese beiden Relationen sind also der allgemeinste analytische Ausdruck für die Bedingungen, welche nebst den Gleichungen 167) erfüllt sein müssen, damit der Ausdruck 170) ein Minimum wird. (Vergl. die Gleichungen 169) und 171).

§ 68. Vergleich des Princips des kleinsten Zwanges mit dem der virtuellen Verschiebungen.

Wir haben das Princip des kleinsten Zwanges aus dem der virtuellen Verschiebungen abgeleitet. So lange das Gleichheitszeichen gilt, folgt wieder umgekehrt aus der abgeleiteten Gleichung auch die ursprüngliche, da wir ja Mehrdeutigkeiten ausschlossen. Sobald also immer Gleichheitszeichen gelten, ist das Princip der virtuellen Verschiebungen mit dem des kleinsten Zwanges gleichbedeutend.

Wenn aber aus zwei Ungleichungen eine dritte folgt, so folgt aus der zweiten und dritten im Allgemeinen nicht wieder die erste. Es ist also die zweite und dritte nicht mit der ersten und zweiten gleichbedeutend. Daher sind auch die Bedingungen 180) nicht mit 86) und 88) identisch, und das Princip des kleinsten Zwanges ist, wenn Relationen mit Ungleichheitszeichen vorhanden sind, im Allgemeinen nicht mit dem der virtuellen Verschiebungen gleichbedeutend.

Für dauernde Ruhe sämmtlicher materieller Punkte sind jedoch beide Principe auch in letzterem Falle gleichbedeutend, so dass auch aus dem Principe der virtuellen Verschiebungen die Bedingungen des Gleichgewichtes im Ruhezustande immer eindeutig folgen, wie man folgendermaassen sieht. Im Falle des Gleichgewichtes im Ruhezustande coincidiren die vier Punkte A_h, B_h, C_h, D_h (§ 66, Fig. 16), da die Anfangsgeschwindigkeit sämmtlicher Punkte Null ist. Es wird also der Unterschied $C_h F_h$ zwischen der Beschleunigung bei der variirten und wirklichen Bewegung identisch mit der virtuellen Verschiebung des betreffenden Punktes. Die Projectionen von $C_h F_h$ auf die Coordinatenaxen können daher ebenso gut die Grössen $\delta x_h''$, $\delta y_h''$ und $\delta z_h''$ als die Grössen δx_h, δy_h und δz_h bedeuten und die beiden Relationen 93) und 179) werden identisch.

Analytisch spricht sich dies dadurch aus, dass man während jedes Zeitmomentes einer sehr kleinen Zeit τ den x'', y'' und z'', welche anfangs alle gleich Null sind, beliebige mit den Bedingungen verträgliche sehr kleine Werthe $\delta x''$, $\delta y''$ und $\delta z''$ ertheilen kann. Die Relation 179) gilt dann während jedes dieser Zeitmomente. Integrirt man zweimal

von 0 bis τ, so kann man die Kräfte dabei constant betrachten, da die Bewegung des Systems anfangs mit der Geschwindigkeit Null, später nur mit unendlich kleiner Geschwindigkeit geschieht; die Beschleunigungen x_h'', y_h'', z_h'' aber sind anfangs Null, bleiben immer sehr klein gegen X_h/m_h, Y_h/m_h und Z_h/m_h und können daher vernachlässigt werden.

Es folgt also zunächst

$$
180\,a)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{h=n}\Big(X_h\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt\,\delta x_h'' + Y_h\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt\,\delta y_h'' + \\ &\qquad\qquad + Z_h\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt\,\delta z_h''\Big) \gtreqless 0. \end{aligned}\right.
$$

Offenbar ist aber
$$\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt\,\delta x_h''$$
der gesammte Coordinatenzuwachs δx_h, und dasselbe gilt für die y- und z-Axe. Die Relation 180a) ist daher identisch mit

$$\sum_{h=1}^{h=n}(X_h\,\delta x_h + Y_h\,\delta y_h + Z_h\,\delta z_h) \gtreqless 0.$$

Ebenso findet man, dass die Bedingungen 180), welche für das Princip des kleinsten Zwanges gelten, mit den Bedingungen 86) und 88), welche für das Princip der virtuellen Verschiebungen gelten, identisch werden.

Das Princip der virtuellen Verschiebungen ist also mit dem des kleinsten Zwanges für den Fall des Gleichgewichtes im Ruhezustande identisch.

Im Falle der Bewegung und des Herrschens von Ungleichungen aber kann kein Beweis geliefert werden, dass die das Princip der virtuellen Verschiebungen darstellende Relation 93) die eintretenden Beschleunigungen auch immer eindeutig bestimmt. Um dies nachzuweisen, genügt es offenbar an irgend einem speciellen Beispiele zu zeigen, dass Fälle möglich sind, wo die Relation 93) für verschiedene mögliche Bewegungsarten gilt, so dass aus ihr allein nicht erkennbar ist, welche derselben eintritt.

Ein derartiges specielles, von Gibbs erdachtes Beispiel wollen wir im folgenden Paragraphen behandeln.

§ 69. Specieller Fall, wo das Princip des kleinsten Zwanges mehr leistet, als das der virtuellen Verschiebungen.

Es sei eine Fläche F gegeben, welche durch den Coordinatenursprung geht, daselbst senkrecht auf der Abscissenaxe steht und der positiven Abscissenrichtung ihre concave Seite zuwendet. Ein beweglicher materieller Punkt von der Masse m, dessen rechtwinkelige Coordinaten im Allgemeinen x, y, z heissen sollen, passire zur Zeit t, für welche man seine Beschleunigung sucht, gerade den Coordinatenursprung mit der Geschwindigkeit v. Der Krümmungsradius des Schnittes der Fläche F und der Ebene, welche v und die Abscissenaxe enthält, sei R. Die Bedingung, welcher der materielle Punkt unterworfen ist, bestehe zur Zeit t darin, dass er die Fläche F nach der der negativen Abscissenrichtung zugewandten Seite nicht überschreiten darf, sich aber nach der positiven Abscissenrichtung hin beliebig von derselben entfernen kann. Bei Anwendung des Principes der virtuellen Verschiebung ist daher δy und δz beliebig, δx dagegen kann ebenfalls beliebige, aber nur positive Werthe (incl. Null) annehmen. Die Relation 93) fordert daher, dass $m y'' = Y$ und $m z'' = Z$ sei. Da δx nur gleich Null oder positiv, und x'' vermöge der Bedingungen des Systems gleich oder beliebig grösser als v^2/R sein kann (vergl. § 13), so ist die Relation 93) immer erfüllt, falls x'' gleich dem grösseren der beiden Ausdrücke v^2/R oder X/m oder noch grösser ist. Diese Relation lässt also völlig unbestimmt, ob sich nicht das Bewegliche schon für Werthe des X, die kleiner als die Centrifugalkraft $m v^2/R$ sind, von der Fläche loslöst. Die Unmöglichkeit hiervon kann man nur indirect daran erkennen, dass dann sofort nach der Loslösung das Bewegliche völlig frei und seine Beschleunigung in der Abscissenrichtung gleich X/m, also kleiner als v^2/R werden müsste, so dass es sich sofort wieder an die Fläche anschliessen müsste.

Bei Anwendung des Principes des kleinsten Zwanges ist weder der Ort, wo sich der materielle Punkt befindet, noch sind dessen Geschwindigkeitscomponenten zu variiren. Die Variationen $\delta y''$ und $\delta z''$ der Componenten der Be-

schleunigung in der y- und z-Richtung sind willkürlich; daher folgt aus der Relation 179) wieder $m y'' = Y$, $m z'' = Z$ und diese reducirt sich auf

181) $$(m x'' - X) \delta x'' \geqq 0.$$

Die Geschwindigkeit v kann keine negative Componente in der Abscissenrichtung haben, da das Bewegliche verhindert ist, auf die Seite der negativen Abscissenaxe zu gelangen. Sie kann aber auch keine positive Componente in der Abscissenrichtung haben, da das Bewegliche sonst von der Seite der negativen Abscissen kommen müsste, wenn dessen Geschwindigkeit nicht eine endliche Richtungsänderung erfährt, was wir ausschliessen wollen, da dazu eine unendliche Kraft erforderlich wäre. Es steht also die Geschwindigkeit v senkrecht auf der Abscissenrichtung und daher ist die Beschleunigung x'' in der positiven Abscissenrichtung, wenn sich das Bewegliche gerade in der Fläche F bewegt, gleich v^2/R. Das Bewegliche kann sich nicht in einer weniger gekrümmten oder gar nach der anderen Seite gekrümmten Bahn bewegen, da es sonst nach derjenigen Seite der Fläche F gelangen würde, welche der negativen Abscissenrichtung zugewandt ist. Es kann also die Beschleunigung keinen negativen und keinen kleineren Werth als v^2/R annehmen. Dagegen kann die Bahn stärker nach der positiven Abscissenseite hin gekrümmt, also x'' beliebig grösser als v^2/R sein. Wir erhalten daher für $\delta x''$ folgende Bedingungen: Wenn $x'' = v^2/R$ ist, kann $\delta x''$ nur gleich Null oder positiv sein. Wenn dagegen $x'' > v^2/R$ ist, so ist $\delta x''$ ebenso willkürlich wie $\delta y''$ und $\delta z''$.

Nachdem dies festgestellt ist, wollen wir untersuchen, was aus dem Principe des kleinsten Zwanges, das sich auf die Relation 181) reducirt hat, folgt. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. X sei negativ oder habe einen so kleinen positiven Werth, dass $X/m < v^2/R$ ist. Dann ist in 181) der erste Factor nothwendig positiv, da $x'' \geqq v^2/R$ ist. Der Fall, dass $x'' > v^2/R$ ist, ist also dann durch die Relation 181) ausgeschlossen, da in diesem Falle $\delta x''$ und damit die linke Seite von 181) auch negativ sein könnte. In diesem Falle,

dass X negativ oder $< mv^2/R$ ist, muss also $x'' = v^2/R$ sein, d. h. der materielle Punkt bleibt auf der Fläche, was mit der Erfahrung stimmt, da dann in der That die äussere Kraft entweder nach der Seite der negativen Abscissen gerichtet ist oder, wenn sie die entgegengesetzte Richtung hat, kleiner ist als die das Bewegliche an die Fläche andrückende Centrifugalkraft.

2. Wäre $X/m > v^2/R$, so wäre, wenn $x'' = v^2/R$ wäre, der erste Factor der linken Seite der Relation 181) negativ. Da $\delta x''$ jedenfalls positive Werthe haben kann, so wäre also diese Relation nicht erfüllt. Dann muss also $x'' > v^2/R$ sein. Da aber in diesem Falle $\delta x''$ positiv und negativ sein kann, so kann die Relation 181) nur erfüllt sein, wenn $mx'' = X$ ist. Das Bewegliche löst sich also von der Fläche ab und bewegt sich so, als ob es frei wäre. Dies stimmt wieder mit der Erfahrung, da jetzt die Componente der Kraft, welche das Bewegliche von der Fläche hinwegtreibt, grösser als die Centrifugalkraft ist.

3. Ist endlich $X/m = v^2/R$, so ist jedenfalls auch $x'' = v^2/R$. Denn wenn $x'' > v^2/R$ wäre, so wäre in 181) der erste Factor positiv und der zweite könnte auch negativ sein. Die Bahn des Beweglichen würde dann auch, wenn es frei wäre, die Fläche F osculiren.

Aus den angestellten Betrachtungen folgt sofort Folgendes. Ein materieller Punkt bewege sich längs einer krummen Fläche, welche er nach der concaven, nicht aber nach der anderen Seite hin verlassen kann. Die Componente N der von aussen auf ihn wirkenden Kraft senkrecht zu dieser Fläche wachse continuirlich von einem Werthe, der kleiner als mv^2/R ist, zu einem grösseren oder springe plötzlich zu einem solchen über. Dann löst sich das Bewegliche im Momente, wo $N \geqq mv^2/R$ wird, von der Fläche mit der Beschleunigung N/m los. Aus dem Principe des kleinsten Zwanges folgt dies unmittelbar durch seine Anwendung auf jeden einzelnen Moment der Bewegung, aus dem der virtuellen Geschwindigkeiten aber nur durch Zuziehung fremdartiger Betrachtungen, z. B. über die Bewegung, welche sich dann für spätere Zeitmomente ergeben würde.

§ 70. Gleichgewicht im Ruhezustande, wenn eine Kraftfunction existirt.

Besonders einfach gestaltet sich die Gleichgewichtsbedingung für den Ruhezustand, wenn die gegebenen Kräfte eine Kraftfunction haben. Dann ist:

$$X_h = -\frac{\partial V}{\partial x_h}, \quad Y_h = -\frac{\partial V}{\partial y_h}, \quad Z_h = -\frac{\partial V}{\partial z_h}$$

und aus 95) folgt $\delta V \geqq 0$ für alle mit den Bedingungen verträglichen Veränderungen der Coordinaten.

Es ist also dann der die Variationen enthaltende Ausdruck 95), der das Kriterium für das Gleichgewicht liefert, die vollständige Variation einer Function der Coordinaten, welche noch die natürlich nicht zu variirende Zeit explicit enthalten kann. Durch Angabe dieser einzigen Function und natürlich der Bedingungen des Systems, wenn solche vorhanden sind, kann daher die Frage nach dem Gleichgewichte auf eine lediglich mathematische Aufgabe zurückgeführt werden, weshalb man der Kraftfunction auch den Namen statisches Potential giebt. Wir werden im zweiten Theile sehen, dass in vielen Fällen auch die Auffindung der Bewegung des Systems durch die Forderung, dass eine einzige Function, die dann allerdings noch die Geschwindigkeitscomponenten enthält, ein Grenzwerth sein soll, auf eine rein mathematische Aufgabe zurückgeführt werden kann. Jene Function werden wir dann das (mittlere) kinetische Potential nennen.

Wenn dauernde Ruhe des Systems mit den Bedingungen desselben vereinbar ist und ein statisches Potential existirt, wird also das System immer im Gleichgewichte bleiben, wenn es anfangs in Ruhe war und die erste Variation des statischen Potentiales für keine unendlich kleine mögliche Verschiebung der Punkte negativ ausfällt.

In diesem Falle ist auch die Definition der Stabilität oder Labilität des Gleichgewichtes eine sehr einfache. Das Gleichgewicht heisst stabil, wenn, sobald man jedem Punkte des Systems eine sehr kleine Verschiebung und Geschwindigkeit ertheilt, diese zu allen späteren Zeiten sehr klein bleiben,

sobald sich das System unter dem Einflusse der gegebenen expliciten Kräfte weiter bewegt, wie immer die ursprünglich ertheilte Verschiebung und Geschwindigkeit beschaffen sein mag, unter der Bedingung, dass ihre Grösse unterhalb einer gewissen Grenze liegt. Ist es dagegen möglich, durch irgend eine beliebig kleine, den Punkten des Systems anfangs ertheilte Verschiebung und Geschwindigkeit zu bewirken, dass diese mit der Zeit endliche Lagenänderungen und Geschwindigkeiten annehmen, so heisst das Gleichgewicht labil. Der erste Fall tritt immer ein, wenn auch mit Berücksichtigung der unendlich Kleinen höherer Ordnung V für alle möglichen sehr kleinen Coordinatenvariationen nur positive Zuwächse erfährt, die wachsen, wenn die Coordinatenvariationen einander proportional wachsen.

Sei V_0 der Werth der Kraftfunction in der Ruhelage. Es werde jedem Punkte eine unendlich kleine Verschiebung und Geschwindigkeit ertheilt, wodurch die Kraftfunction den Werth $V_0 + \varDelta_0$ die lebendige Kraft den Werth T_0 annehmen soll. Nun bewege sich das System von diesem Anfangszustande ausgehend den Bewegungsgleichungen entsprechend. Zu irgend einer späteren Zeit t sollen $V_0 + \varDelta$ und T die Werthe der Kraftfunction und lebendigen Kraft sein. Dann ist nach dem Energieprincipe

$$\varDelta_0 + T_0 = \varDelta + T.$$

Es kann also weder $\varDelta$ noch T einen grösseren als den sehr kleinen Werth $\varDelta_0 + T_0$ annehmen. Da aber $\varDelta$ unserer Annahme gemäss nothwendig früher über den Werth $\varDelta_0$, der ja beliebig klein gemacht werden kann, hinauswachsen müsste, bevor irgend eine Coordinate einen endlichen Zuwachs erführe und auch die lebendige Kraft T nothwendig einen grösseren endlichen Werth erhält, wenn irgend eine Geschwindigkeit zu einem endlichen Werthe anwächst, so müssen alle Geschwindigkeiten stets sehr klein und alle Coordinaten sehr nahe gleich ihrem ursprünglichen Werthe bleiben.

Wenn V zwar nicht abnehmen kann, aber bis zu einem endlichen Zuwachse einer oder mehrerer Coordinaten constant bleibt, so heisst das Gleichgewicht indifferent. Dann

kann sich das System nach einer unendlich kleinen Störung um Endliches aus seiner Lage entfernen, aber keine endlichen Geschwindigkeiten annehmen.

Wenn dagegen V abnehmen kann, so wird es, wenn es durch eine passende Störung eine kleine Abnahme erfährt, bei wachsender lebendiger Kraft, also mit wachsender Geschwindigkeit zu immer kleineren Werthen fortschreiten, bis die für kleine Werthe geltenden Formeln überhaupt nicht mehr anwendbar sind. Das Gleichgewicht heisst dann labil.

Ein Jedermann geläufiges Beispiel bietet das Gleichgewicht eines festen Körpers unter dem Einflusse der Schwere. Zieht man die z-Axe vertical nach abwärts und bezeichnet mit ζ die z-Coordinate des Schwerpunktes des Körpers, mit p dessen Gewicht, so ist $V = -p\zeta$. Gleichgewicht findet statt, wenn bei jeder virtuellen Verschiebung des Körpers ζ abnimmt oder nur um unendlich Kleines höherer Ordnung zunimmt. Kommt der Schwerpunkt bei jeder kleinen möglichen Verschiebung höher zu liegen, so ist das Gleichgewicht stabil. Giebt es kleine Verschiebungen, für welche der Schwerpunkt sinkt (Ei, das auf der Spitze steht), so ist das Gleichgewicht labil. Ein Beispiel des indifferenten Gleichgewichtes bietet eine Kugel oder ein gerader Kreiscylinder auf horizontaler Unterlage.

§ 71. Bezeichnung sämmtlicher Coordinaten mit gleichen Buchstaben.

Das Princip der virtuellen Verschiebungen oder des kleinsten Zwanges können wir in der Form

$$182)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{h=1}^{h=n}[(m_h x_h'' - X_h)\delta x_h^\alpha + (m y_h'' - Y_h)\delta y_h^\alpha + \\ &\qquad\qquad + (m z_h'' - Z_h)\delta z_h^\alpha] \geqq 0\end{aligned}\right.$$

schreiben, wobei $\alpha = 0$ oder gleich 2 ist, d. h. ganz wegzulassen oder durch zwei Striche zu ersetzen ist, je nachdem es sich um das erstere oder letztere Princip handelt. Die Variationen haben dabei die Relation 86), 88), 169) oder 180) zu erfüllen, welche wir in der Form

$$183)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}(\xi_h^l\,\delta x_h^\alpha + \eta_h^l\,\delta y_h^\alpha + \zeta_h^l\,\delta z_h^\alpha) \leqq 0$$

schreiben können und wobei beide Zeichen gelten oder blos das Gleichheitszeichen, je nachdem dies in 79) oder 80) der Fall ist. Die ξ, η, ζ können in die Form 89) gebracht werden oder nicht, je nachdem die betreffende Bedingung holonom ist oder nicht. Es ist $\alpha = 0$ oder 2, je nachdem wir das Princip der virtuellen Verschiebungen oder des kleinsten Zwanges benutzen.

Wir wollen nun eine Veränderung der Bezeichnungsweise einführen, die uns einige unnütze Schreibereien erspart. Wir bezeichnen die Masse des ersten materiellen Punktes nach Belieben mit m_1, m_2 oder m_3, so dass also m_1, m_2 und m_3 drei untereinander gleiche Grössen sind. Die rechtwinkeligen Coordinaten des ersteren materiellen Punktes bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3, die Componenten seiner Geschwindigkeit und Beschleunigung mit x_1', x_2', x_3', x_1'', x_2'', x_3'', die Componenten der auf ihn wirkenden expliciten Kräfte mit X_1, X_2, X_3, alle Componenten natürlich in den Coordinatenrichtungen verstanden. Ebenso bezeichnen wir die Masse des zweiten materiellen Punktes mit m_4, m_5 oder m_6, wobei natürlich wieder $m_4 = m_5 = m_6$ ist. Seine Coordinaten, Geschwindigkeits- und Beschleunigungscomponenten und die Componenten der auf ihn wirkenden expliciten Kräfte mit $x_4, x_5, x_6, x_4', x_5', x_6', x_4'', x_5'', x_6''$ und X_4, X_5, X_6. So fahren wir fort bis zum letzten materiellen Punkte, dessen Masse also mit $m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n}$ etc. bezeichnet wird.

Die Relation 182) nimmt jetzt die einfachere Form an

184) $$\sum_{h=1}^{h=3n} (m_h x_h'' - X_h)\, \delta x_h^\alpha \geqq 0;$$

für das Gleichgewicht im Ruhezustande aber, wo alle Beschleunigungen verschwinden, erhält man

185) $$\sum_{h=1}^{h=3n} X_h\, \delta x_h^\alpha \leqq 0,$$

während man die Bedingungen 183) für die Variationen der Coordinaten in der Form schreiben kann

186) $$\sum_{h=1}^{h=3n} \xi_h^l\, \delta x_h^\alpha \leqq 0,$$

da wir auch $\xi_2^l, \xi_3^l, \xi_4^l \ldots$ für $\eta_1^l, \zeta_1^l, \xi_2^l \ldots$ schreiben wollen.

§ 72. Das d'Alembert'sche Princip.

Sei ein beliebiges System materieller Punkte gegeben. Die Bedingungsgleichungen seien so beschaffen, dass vollkommene Ruhe des Systems oder wenigstens das Verschwinden sämmtlicher Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sämmtlicher Punkte des Systems zu einer bestimmten Zeit ϑ damit vereinbar ist. Die Bedingung, dass das System sich unter dem Einflusse der darauf wirkenden Kräfte zur Zeit ϑ im Ruhezustande im Gleichgewichte befinden kann, ist durch die Relation 185) ausgedrückt. Ist das System zur selben Zeit in irgend einer Bewegung begriffen, so sind die Bewegungsgleichungen durch die Relationen 184) bestimmt. Man sieht also sofort, dass man die Bewegungsgleichungen erhält, indem man in den Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht im Ruhezustande einfach statt der Componenten der expliciten Kräfte X_h schreibt

187) $$X_h - m_h x_h'',$$

was wir die erste Form des d'Alembert'schen Princips nennen wollen.

Wir nehmen jetzt an, dass sich dasselbe System unter dem Einflusse der darauf wirkenden Kräfte von beliebigen Anfangsbedingungen ausgehend in beliebiger Weise bewege, so dass also die die Gesetze der Bewegung bestimmende Relation 184) gilt. Zur Zeit ϑ soll nun plötzlich auf jeden Punkt des Systems zu den ohnehin schon darauf wirkenden expliciten Kräften eine Kraft hinzugefügt werden, welche derjenigen gerade gleich und entgegengesetzt ist, die wir früher im § 34 die Totalkraft genannt haben, also eine Kraft, deren Richtung der augenblicklichen Beschleunigung dieses Punktes entgegengesetzt und deren Intensität gleich dem Producte dieser Beschleunigung in die Masse des betreffenden Punktes ist; mit anderen Worten, deren Componente in der Richtung der $h$ten Coordinate gleich

188) $$-m_h x_h''$$

ist. Wir wollen das System von Kräften, welches durch Hinzufügung dieser Kräfte zu den expliciten Kräften ent-

steht, das Kraftsystem $\mathfrak{V}$ nennen. Zugleich soll jeder Punkt in Ruhe versetzt werden. Hierdurch kommt das System sofort ins Gleichgewicht, was wir die zweite Form des d'Alembert'schen Princips nennen wollen.

Man beweist dies leicht in folgender Weise: Die $h$te Componente in einer der Coordinatenrichtungen ist für das Kräftesystem $\mathfrak{V}$

189) $$X_h^v = X_h - m_h x_h''.$$

Man erhält also aus den Bewegungsgleichungen 184), welche ja für die wirkliche Bewegung, wie sie unter dem Einflusse der sie erzeugenden Kräfte, deren $h$te Componente X_h ist, vor sich gehen, erfüllt sein müssen:

190) $$\sum_{h=1}^{h=3n} X_h^v \, \delta x_h^a \leqq 0.$$

Dies ist aber gemäss 185) gerade die Bedingung, dass sich das System unter dem Einflusse der Kräfte $\mathfrak{V}$ zur Zeit ϑ im Gleichgewichte im Ruhezustande befinden kann. Die Kräfte $\mathfrak{V}$ sind übrigens identisch mit den Kräften, welche wir in § 34 die verlorenen genannt haben und welche den Verbindungskräften gleich und entgegengesetzt gerichtet waren. Die Componenten der verlorenen Kräfte waren ja durch die Ausdrücke 82) gegeben, welche, wie man aus 81) ersieht, mit 189) identisch sind. Wir können daher das System der expliciten Kräfte ($h$te Componente $= X_h$) in zwei Kräftesysteme zerlegen: das der totalen Kräfte ($h$te Componente $= m_h x_h''$) und das der verlorenen ($h$te Componente $= X_h - m_h x_h''$). Das erste System ist so beschaffen, dass die auf jeden einzelnen Punkt wirkenden Kräfte diesem, wenn er vollkommen frei wäre, genau diejenigen Beschleunigungen ertheilen würden, die er wirklich zur betreffenden Zeit erfährt. Das letztere Kraftsystem ist dem Systeme der Verbindungskräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet. Es würde sich, wenn das materielle System momentan zur Ruhe gelangen würde, an diesem immer das Gleichgewicht halten, wenn zur betreffenden Zeit Ruhe des Systems überhaupt mit den Bedingungen vereinbar wäre. Wir wollen dies die dritte Form des d'Alembert'schen Princips nennen.

Dasselbe entspricht dem schon in der Anmerkung auf S. 131 (§ 35) bewiesenen Satze, dass es nie eine mögliche Bewegung giebt, welche die verlorenen Kräfte gegenüber der wirklichen anstreben. Es ist klar, dass Kräfte, welche den Verbindungskräften entgegengesetzt gleich sind, durch diese aufgehoben werden können und sich daher das Gleichgewicht halten.

Es kann vorkommen, dass die Kräfte als Functionen der Geschwindigkeiten oder anderer den Zustand des Systems bestimmender Grössen gegeben sind. Wenn wir sagen, wir versetzen das System plötzlich in Ruhe und lassen dieselben Kräfte darauf wirken, so meinen wir natürlich nicht, dass die Kräfte dieselben Functionen der Geschwindigkeiten oder dieser anderen Grössen bleiben sollen, sondern dass die auf jeden Punkt wirkende Kraft durch den gleichen gleich gerichteten Vector dargestellt werden soll. Wenn die Kräfte blos Functionen der Lage und der Zeit sind, so tritt dies in der That ein, wenn diese Functionen ungeändert bleiben, da wir ja, als wir das System plötzlich in Ruhe versetzten, nicht die Lage seiner Theile, wohl aber die Geschwindigkeiten änderten.

Wir können endlich noch folgenden Satz aussprechen, den wir (allerdings im uneigentlichen Sinne) die vierte Form des d'Alembert'schen Princips nennen wollen: Wenn sich gewisse Kräfte am ruhenden Systeme das Gleichgewicht halten, so verändern sie, zu anderen Kräften hinzugefügt, die durch letztere erzeugte Bewegung nicht. Wenn sich die Bedingungen mit der Zeit ändern, muss man sagen, dass die durch gewisse Kräfte zu irgend einer Zeit erzeugte Beschleunigung des Systems durch Hinzufügung anderer Kräfte nicht verändert wird, wenn sich jene anderen Kräfte zur selben Zeit an dem in gleicher Lage ruhenden Systeme das Gleichgewicht halten würden. Wir wollen den übrigens leichten Beweis dieses Satzes später nachholen.

§ 73. Definition des Gleichgewichtes der Kräfte an einem bewegten Systeme.

Damit alle diese Sätze, welche wir die verschiedenen Formen des d'Alembert'schen Princips genannt haben

auch in dem Falle einen Sinn behalten, wo Ruhe aller Punkte des Systems mit den Bedingungen desselben nicht vereinbar ist, muss eine Definition des Gleichgewichtes von Kräften an bewegten Körpern aufgestellt werden, das man jedenfalls nicht auf den Fall beschränken kann, wo keiner der Punkte des Systems eine Beschleunigung erfährt. Es bleiben alle diese Sätze mit verhältnissmässig geringen Modificationen richtig, wenn man von dem Gleichgewichte von Kräften folgende ganz allgemeine Definition aufstellt, welche, falls das System ruht, mit der früher vom Gleichgewichte im Ruhezustande aufgestellten zusammenfällt, diese also als Specialfall in sich begreift, aber auch auf den Fall anwendbar ist, dass Ruhe des Systems gar nicht mit den Bedingungen vereinbar ist.

Sei ein materielles System gegeben. Ruhe desselben kann mit den Bedingungen vereinbar sein oder nicht. Falls keine expliciten Kräfte vorhanden sind, wird bei gegebener Anfangslage und Grösse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeiten sämmtlicher materiellen Punkte eine gewisse Bewegung, also eine gewisse Beschleunigung sämmtlicher Punkte eintreten. Wenn nun trotzdem, dass bestimmte explicite Kräfte wirken, dasselbe System bei gleichen Bedingungen, gleicher Lage, gleicher Grösse und Richtung sämmtlicher Geschwindigkeiten zu einer bestimmten Zeit wieder dieselbe Bewegung macht, genauer gesprochen, wenn daran zu dieser Zeit genau wieder dieselben Beschleunigungen eintreten, so wollen wir sagen, jene expliciten Kräfte halten sich an dem Systeme zu dieser Zeit das Gleichgewicht, gerade so wie wir für einen einzelnen freien materiellen Punkt sagen, dass sich die auf ihn wirkenden Kräfte das Gleichgewicht halten, wenn er sich geradlinig und gleichförmig bewegt, wie er es bei Abwesenheit aller Kräfte thut.

Wenn keine expliciten Kräfte vorhanden sind, erhält man aus 184)

191) $$\sum_{h=1}^{h=3n} m_h x_h'' \delta x_h^a \geqq 0.$$

Wenn sich gewisse Kräfte (ihre $h$te Componente nach einer Coordinatenaxe heisse X_h^f) nach unserer neuen Definition

das Gleichgewicht halten sollen, so muss für die gleiche Bewegung

$$\sum_{h=1}^{h=3n}(m_h x_h'' - X_h^g)\,\delta x_h^a \geqq 0,$$

daher

192) $$\sum_{h=1}^{h=3n} X_h^g\,\delta x_h^a \leqq \sum_{h=1}^{h=3n} m_h x_h''\,\delta x_h^a$$

sein. In den Fällen, wo überall nur die Gleichheitszeichen gelten, folgt hieraus und aus 191)

193) $$\sum_{h=1}^{h=3n} X_h^g\,\delta x_h^a = 0.$$

Die Bedingung des Gleichgewichtes ist also durch dieselbe Relation (95) gegeben, wie bei der früheren Definition, und alle vier Formen des d'Alembert'schen Princips bleiben unverändert giltig. Man erhält wieder aus der Gleichgewichtsbedingung 193) die Bewegungsgleichungen, indem man darin

194) $$X_h - m_h x_h'' \text{ für } X_h^g$$

schreibt. Die verlorenen Kräfte, deren $h$te Componente $X_h - m_h x_h''$ ist, welche man also erhält, wenn man ausser den expliciten Kräften noch die negativ genommenen totalen, also auf jeden Punkt noch eine Kraft wirken lässt, die entgegengesetzt wie dessen Beschleunigung ist und deren Intensität das Product aus der Masse des Punktes in seine Beschleunigung ist, müssen bei jeder Bewegung die Bedingung 193) erfüllen, also sich das Gleichgewicht halten. Man kann die expliciten Kräfte immer als die Superposition der negativ genommenen letzteren (der positiv genommenen totalen) und der verlorenen betrachten.

Wenn sich endlich irgend welche Kräfte das Gleichgewicht halten, so erfüllen sie die Bedingung 193). Fügt man sie daher zu beliebigen anderen hinzu, so sieht die für die Summe beider Kräfte gebildete Relation 184) genau so aus, wie die für die anderen Kräfte allein gebildete, und da diese Relation die Bewegung vollständig bestimmt, so wird auch die durch die anderen Kräfte allein bewirkte Bewegung durch die Hinzufügung der im Gleichgewichte befindlichen Kräfte nicht verändert. Man sieht sofort, dass dieser Be-

weis auf Kräfte, die sich nach der alten Definition am ruhenden Systeme das Gleichgewicht halten, auch anwendbar ist, wenn unter den Bedingungen Ungleichungen vorkommen.

Bei Kräften, die sich nur nach der neuen Definition das Gleichgewicht halten, erfahren aber diese Sätze einige Beschränkung, wenn auch Ungleichheitszeichen zulässig sind. Zunächst wird wegen 191) die Relation 184) sicher erfüllt sein, wenn gewisse Kräfte die Relation

195) $$\sum_{h=1}^{h=3n} X_h^g \, \delta x_h^a \leqq 0$$

erfüllen. Bezeichnen wir die Componenten $X_h - m_h x_h''$ der verlorenen Kräfte mit X_h^g, so erfüllen sie aber nach 184) die Relation 195). Die verlorenen Kräfte halten sich also sicher wieder das Gleichgewicht. Das d'Alembert'sche Princip bleibt in der Fassung, die wir seine zweite und dritte Form nannten, richtig, selbst wenn Verschwinden aller Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gar nicht mit den Bedingungen des Systems vereinbar ist. In Worten ausgedrückt: lässt man ausser den expliciten Kräften noch die negativen totalen, d. h. noch auf jeden Punkt eine Kraft wirken, welche gleich der mit der Masse multiplicirten Beschleunigung und der letzteren entgegengesetzt gerichtet ist, so tritt Gleichgewicht ein. Die expliciten Kräfte sind die Superposition der diesen entgegengesetzten (der positiven totalen) und der im Gleichgewichte befindlichen verlorenen Kräfte.

Dagegen gelten die Sätze, welche wir die erste und vierte Form des d'Alembert'schen Principes genannt haben, nicht mehr, da ja die Gleichung 185) diejenige ist, aus welcher die Bewegungsgleichungen durch die Vertauschung 187) gewonnen werden, wogegen das Gleichgewicht durch die Relation 192) bestimmt wird, welche nicht mit 185) identisch ist und auch nicht mehr Garantie giebt, dass durch Hinzufügung von Kräften, die ihr genügen, zu anderen die von jenen anderen Kräften erzeugte Bewegung nicht verändert wird.

Da stets die Totalkräfte dieselbe Bewegung des Systems erzeugen, wie die expliciten, so sind beide einander immer bezüglich des Systems äquivalent.

Ich fand ausser der gegebenen Definition des Gleichgewichtes keine, welche auch auf den Fall anwendbar wäre, wo das Verschwinden aller Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gar nicht mit den Bedingungen des Systems vereinbar ist. Ist es mit diesen vereinbar, so könnte man auch die Definition des Gleichgewichtes im Ruhezustande in einer anderen Weise so erweitern, dass sie sich auf den Bewegungszustand erstreckt. Man könnte als Kräfte, die sich am bewegten Systeme das Gleichgewicht halten, solche definiren, die sich zur gleichen Zeit an dem in gleicher Lage ruhenden Systeme das Gleichgewicht halten würden, was wir die zweite Definition des Gleichgewichtes von Kräften an einem bewegten Systeme nennen wollen. Dann wäre das Gleichgewicht durch die Relation 195) gegeben und man hätte den Vortheil, dass das d'Alembert'sche Princip in allen vier Formen richtig bleiben würde, aber den Nachtheil, dass die Definition im Falle, wo Ruhe des Systems mit dessen Bedingungen nicht vereinbar ist, nicht anwendbar wäre, was doch wünschenswerth wäre, wenn man wie so häufig den folgenden Satz als allgemein gültig hinstellt: Jedes bewegte System kommt sofort ins Gleichgewicht, wenn man nebst den ohnedies wirkenden Kräften auf jeden Punkt noch eine Kraft wirken lässt, die der Beschleunigung desselben entgegengesetzt gerichtet und deren Intensität gleich der mit der Masse multiplicirten Beschleunigung ist.

Da aus den Relationen 191) und 195) nothwendig 192) folgt, so müssen Kräfte, die sich nach der zweiten Definition das Gleichgewicht halten, es nothwendig auch nach der ersten thun, was übrigens schon aus der ersten Definition selbst folgt, da sie ja die Ruhe des Systems nicht stören und diese jedenfalls auch ohne explicite Kräfte möglich ist. Es können sich aber Kräfte nach der ersten Definition auch das Gleichgewicht halten, wenn Relation 195) nicht erfüllt ist, sondern die linke Seite von 195) positiv ist, so lange sie nur kleiner als die rechte von 192) ist. Dann halten sich die betreffenden Kräfte nach der zweiten, nicht aber nach der ersten Definition das Gleichgewicht. Dies ist z. B. der Fall, wenn sich eine Kugel der concaven Seite

einer starren, glatten, gekrümmten Wand anliegend bewegt. Eine senkrecht nach der concaven Seite der Wand wirkende Kraft ändert die Bewegung der Kugel nicht, so lange sie kleiner als die Centrifugalkraft ist, würde aber die ruhende Kugel nicht im Gleichgewichte erhalten. Eine solche Kraft kann auch, obwohl sie sich nach der ersten Definition im Gleichgewichte befindet, doch zu anderen Kräften hinzugefügt, die von jenen anderen Kräften erzeugte Bewegung verändern, wenn ihre Hinzufügung bewirkt, dass eine schon früher senkrecht nach der concaven Seite gerichtete Kraft nun grösser als die Centrifugalkraft wird.

Die Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte bezeichnet man als die Statik, die von der Bewegung der Körper als die Dynamik, wobei wir es unentschieden lassen können, ob die Fälle, wo sich Kräfte an bewegten Systemen, namentlich im Falle, dass die Bedingungen Ruhe derselben gar nicht zulassen, das Gleichgewicht halten, in die Statik oder Dynamik gehören, da wir die Probleme der Statik und Dynamik ohnedies immer unter einem behandeln werden.

§ 74. Anwendung der Methode der Multiplicatoren auf den allgemeinsten Fall, dass beliebige holonome oder nicht holonome Bedingungsgleichungen oder Ungleichungen bestehen.

Wir sahen, dass das Princip des kleinsten Zwanges bis auf gewisse singuläre Fälle die Bewegung immer eindeutig bestimmt. Dieses Princip wird ausgedrückt durch die Relation 184) mit den Bedingungen 186), deren Gesammtzahl σ sei, worin aber überall $\alpha = 2$ gesetzt werden muss. Wenn wir daher eine Lösung gefunden haben, welche die Relation 184) für alle den Bedingungen 186) genügenden Werthe der Variationen erfüllt, so ist sie die Lösung des mechanischen Problems, falls sie auch noch so viel Constanten besitzt, dass man allen möglichen Anfangsbedingungen genügen kann.

Wir wollen nun zeigen, wie eine solche ganz allgemeine Lösung mittelst der Methode der unbestimmten Multiplicatoren gefunden werden kann. Von den σ Bedingungen für die wirkliche Bewegung können die holonomen in der Form

196) $$\varphi_l(t, x_1, x_2 \ldots x_{3n}) \leqq 0,$$

die nicht holonomen aber in der Form

197) $$\tau_l + \sum_{h=1}^{h=3n} \xi_h^l x_h' \leqq 0$$

geschrieben werden. Um die Stilisirung der späteren Theoreme zu vereinfachen, denken wir uns wie bisher das Zeichen der Functionen φ, τ und ξ der linken Seite in 196) und 197) immer so gewählt, dass dieselbe $\leqq 0$, niemals dass sie $\geqq 0$ ist. Wir wollen für den Augenblick in allen diesen σ Relationen, welche die σ Bedingungen des Systems ausdrücken, das Gleichheitszeichen gelten lassen, so dass wir also statt der Relationen 196) und 197) durchaus die folgenden gelten lassen:

198) $$\varphi_l(t, x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0,$$

199) $$\tau_l + \sum_{h=1}^{h=3n} \xi_h^l x_h' = 0.$$

Dazu fügen wir noch die Gleichungen

200) $$m_h x_h'' - X_h - \sum_{l=1}^{l=\sigma} \lambda_l \xi_h^l = 0,$$

worin dem h alle Werthe von 1 bis $3n$ ertheilt werden können. Für diejenigen Bedingungen, welche die Form 197) haben, ist in der letzten Gleichung ξ_h^l der auch in 197) dort so bezeichnete Coefficient. Für die Bedingungen von der Form 196) aber ist ξ_h^l eine Abkürzung für $\partial \varphi_l / \partial x_h$. Es gelten dann die Gleichungen 89). Aus den $3n + \sigma$ Gleichungen 198), 199) und 200) können wir im Allgemeinen die $3n + \sigma$ Grössen x'' und λ bestimmen. Ueber die singulären Fälle, wo diese Bestimmung auf Schwierigkeiten stösst, gilt das am Schlusse des § 43 Gesagte und es ist hier wieder nicht möglich, auf dieselben einzugehen. Nehmen wir an, wir hätten die Gleichungen 198), 199) und 200) allgemein gelöst.

Für alle Werthe der Integrationsconstanten und der Zeit, für welche dabei kein λ positiv wird, dessen Index gleich dem einer solchen Relation ist, für welche auch das Ungleichheitszeichen gilt, ist die gefundene Lösung die des mechanischen Problems, da sie der Relation 184) mit den

Bedingungen 186) in der That genügt und diese die Lösung der mechanischen Aufgabe eindeutig bestimmt, abgesehen von den schon erwähnten Singularitäten. Multipliciren wir nämlich die Gleichung 200) mit δx_h^a und addiren alle so für alle h folgenden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\sum_{h=1}^{h=3n} (m_h x_h'' - X_h)\, \delta x_h^a = \sum_{l=1}^{l=\sigma} \sum_{h=1}^{h=3n} \lambda_l\, \xi_h^l\, \delta x_h^a .$$

$\sum_{h=1}^{h=3n} \xi_h^l\, \delta x_h^a$ ist nun für alle l, für welche in der betreffenden Relation 186) nur das Gleichheitszeichen gilt, gleich Null, für alle anderen negativ (incl. Null). Es folgt also in der That die Relation 184). Da nun die gefundene Lösung auch die erforderliche Zahl von Integrationsconstanten enthält, so ist sie die allgemeine Lösung der mechanischen Aufgabe.[1]) Specielle Beispiele gaben wir schon in § 41 und zum Schlusse von § 43.

Würde für einige (sagen wir σ') der Werthe der l, für welche in den Relationen 196) oder 197) auch das Ungleichheitszeichen gilt, λ_l positiv, so wäre die entsprechende Gleichung aus den Gleichungen 198) oder 199), aber auch das mit dem entsprechenden λ behaftete Glied aus den Gleichungen 200) wegzulassen. Denn wenn die Bewegung der entsprechenden Gleichung 198) oder 199) gemäss erfolgen würde, so würde von der Vorrichtung, die die betreffende Relation herstellt, eine Widerstandskraft gefordert, die sie nur zu leisten vermöchte, wenn sie auch zu verhindern vermöchte, dass die linke Seite der Gleichung 196) oder 197) grösser als Null wird; daher geschieht die wirkliche Bewegung unbekümmert um diese Vorrichtung.

Wir haben nun nur mehr $3n + \sigma - \sigma'$ Gleichungen, aber auch nur mehr $3n + \sigma - \sigma'$ Unbekannte. Die aus diesen Gleichungen folgenden Werthe der Unbekannten nennen wir die Lösungswerthe. Dieselben befriedigen die

[1]) Jede der Coordinaten, die wir uns durch eine der Relationen 198) eliminirt denken, bringt keine, jede durch 199) eliminirte eine, jede andere Coordinate zwei Integrationsconstanten hinein und man sieht leicht, dass es ebensoviele voneinander unabhängige Anfangswerthe giebt.

Relation 184) unter den Bedingungen 186) sowohl für $\alpha = 0$, als auch für $\alpha = 2$. Für $\alpha = 2$ ist diese Relation der Ausdruck des Princips des kleinsten Zwanges. Dieses giebt eine Grösse an, welche immer für die wirkliche Bewegung ein absolutes Minimum sein muss und nicht mehrerer Minima fähig ist. Da wir also Beschleunigungen gefunden haben, für welche ein solches Minimum eintritt, so wissen wir sicher, dass sie die richtige Lösung des mechanischen Problems bilden, dass also die Werthe, welche wir die Lösungswerthe genannt haben, die wirkliche Bewegung darstellen. Diese Werthe geben also die Lösung der Aufgabe im allgemeinsten Falle mit der einzigen Ausnahme der singulären Fälle, von denen am Schlusse des § 43 die Rede war.

Wären die Anfangswerthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten so beschaffen, dass das System schon zu Anfang der Zeit mit irgend einer Vorrichtung gar nicht in Verbindung wäre oder sich im Momente des Zeitanfangs bereits löste, so wäre die betreffende Bedingungsgleichung schon von Anfang der Zeit an gar nicht mehr zu berücksichtigen. Das Kriterium dafür, dass eine Vorrichtung ganz ausser Wirksamkeit ist, besteht immer darin, dass durch die ihr entsprechende Relation sämmtlichen Beschleunigungen gar keine Beschränkung auferlegt wird, da das Princip des kleinsten Zwanges die einzige die Bewegung immer eindeutig bestimmende Relation ist.

Sobald eine solche Beschränkung wieder eintritt, tritt das System mit der betreffenden Vorrichtung wieder in Wechselwirkung und sie ist unter die σ Relationen einzubeziehen. Wenn zudem das betreffende λ negativ wird, so ist auch die entsprechende Gleichung 198) oder 199) unter diese Gleichungen und auch das entsprechende λ enthaltende Glied in Gleichung 200) einzubeziehen.

Wenn die Coordinaten und Geschwindigkeiten zu Anfang oder im Momente, wo das System mit irgend einer Vorrichtung wieder in Wechselwirkung tritt, so beschaffen sind, dass ohne endliche Aenderungen der Grössen oder Richtungen der Geschwindigkeiten (ohne unendliche Beschleunigungen) die Bedingungsgleichungen im nächsten

Momente nicht mehr erfüllt sein können, so kann die Aufgabe mittelst der Gleichungen, die wir bisher aus dem Bilde abgeleitet haben, nicht mehr gelöst werden. Doch spricht dies nicht gegen das Bild, da durch näheres Eingehen in dasselbe neue zur Lösung der Aufgabe geeignete Gleichungen gewonnen werden können. Man muss berücksichtigen, dass die starren Verbindungen etwas dehnsam, die starren Körper etwas deformirbar sind, eventuell auch dass Molekülarbewegungen in den Körpern und der Vorrichtung entstehen können. Ein Beispiel hierfür liefert ein fester Körper, der in einer undurchdringlichen Schale schief gegen die Wand derselben anprallt und sich dabei nach den Gesetzen des elastischen oder unelastischen Stosses verhält.

Ist das System anfangs mit allen Vorrichtungen in Wechselwirkung, so erfolgt die gänzliche Loslösung von irgend einer Vorrichtung, wenn sich die expliciten Kräfte continuirlich ändern, jedesmal schon in dem Momente, wo λ durch Null zu einem positiven Werthe übergeht.

Im Falle des Gleichgewichtes im Ruhezustande müssen alle Beschleunigungen gleich Null sein; daher gehen die allgemeinen Gleichungen 200) über in

$$X_h + \sum_{l=1}^{l=\sigma} \lambda_l \xi_h^l = 0.$$

Jedesmal, wenn es Werthe der λ giebt, welche für die in Rede stehenden expliciten Kräfte diese Gleichungen erfüllen, und wenn die λ, welche solchen Bedingungen entsprechen, die auch das Ungleichheitszeichen enthalten, nicht positiv sind, so ist das System unter dem Einflusse dieser expliciten Kräfte im Gleichgewichte, wenn es anfangs ruhte. Natürlich ist dabei wie immer vorausgesetzt, dass die Functionen φ, τ und ξ der linken Seite von 196) und 197) schon von Anfang an stets mit solchem Zeichen gewählt wurden, dass jede Bedingung dahin geht, dass diese linke Seite $\leqq 0$, niemals $\geqq$ ist.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

PRINZIPE DER MECHANIK.

VON

LUDWIG BOLTZMANN,
PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK A. D. UNIVERSITÄT WIEN.

II
II. TEIL

enthaltend: Die Wirkungsprinzipe, die Lagrangeschen Gleichungen und deren Anwendungen.

MIT ZEHN FIGUREN.



LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1904.

Verlag von **Johann Ambrosius Barth** in **Leipzig.**

BJERKNES, V., Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie. Zwei Bände. 1900—1902. à M. 10.—, geb. M. 11.50
I. Band. XVI, 338 Seiten mit 40 Abbildungen. 1900.
II. Band. XVI, 316 Seiten mit 60 Abbildungen. 1902.

Die hydrodynamischen Untersuchungen von Prof. C. A. Bjerknes in Christiania, durch welche besonders eine sehr umfassende Analogie von hydrodynamischen Erscheinungen zu elektrischen und magnetischen hervorgetreten ist, sind bis jetzt wenig bekannt und noch weniger publiziert worden. Die von C. A. Bjerknes' eigener Hand vorliegenden, meistens nur in norwegischer Sprache geschriebenen theoretischen Abhandlungen gehören alle nur dem frühesten Entwickelungsstadium dieser Untersuchungen an.

Als sein Sohn und vieljähriger Mitarbeiter hat der Verfasser es nun übernommen, die wichtigsten Resultate im Zusammenhang zu bearbeiten. Der erste Band ist durch die weitere Ausarbeitung von Vorlesungen entstanden, welche der Verfasser an der Hochschule zu Stockholm gehalten hat.

Der zweite Band beschreibt die Experimente, durch welche die im ersten Band entwickelten theoretischeñ Resultate bestätigt worden sind.

CHRISTIANSEN-MÜLLER, Elemente der theoretischen Physik, von Prof. C. Christiansen in Kopenhagen, deutsch herausgegeben von Dr. Johannes Müller in Bremen. Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage. VIII, 532 Seiten mit 160 Figuren. 1903. M. 10.—, geb. M. 11.—

Es wird in den beteiligten Kreisen mit Freude begrüßt werden, daß von dem vortrefflichen Buche eine neue Auflage erscheint. Da dieselbe erweitert und bedeutend verbessert ist, wird sie noch größere Verbreitung finden als die erste Auflage. Die jungen Physiker und Mathematiker werden durch das Buch bei ihren Studien wesentlich gefördert.

CLAUSIUS, R., Die Potentialfunktion und das Potential. Ein Beitrag zur mathematischen Physik. 4. vermehrte Auflage. 8°. [178 Seiten.] 1885. M. 4.—

FISCHER, VIKTOR, Vektordifferentiation und Vektorintegration. 8°. [VIII, 79 S. mit 20 Figuren.] 1904. M. 4.—

Diese Arbeit ist dadurch entstanden, daß der Autor versuchte, sich für einige Operationen der Differential- und Integralrechnung in der Vektoranalysis ein geometrisches Bild zu verschaffen. Dabei wurde er zunächst auf die Untersuchung des Differentialquotienten eines Vektors nach einem anderen Vektor geführt. Aus dieser ergab sich eine allgemeinere Auffassung des Differentialquotienten. Die erhaltenen Ausdrücke ließen sich auch durch einfache geometrische Konstruktionen bestimmen und erhielten bei der Anwendung auf physikalische Beispiele eine klare Bedeutung.

GRÜNBERG, V., Hypothese zur Thermodynamik. Versuch einer leicht faßlichen Darstellung einiger Prinzipe der Molekulartheorie mit Zugrundelegung der Keplerschen Gesetze für die Planetenbewegung. VI, 73 Seiten mit 10 Fig. und 7 Tab. 1903. M. 3.—

GRÜNBERG, V., Zur Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung. 90 Seiten. 1903. M. 3.—, geb. M. 4.—

Handwörterbuch der Astronomie. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. E. Becker-Straßburg, Prof. Dr. E. Gerland-Klausthal, Dr. N. Herz-Wien, Dr. H. Kobold-Straßburg, Dr. N. v. Konkoly-Budapest, Prof. Dr. C. F. W. Peters (†), Dr. E. v. Rebeur-Paschwitz (†), Dr. Fr. Ristenpart-Kiel, Prof. Dr. W. Schur-Göttingen, Prof. Dr. H. Seeliger-München, Prof. Dr. W. Wislicenus-Straßburg, Dr. A. Zelbr (†) herausgegeben von **Prof. Dr. W. Valentiner** in Heidelberg. Lex. 8°. Vier Bände in 5 Teilen. [Mit 489 Abbildungen und 11 Tafeln.] 1896—1902. Kpl. M. 100.—; geb. M. 112.—.
Jeder Teil kostet gebunden M. 2.40 mehr.

HERTZ, H., Gesammelte Werke. Band I. Schriften vermischten Inhalts. Etwa 380 Seiten mit vielen Fig., 1 Tafel. Einleitung von Ph. Lenard u. Porträt des Verf. 1895. Preis M. 12.—. Band II. Untersuchungen üb. die Ausbreitung der elektr. Kraft. VIII, 296 S. m. 40 Fig. 2. Aufl. 1895. M. 6.—. Band III. Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Mit einem Vorwort von H. v. Helmholtz. XXIX. 312 S. 1894. M. 12.—. In Halbfranz gebunden jeder Band M. 1.50 mehr.

Das Lebenswerk des früh dahingegangenen Gelehrten liegt in den vorstehenden drei Bänden abgeschlossen vor. Je mehr man sich in die geistvollen und klaren Darstellungen versenkt, um so mehr bedauert man, daß der Tod seinem Wirken ein so kurzes Ziel gesteckt hat.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

PRINZIPE DER MECHANIK.

II. TEIL.



VORLESUNGEN

ÜBER DIE

PRINZIPE DER MECHANIK.

VON

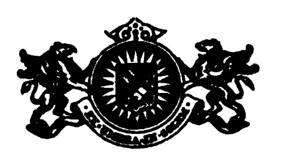
LUDWIG BOLTZMANN,

PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK A. D. UNIVERSITÄT WIEN.

II. TEIL

enthaltend: Die Wirkungsprinzipe, die Lagrangeschen Gleichungen und deren Anwendungen.

MIT ZEHN FIGUREN.



LEIPZIG,

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1904.

Übersetzungsrecht vorbehalten.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Erst hab' ich die Motto aus Goethe gewählt,
Dann selber eines zusammengestellt;
Nun las ich die Dichtungen Heines,
Doch Motto fand ich drin keines.

Im vorliegenden II. Teile der Vorlesungen über Mechanik habe ich mir die Behandlung des Prinzips der kleinsten Wirkung, der Hamiltonschen Prinzipe, sowie der damit zusammenhängenden Arbeiten von Helmholtz, Hölder, Voss und anderen zur Aufgabe gemacht. Doch habe ich das Hauptgewicht immer auf den physikalischen Sinn und den Zusammenhang mit den Sätzen der theoretischen Physik, nicht auf die rein mathematische Deduktion gelegt. Bezüglich der Ergänzungen, welche notwendig sind, alle Zweifel an die mathematische Strenge der Beweise zu beseitigen, verweise ich auf die Arbeiten der Mathematiker; mir war immer die physikalische Anschaulichkeit die Hauptsache.

Besondere Berücksichtigung mußten da die Beziehungen der Wirkungsprinzipe zur Gastheorie, Wärmetheorie und Elektrizitätslehre, sowie die Maxwell-, Helmholtz- und Hertzschen Sätze über zyklische Systeme finden. Doch bin ich nirgends in spezielle Physik eingegangen, sondern habe die Entwicklung nur so weit geführt, daß dann die Physik anknüpfen kann.

Gerade die Hamiltonschen Prinzipe der stationären und variierenden Wirkung setzen keinerlei andere Kenntnis voraus, als die der Gesamtenergie als Funktion aller Variabeln, von denen sie abhängt. Sie gestatten, wenn die Gesamtenergie in dieser Weise gegeben ist, die Ableitung aller Gleichungen für alle in Frage kommenden zeitlichen Veränderungen. Dieselben stellen daher die einzige einwurfsfrei begründete, in allen Fällen ohne weitere Kommentare unzweideutig anwendbare Energetik dar.

Der Begriff der mathematischen Variation schien mir dadurch an Anschaulichkeit zu gewinnen, daß ich daran den der physikalischen, der Aneinanderreihung unendlich vieler

mathematischer Variationen zu einer endlichen Zustandsänderung knüpfte, wie derselbe besonders in der Wärmetheorie bei Betrachtung der mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes derselben in Verwendung kommt. Andererseits wurde ihm auch die Theorie kleiner endlicher Störungen bei der Methode der Variation der Konstanten gegenübergestellt.

Aus dem Hamiltonschen Prinzipe der stationären Wirkung leite ich die Lagrangesche Gleichung für generalisierte Koordinaten ab, welche zur Entwicklung der allgemeinen Theorie der Bewegung starrer Körper, dann zur Einführung elliptischer Koordinaten und zur Ableitung der Theorie der Relativbewegung benutzt werden.

Wichtige Anregung verdanke ich dem Artikel Voss' über diesen Gegenstand in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften und den Vorträgen über Mechanik auf der Naturforscherversammlung in Kassel, sowie Privatgesprächen, welche sich daran in Kassel und Göttingen knüpften.

Die übliche Formel für die Schwingungsdauer des konischen Kreispendels gilt, wie sich herausstellt, wenn dasselbe sein Gesicht immer nach derselben Richtung im Raume kehrt. Wenn es dasselbe immer der vertikalen Drehungsachse zukehrt, so hat es außer der Pendelbewegung noch eine Drehung um seine Längsachse. Wenn ein Pendel einen rotierenden Körper enthält, so ist die langsame Drehung seiner Schwingungsebene der Präzessionsbewegung unter sonst gleichen Umständen entgegengesetzt. Denn erstere folgt, wenn man sie als Superposition zweier gleicher entgegengesetzt gerichteter konischer Kreispendelbewegungen von verschiedener Schwingungsdauer auffaßt, der rascheren, die Präzession ist aber die Limite, der sich bei einer Elongation von 90° die langsamere nähert, während die Schwingungsdauer der rascheren ins Unendliche wächst.

Ich spreche noch den Wunsch aus, daß der starke physikalische Einschlag nicht den Mathematiker, und die etwas umfangreichen Formeln nicht den Physiker vor der Lektüre des Buches zurückschrecken mögen!

Wien, Juni 1904.

Ludwig Boltzmann.

Inhaltsverzeichnis.

I. Die Lagrangeschen Gleichungen.

II. Allgemeinste Drehung eines starren Körpers.

III. Die verschiedenen Formen des Wirkungsprinzipes.

IV. Analogien mit physikalischen, besonders wärmetheoretischen Sätzen.

V. Die Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichungen.

VI. Methode der Variation der Konstanten.

VII. Gleichungen für die relative Bewegung.

I. Die Lagrangeschen Gleichungen.

§ 1. Integration der Relation, welche das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für einen Zeitmoment ausdrückt, nach der Zeit.

Der Ausgangspunkt der nun folgenden Betrachtungen ist das im § 35 des I. Teiles durch die Relation 93) ausgedrückte, mit dem d'Alembertschen vereinigte Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Es sei ganz wie in § 34 des I. Teiles ein beliebiges System materieller Punkte mit beliebigen inneren und äußeren Kräften gegeben, welches noch beliebigen Bedingungen unterworfen sein kann.

Die Kräfte, die von den Vorrichtungen ausgehen, durch welche das System gezwungen wird, die erwähnten Bedingungen zu erfüllen, nennen wir die impliziten Kräfte, sei es, daß diese Kräfte von äußeren Vorrichtungen oder von starren oder einseitigen Verbindungen der materiellen Punkte untereinander ausgehen; alle übrigen Kräfte nennen wir explizite. Bei den impliziten Kräften ist im ersteren Falle das Vorzeichen dadurch bestimmt, daß immer die von der Vorrichtung auf das System ausgeübten Kräfte die impliziten heißen, im letzteren Falle wird ihr Vorzeichen so bestimmt, wie es bei expliziten inneren Kräften schon im I. Teile geschah.

Die Massen, Kraftkomponenten und Koordinaten sowie die Differentiale und Variationen der letzteren aber sollen wie in § 71 des I. Teiles bezeichnet werden.

Wir nennen jede Bewegung des Systems, welche unter dem Einflusse der angenommenen Kräfte ohne Verletzung der

gegebenen Bedingungen wirklich stattfinden kann, eine natürliche Bewegung. Irgend eine solche heben wir ein für allemal hervor und nennen sie die unvariierte Bewegung desselben.

Dann sei also x_k der Wert irgend einer (der k-ten) Koordinate zu irgend einer Zeit t bei dieser Bewegung; x_k' und x_k'' sei die betreffende Geschwindigkeits- bez. Beschleunigungskomponente, $m_{3k-2} = m_{3k-1} = m_{3k}$ die Masse des k-ten materiellen Punktes, X_{3k-2}, X_{3k-1}, X_{3k} seien die nach den Koordinatenrichtungen geschätzten Komponenten der auf diesen Punkt wirkenden gesamten expliziten Kraft.

Wenn wir im ganzen n materielle Punkte haben, so sind dem k alle möglichen ganzen Zahlenwerte von 1 bis $3n$ zu erteilen.

Wir bezeichnen ferner wie im I. Teile § 33 das System als holonom, wenn sich sämtliche Bedingungsgleichungen auf ebenso viele Gleichungen von der Form

1) $$d\varphi(x_1, x_2 \ldots x_{3n}, t) = 0$$

reduzieren lassen. Ist dies nicht der Fall, so heißt das System ein nicht holonomes. Jede Bedingung, die sich durch Multiplikation mit einem integrierenden Faktor auf die Form 1) bringen läßt, nennen wir eine holonome, jede andere eine nicht holonome. Jedenfalls kann die l-te Bedingungsgleichung in der Form geschrieben werden:

2) $$\xi^{(l)} dt + \sum_1^{3n} {}_k \, \xi_k^{(l)} dx_k = 0\,.$$

Siehe I. Teil § 33 Gleichungen 77) und 78).

Ist τ die Gesamtanzahl der Bedingungsgleichungen und lassen sich daraus nicht mehr als τ_1 Gleichungen von der Form 1) ableiten, wobei dann noch $\tau - \tau_1$ nicht holonome Bedingungsgleichungen übrigbleiben, so bezeichnen wir die Zahl $\tau - \tau_1$ als den Grad der Nichtholonomität des Systems. Unter der Form 2) ist natürlich auch die Gleichung 1) enthalten, wenn $\xi^{(l)} = \frac{\partial \varphi}{dt}$, $\xi_k^{(l)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ ist.

Übrigens besagt eine Gleichung von der Form 1) nicht ganz dasselbe wie eine Integralgleichung von der Form

3) $$\varphi(x_1, x_2 \ldots x_{3n}, t) = 0\,,$$

in welcher die Integrationskonstante einen bestimmten speziellen Wert hat, da durch die Differentialgleichung 1) die Koordinatenwerte für einen einzigen unter allen Zeitmomenten unbestimmt bleiben und bloß deren Veränderungen für alle übrigen Zeitmomente bestimmt werden.

Unter Anwendung der soeben auseinandergesetzten Bezeichnungsweise schreibt sich das mit dem d'Alembertschen vereinigte Prinzip der virtuellen Verschiebungen (vergl. Gleichungen 93) und 184) des I. Teiles) in der Form:

$$4)\qquad \sum_{1}^{3n}{}_{k}\left(m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} - X_k\right) \delta x_k = 0 .$$

Wir beschränken uns im folgenden ausschließlich auf die Fälle, wo in den Bedingungsgleichungen und daher auch in dieser Relation nirgends ein Ungleichheitszeichen, sondern lediglich das Gleichheitszeichen gilt, und werden auf den Grund hiervon im Anfange des nächsten Paragraphen noch zurückkommen.

Ein vorgesetztes δ bezeichnet hierbei immer die Variation, welche die betreffende Größe erfährt, wenn man dem Systeme zur Zeit t eine beliebige virtuelle Verrückung erteilt (I. Teil, § 34). Dabei ist stets nur ein einziger bestimmter Zeitmoment t der Bewegung ins Auge gefaßt, alle übrigen Zeitmomente aber sind ganz außer Betracht gelassen. Der ins Auge gefaßte Zeitmoment dagegen ist aus ihnen vollkommen willkürlich ausgewählt. Daher können wir auch von Zeitmoment zu Zeitmoment fortschreiten und den Werten, welche die Koordinaten zu jedem Zeitmomente haben, willkürliche Zuwächse erteilen. Wir erhalten dann für jeden Zeitmoment besondere Werte von δx_k und es werden zuvörderst die für den nächsten Zeitmoment geltenden Werte dieser Größen absolut unabhängig sein von denen, die zu dem nächst vorhergehenden Zeitmomente gehören. Die Gleichung 4) wird auch gelten, wenn sich diese Größen von Zeitmoment zu Zeitmoment vollkommen diskontinuierlich ändern, so daß Integrale wie $\int \delta x_k dt$ absolut gar keinen Sinn haben, da die Größe δx_k unter dem Integral-

zeichen dann eine absolut diskontinuierliche Funktion der Zeit ist.

Unter allen möglichen Annahmen für die Werte der Variationen der Koordinaten wird es zwar verhältnismäßig wenige, aber doch noch immer unendlich viele geben, bei denen sich die δx_k zwar auch noch in ganz willkürlicher, aber in kontinuierlicher Weise mit der Zeit ändern. Wir können z. B.

$$\delta x_k = \varepsilon f_k(t) \tag{5}$$

setzen[1]), wobei ε eine unendlich kleine, für alle Koordinaten und zu allen Zeiten konstante Größe und $f_k(t)$ eine endliche kontinuierliche Funktion der Zeit ist.

Dieselbe kann für jeden Wert des k, d. h. für jede Koordinate ganz willkürlich gewählt werden, nur müssen alle diese Funktionen $f_k(t)$ so gewählt werden, daß die durch sie dargestellten Verschiebungen zu jeder Zeit virtuelle, d. h. mit den Bedingungen verträglich sind, denen das System gerade zur betreffenden Zeit t unterworfen ist. Ist also 2) die Gleichung, welche die betreffende Bedingung ausdrückt, so müssen die δx_k der Gleichung

$$\sum_{1}^{3n}{}_{k}\, \mathfrak{g}_k^{(l)}\, \delta x_k = 0 \tag{6}$$

genügen (vergl. I. Teil, § 34, Gleichung 88).[2]) In dem jetzt betrachteten speziellen Falle, daß die δx_k kontinuierliche

---

[1]) Die analoge Substitution für $\delta x_k''$ geht bei dem Prinzip des kleinsten Zwanges absolut nicht an, denn bei diesem muß ja für jeden Wert des k und zu allen Zeiten $\delta x_k = \delta x_k' = 0$ sein (vergl. die Gleichung 167) des I. Teiles). Würde man also analog mit Gleichung 5) jetzt während einer endlichen Zeit setzen $\delta x_k'' = \varepsilon . f_k(t)$, so könnte δx_k und $\delta x_k'$ höchstens für einzelne Momente, niemals aber für jeden Moment dieser Zeit gleich Null oder unendlich klein höherer Ordnung als ε sein. Wir haben uns also jetzt auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen zu beschränken.

[2]) Wir werden später einmal auch so variieren, daß wir irgend einem zu irgend einer Zeit t stattfindenden Zustande A der unvariierten Bewegung einen Zustand B der variierten Bewegung korrespondieren lassen, welcher zu einer etwas späteren Zeit $t + \delta t$ bei

Funktionen der Zeit, also durch Ausdrücke von der Form 5) darstellbar sind, haben Integrale wie

$$8) \qquad \int \delta x_k \, dt = \varepsilon \int f_k(t) \, dt$$

einen ganz bestimmten Sinn. Wir können also die für alle Zeitmomente gültige Gleichung 4) mit dt multiplizieren und über eine beliebige Zeit z. B. von t_0 bis t_1 integrieren, wodurch wir erhalten:

$$9) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum_{1}^{3n}{}_k \left(m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - X_k \right) \delta x_k \, dt = 0.$$

Hierbei kann t_0 die Anfangszeit, t_1 das Ende der Bewegung sein; es kann aber auch t_0 ein beliebiger, t_1 ein beliebiger späterer Zeitmoment im Verlaufe der Bewegung sein. Bei den in der Natur wirklich vorkommenden Bewegungen, z. B. der der Gestirne, kann ja von einer Anfangs- oder Endzeit der Bewegung überhaupt nicht die Rede sein. Es ist t_0 nur der Anfang, t_1 das Ende des gerade ins Auge gefaßten Stückes der Bewegung.

Die Variationen δx_k der Koordinaten sollen in den zunächst folgenden Paragraphen nun zudem immer der Bedingung unterworfen werden, daß sie sowohl für $t = t_0$ als auch für $t = t_1$ sämtlich verschwinden. Für Zeiten, welche diesen beliebig benachbart sind, können sie dann schon wieder von Null verschiedene Werte haben. Erst viel später (von § 31 angefangen) werden wir auch den Fall betrachten, daß die Koordinatenvariationen an den Integrationsgrenzen ebenfalls nicht verschwinden.

---

der variierten Bewegung eintritt, so daß δx die Veränderung bezeichnet, welche irgend eine Koordinate x erfährt, wenn man von dem der Zeit t entsprechenden Zustand A der unvariierten Bewegung zu dem der Zeit $t + \delta t$ entsprechenden Zustand B der variierten Bewegung übergeht, also jetzt A und B korrespondierende Zustände sind. Bei dieser noch allgemeineren Art der Variation, welche wir aber im Texte vorläufig noch nicht anwenden, würden an Stelle der Gleichungen 6) des Textes die Gleichungen treten:

$$7) \qquad \xi^{(l)} \delta t + \sum_{1}^{3n}{}_k \xi_k^{(l)} \delta x_k = 0.$$

§ 2. Ausschließung der Ungleichungen. Umkehrung des im vorigen Paragraphen entwickelten Satzes.

Wir haben uns hierbei auf die Fälle beschränkt, wo in Relation 4) das Gleichheitszeichen gilt. Die Fälle, wo auch das Ungleichheitszeichen gelten kann, sind ohnedies weit weniger wichtig. Sie treten ein, falls in den Bedingungsgleichungen ebenfalls Ungleichungen vorkommen. Dann geschieht aber die Bewegung, solange die Vorrichtungen, welche die betreffenden Bedingungen erzeugen, in Wirksamkeit bleiben, nicht anders, als ob in den Bedingungen das Gleichheitszeichen gelten würde. Von dem Moment an aber, wo die materiellen Punkte in Positionen gekommen sind, wo jene Vorrichtungen nicht mehr wirken, geschieht die Bewegung sofort genau so, als ob die durch diese Vorrichtungen bewirkten Bedingungen gar nicht gelten würden. Es wird daher wieder die Gleichung 9) richtig sein. In derselben sind jedoch die δx_k, solange die betreffenden Vorrichtungen wirksam sind, so zu wählen, daß sie die betreffenden Bedingungen erfüllen, in denen aber das Gleichheitszeichen mit Ausschluß aller Ungleichheitszeichen zu setzen ist. Sobald dagegen gewisse Vorrichtungen zu wirken aufgehört haben, können die δx_k ganz ohne Rücksicht auf die durch die betreffenden Vorrichtungen bewirkten Bedingungen gewählt werden.

Die Zeitmomente, in denen jene Vorrichtungen gerade zu wirken aufhören oder anfangen, werden, singuläre Fälle ausgenommen, ohnedies in das Integral der linken Seite der Gleichung 9) nur einen Betrag liefern, welcher vernachlässigt werden kann. Dieses Integral ist also in eine Summe von Integralen zu zerlegen, in denen außer t_0 und t_1 alle diese Zeitmomente als Integrationsgrenzen vorkommen, so daß kein solcher Zeitmoment innerhalb eines Integrationsgebietes fällt.

Dadurch wird bewirkt, daß für jedes der Teilintegrale für alle innerhalb der Integrationsgrenzen liegenden Zeiten die Gleichung 9) gilt; denn die Bewegung geschieht inner-

halb dieser Grenzen überall so, als ob sowohl in Gleichung 4) als auch in den Bedingungsgleichungen überall nur Gleichheitszeichen vorhanden wären; nur daß für einige Teilintegrale mehr, für andere weniger Bedingungen mit in Betracht zu ziehen sind. Für die Grenzen der Integration dagegen müssen noch besondere Grenzbedingungen aufgestellt werden, auf welche wir aber in diesen Vorlesungen um so weniger eingehen werden, als sie meines Wissens noch niemals untersucht worden sind.

Die Bedingung, daß das Integral 9) für alle virtuellen durch die Gleichung 5) ausgedrückten Variationen verschwinden muß, ist zwar nicht mehr so allgemein als die Form, in der wir das Prinzip der virtuellen Verschiebungen im I. Teile ausdrückten, da jetzt die Koordinatenvariationen kontinuierliche Funktionen der Zeit sein müssen, und nicht wie im I. Teile für jeden Zeitmoment vollkommen willkürlich und von den für alle übrigen Zeitmomente angenommenen vollkommen unabhängig sind. Es folgen aber aus der ersteren Bedingung, wenn wir den Fall ausschließen, daß die Bewegungsgleichungen sich längs einer endlichen Zeitstrecke von Moment zu Moment diskontinuierlich mit der Zeit ändern, und wenn in allen Bedingungen das Gleichheitszeichen gilt, nach den Regeln der Variationsrechnung noch immer die Bewegungsgleichungen der Mechanik.

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, wir hätten im Integral 9) diejenigen Variationen, welche durch die Bedingungsgleichungen bestimmt sind, durch die übrigen unabhängigen ausgedrückt. Es müssen dann, wie wir sofort beweisen werden, wenn das Integral 9) unter den angenommenen Bedingungen stets verschwinden soll, die Koeffizienten aller dieser unabhängigen Variationen unter dem Integralzeichen für alle Zeiten verschwinden; dies war aber genau die Bedingung, aus der wir schon im I. Teile die Bewegungsgleichungen ableiteten.

Der noch ausständige Beweis kann in der folgenden Weise geführt werden. Wenn irgend ein Koeffizient einer der unabhängigen Variationen im Integral 9) nicht für alle Zeiten verschwinden würde, so könnte man dieser Variation

unbeschadet der Bedingung, daß sie eine kontinuierliche Funktion der Zeit sein soll, für diejenigen Werte der Zeit, für welche der Koeffizient von einem positiven zu einem negativen Werte oder umgekehrt übergeht, sowie für die Zeiten t_0 und t_1 den Wert Null, für alle anderen Zeiten aber, für welche dieser Koeffizient positiv ist, ebenfalls einen positiven, für alle Zeiten, wo er negativ ist, einen negativen Wert erteilen.

Würde man dasselbe für alle anderen unabhängigen Variationen festsetzen, deren Koeffizienten nicht für alle Zeiten gleich Null sind, so würde das Integral 9) aus lauter positiven Gliedern bestehen, es könnte also nicht gleich Null sein. Sein Verschwinden für alle möglichen virtuellen Verrückungen, die von der gleichen Anfangslage zur gleichen Endlage übergehend sonst beliebige kontinuierliche Funktionen der Zeit sind, hat also zur Folge, daß nach Elimination der durch die Bedingungsgleichungen bestimmten Variationen die Koeffizienten aller übrigen unabhängigen Variationen zu allen Zeiten verschwinden müssen, woraus schon im I. Teile die Bewegungsgleichungen abgeleitet wurden.

Dies muß auch für Zeiten gelten, die beliebig nahe an t_0 und t_1 liegen, und daher auch für letztere Zeiten selbst, da wir Diskontinuitäten ausschlossen.

Es folgt also, falls in den Bedingungen nur Gleichheitszeichen gelten, nicht nur aus den Bewegungsgleichungen das Verschwinden des Integrals 9), sondern es folgen auch umgekehrt aus diesem Verschwinden für alle virtuellen Verrückungen, die kontinuierliche Funktionen der Zeit sind, unter den oben angegebenen Einschränkungen wieder die Bewegungsgleichungen. Ja wir sehen, daß der Beweis, kraft dessen wir im I. Teile bewiesen haben, daß die Bewegungsgleichungen eine notwendige Folge der Relation 4) sind, dadurch nichts an seiner Beweiskraft verliert, daß wir jetzt die Koordinatenvariationen als kontinuierliche Funktionen der Zeit ansehen.

§ 3. Prinzip der stationären Wirkung.

Wir haben diejenige Bewegung, wobei die k-te Koordinate zur Zeit t den Wert x_k hat und welche also unter den gegebenen Anfangsbedingungen den Bewegungsgleichungen gemäß vor sich geht (eine natürliche Bewegung ist), die unvariierte genannt. Dieser unvariierten Bewegung stellen wir die variierte gegenüber, bei welcher zur Zeit t die k-te Koordinate den Wert $x_k + \delta x_k$ hat, wobei δx_k durch Gleichung 5) gegeben ist. Da auch diese Größe eine kontinuierliche Funktion der Zeit ist, so macht bei der variierten Bewegung jeder materielle Punkt ebenfalls eine kontinuierliche Bewegung.

Da ferner für die Zeiten t_0 und t_1 die Variationen sämtlicher Koordinaten verschwinden, so wird bei der variierten Bewegung jeder Punkt zur Zeit t_0 von denselben Positionen ausgehen wie bei der unvariierten Bewegung, und auch wieder zur Zeit t_1 dieselbe Lage erreichen, wie bei der unvariierten Bewegung. Es kann sein, daß die variierte Bewegung bloß dadurch aus der unvariierten entstanden ist, daß die der Anfangszeit entsprechenden Werte der Geschwindigkeitskomponenten sämtlicher materieller Punkte unendlich wenig variiert wurden, so daß die variierte Bewegung nach denselben Bewegungsgleichungen vor sich geht, wie die unvariierte.

Meist wird dies aber nicht der Fall sein; die variierte Bewegung wird dann unter dem Einflusse von Kräften, welche dieselben Funktionen der Koordinaten sind, wie für die unvariierte Bewegung, nicht möglich sein; wir müssen diesen Kräften vielmehr neue unendlich kleine Kräfte hinzufügen, um zu bewirken, daß das System in jedem Zeitmomente die variierte Bewegung macht. Diese neuen Kräfte können daher rühren, daß wir jeden materiellen Punkt mit der Hand fassen und so führen, daß er sich genau der variierten Bewegung entsprechend bewegt, oder sie können wo immer sonst herrühren. Wir wollen sie immer die Zusatzkräfte nennen.

Wir kümmern uns übrigens vorläufig gar nicht um

diese Zusatzkräfte, sondern betrachten die variierte Bewegung vielmehr bloß als eine im Gedanken neben die unvariierte, also neben die wirkliche hingestellte Bewegung.

Wir vergleichen gegenwärtig immer jeden beliebigen, zu einer beliebigen Zeit t stattfindenden Zustand der unvariierten Bewegung mit demjenigen Zustande der variierten Bewegung, welcher bei dieser zur gleichen Zeit t gehört und nennen die Zustände, welche wir vergleichen, korrespondierende. Wir setzen vor eine beliebige Größe das Zeichen δ, um den Zuwachs auszudrücken, welchen jene Größe erfährt, wenn man von einem beliebigen Zustande der unvariierten Bewegung zum korrespondierenden Zustande der variierten übergeht, wobei also bei unseren gegenwärtigen Betrachtungen t stets als konstant anzusehen ist. Das Zeichen d dagegen drückt den Zuwachs aus, welcher bei der unvariierten Bewegung eintritt, wenn t um dt wächst, wobei wieder von einer variierten Bewegung gar nicht die Rede ist.

Die Kraftkomponenten X_k, Y_k, Z_k sowie die Kraftfunktion V (sobald eine solche existiert), und die in den Bedingungsgleichungen auftretenden Größen φ und ξ sollen für die variierte Bewegung dieselben Funktionen der Koordinaten und eventuell von t sein wie für die unvariierte Bewegung. δV, $\delta \varphi$ etc. stellen also die Zuwächse dar, welche diese Größen dadurch erfahren, daß die Koordinaten von den Werten $x_1, x_2 \ldots$, die ihnen zu irgend einer Zeit t bei der unvariierten Bewegung zukommen, zu den Werten $x_1 + \delta x_1$, $x_2 + \delta x_2 \ldots$ übergehen, die sie im korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung haben. Es ist also:

10) $$\delta V = \sum_1^{3n} {}_k \frac{\partial V}{\partial x_k} \delta x_k$$

11) $$\delta \varphi = \sum_1^{3n} {}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \delta x_k .$$

Die partiellen Ableitungen von $V + \delta V$ nach den Koordinaten liefern natürlich nur die Kräfte, welche bei Fort-

bestand der für die unvariierte Bewegung geltenden Kraftgesetze bei derjenigen Konfiguration der materiellen Punkte wirksam wären, die diesen bei der variierten Bewegung zukommt, während die Kräfte, welche wir die Zusatzkräfte genannt haben, eine neu hinzukommende oder auch gar keine Kraftfunktion haben.

Da für die variierte Bewegung zu jeder beliebigen Zeit t der erste materielle Punkt die Abszisse

$$x_1 + \delta x_1 = x_1 + \varepsilon f_1(t)$$

hat, so ist bei der variierten Bewegung dessen Geschwindigkeitskomponente in der Abszissenrichtung zur Zeit t gleich:

12) $$\frac{d}{dt}(x_1 + \delta x_1) = \frac{d x_1}{dt} + \frac{d \delta x_1}{dt}.$$

Unserer Übereinkunft gemäß bezeichnen wir ganz allgemein den Zuwachs, den eine beliebige Größe beim Übergang von einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung erfährt, durch ein vorgesetztes δ. Da wir die x-Komponente der Geschwindigkeit des ersten materiellen Punktes für die unvariierte Bewegung mit x_1' bezeichnet haben, so ist also der Zuwachs, welchen diese x-Komponente erhält, wenn man von einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung übergeht, mit $\delta x_1'$ zu bezeichnen. Daher ist nach Formel 12):

$$\delta x_1' = \frac{d \delta x_1}{dt}.$$

Ebenso erhält man allgemein

13) $$\delta x_k' = \frac{d \delta x_k}{dt}.$$

Ferner ist zur Zeit t die lebendige Kraft des ganzen Systems:

14) $$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{3n} {}_k\, m_k x_k'^2.$$

Der Zuwachs, den diese Größe beim Übergange von einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung erfährt, ist also:

15) $$\delta T = \sum_1^{3n} {}^k m_k x'_k \delta x'_k .$$

Wir können nun in der Gleichung 9) jedes Glied der Summe einzeln nach t integrieren und sie in der Form schreiben:

16) $$\sum_1^{3n} {}^k \int_{t_0}^{t_1} m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} \delta x_k dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^{3n} {}^k X_k \delta x_k dt = 0.$$

Jedes einzelne Glied der ersten Summe hat die Form:

$$\int_{t_0}^{t_1} m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} \delta x_k dt .$$

Integrieren wir partiell nach t, so geht es über in:

$$\left| m_k \frac{d x_k}{d t} \delta x_k \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m_k \frac{d x_k}{d t} \frac{d \delta x_k}{d t} \cdot dt .$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks verschwindet, da wir vorausgesetzt haben, daß sowohl für $t = t_0$ als auch für $t = t_1$ sämtliche δx_k verschwinden. Das zweite aber reduziert sich bei Einführung der obigen Bezeichnung auf:

$$\int_{t_0}^{t_1} m_k x'_k \delta x'_k dt .$$

Nehmen wir dieselbe Transformation mit allen Gliedern der ersten Summe der Gleichung 16) vor und fassen dann wieder alle zusammen, so finden wir, daß sich diese Summe auf $-\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt$ reduziert. Wir können daher die Gleichung 16) auch in der Form schreiben

17) $$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_1^{3n} {}^k X_k \delta x_k \right) dt = 0 ,$$

welche Relation man aus einem später zu erläuternden Grunde als das Prinzip der stationären Wirkung in seiner allgemeinsten Form zu bezeichnen pflegt. Nicht zutreffend ist es, sie das **Hamiltonsche** Prinzip zu nennen, von dem sie, wie wir sehen werden, nur ein spezieller Fall ist.

Der Ausdruck $\sum_1^{3n}{}_k X_k \delta x_k$ der Formel 17) stellt die Arbeit dar, welche gegen die expliziten Kräfte geleistet wird, sobald das System aus der wirklichen Lage, die es zur Zeit t hat, in die korrespondierende, d. h. derselben Zeit entsprechende variierte Lage gebracht wird (vergl. I. Teil, §§ 16 und 26). Wenn eine Kraftfunktion V existiert, welche übrigens auch noch die Zeit explizit enthalten kann, so ist $X_k = -\partial V/\partial x_k$, daher nach Gleichung 10)

18) $$\sum_1^{3n}{}_k X_k \delta x_k = -\delta V,$$

wobei $-\delta V$ die gesamte Veränderung der Funktion V beim Übergang von der wirklichen zur variierten Bewegung unter Konstanthaltung der Zeit t ist. Existiert keine Kraftfunktion, oder sind die Kräfte überhaupt nicht bloß als Funktionen der Zeit und der Koordinaten gegeben, so wollen wir noch immer symbolisch

19) $$\sum_1^{3n}{}_k X_k \delta x_k = -\delta' V$$

setzen, wobei der beigefügte Strich ausdrückt, daß die Summe kein vollständiger Differentialausdruck ist. Wenn wir nicht wissen, ob diese Summe ein vollständiger Differentialausdruck ist oder nicht, so wollen wir dies durch zwei dem δ beigefügte Striche andeuten, so daß wir ganz allgemein die Gleichung 17) in der Form schreiben:

20) $$\int_{t_0}^{t_1} dt(\delta T - \delta'' V) = 0,$$

wobei stets

21) $$\delta'' V = -\sum_1^{3n}{}_k X_k \delta x_k$$

ist, und es sind beide Striche wegzulassen, wenn man sicher weiß, daß eine Kraftfunktion existiert; weiß man dagegen sicher, daß keine existiert oder die Kräfte überhaupt nicht

als Funktionen der Koordinaten und der Zeit gegeben sind, so ist ein Strich zu setzen.

§ 4. Begriff der verallgemeinerten Koordinaten.

Die im vorigen Paragraphen entwickelte allgemeinste Form des Prinzipes der stationären Wirkung erweist sich als besonders nützlich bei der Koordinatentransformation. Wir haben bisher die Position jedes Massenpunktes des Systems durch dessen rechtwinklige Koordinaten bestimmt. Sehr oft empfiehlt es sich, irgend welche andere Variabeln einzuführen, welche ebenfalls dazu tauglich sind, die Position jedes Punktes des Systems zu jeder Zeit zu definieren. Man kann z. B. die Position jedes Punktes durch Polar- oder Semipolar- oder elliptische oder noch andere Koordinaten bestimmen. Wenn zwischen den Koordinaten der verschiedenen materiellen Punkte des Systems Gleichungen bestehen, so genügen oft wenige Variable zur Bestimmung der Lage sämtlicher materieller Punkte des Systems. So kann, wie wir im I. Teile ersahen, die Position eines vollkommen freien starren Körpers im Raume durch sechs Variable bestimmt werden. Zur Bestimmung der Lage eines um eine feste Achse drehbaren starren Körpers reicht sogar eine einzige Variable hin.

Wenn zwischen den $3n$ rechtwinkligen Koordinaten der n Punkte eines materiellen Systems r Gleichungen bestehen, so sind noch $3n - r = i$ Koordinaten willkürlich; man sagt, das System hat i Freiheiten. Die Zahl der unabhängigen Variabeln, welche zur Bestimmung der Lage aller seiner Teile erforderlich ist, ist dann gleich der Zahl der Freiheiten i; es können aber auch mehr (s) Variable verwendet werden. Im letzteren Falle sind dieselben jedoch nicht voneinander unabhängig, sondern es werden zwischen denselben $\sigma = s - i$ Gleichungen bestehen und man kann sagen, daß durch Einführung der neuen Variable von den Bedingungsgleichungen $r - (s - i) = 3n - s$ eliminiert wurden, da früher r, jetzt nur mehr $\sigma = s - i$ Bedingungsgleichungen vorhanden sind.

Diese Elimination von Bedingungsgleichungen wird

häufig folgendermaßen bewerkstelligt. Man drückt die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten durch $3n$ neue Variabeln aus und wählt letztere so, daß einige derselben vermöge der Bedingungsgleichungen für alle Zeiten konstant bleiben, daher nicht den Charakter von Koordinaten, sondern von reinen Konstanten der Aufgabe haben, während nur die anderen als veränderliche Koordinaten übrig bleiben. Wenn z. B. ein materieller Punkt gezwungen ist, sich auf einer Kugelfläche zu bewegen, so drückt man zuerst seine rechtwinkligen Koordinaten durch gewöhnliche Polarkoordinaten aus, deren Ursprung der Mittelpunkt jener Kugelfläche ist. Eine der Polarkoordinaten, nämlich die Entfernung vom Kugelzentrum, ist dann konstant und es bleiben nur die beiden Polarwinkel als veränderliche Koordinaten übrig.

Es sei nun ein beliebiges System von n materiellen Punkten gegeben; die rechtwinkligen Koordinaten derselben sollen wieder mit $x_1\, x_2 \ldots x_{3n}$ bezeichnet werden, und auch alle übrigen bisherigen Bezeichnungen sollen beibehalten werden. Ferner seien $p_1\, p_2 \ldots p_s$ irgend welche andere Variable, durch deren Werte ebenfalls die Position sämtlicher materieller Punkte des Systems bestimmt ist. Wir wollen die p die verallgemeinerten Koordinaten des Systems oder kürzer die Parameter nennen. Nach dem Gesagten muß s gleich oder größer als die Anzahl i der Freiheiten des Systems sein und bestehen im letzteren Falle $s - i$ Gleichungen zwischen den p.

Durch die Werte der p soll die Lage, d. h. es sollen die rechtwinkligen Koordinaten $x_1\, x_2 \ldots x_{3n}$ sämtlicher materieller Punkte des Systems bestimmt sein. Die letzteren Größen sind daher Funktionen der ersteren, was man in folgender Form schreibt:

$$22)\qquad \begin{cases} x_1 = F_1\,(p_1, p_2 \ldots p_s, t) \\ x_2 = F_2\,(p_1, p_2 \ldots p_s, t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{3n} = F_{3n}(p_1, p_2 \ldots p_s, t). \end{cases}$$ [1]

[1]) Sobald die rechtwinkligen Koordinaten mit den generalisierten durch ein Gleichungssystem von der Form 22) verbunden sind, be-

Der einfachste und am häufigsten vorkommende Fall wird der sein, daß die Funktionen F, welche die rechtwinkligen Koordinaten durch die generalisierten ausdrücken, die Zeit nicht explizit enthalten, daß sie also zu allen Zeiten dieselbe Form haben, was z. B. eintritt, wenn man rechtwinklige Koordinaten durch Polarkoordinaten etc. ausdrückt. Wir bezeichnen die generalierten Koordinaten dann als skleronome.

Die Funktionen F können aber auch mit der Zeit veränderliche Parameter enthalten, so daß ihre Form mit der Zeit kontinuierlich veränderlich ist. Man sagt dann, sie enthalten die Zeit explizit und drückt es dadurch aus, daß man unter dem Funktionszeichen F der Variabeln p noch die Variable t explizit beifügt (rheonome generalisierte Koordinaten). Letzterer Umstand wird immer eintreten, wenn durch Einführung der betreffenden generalisierten Koordinaten Bedingungsgleichungen eliminiert wurden, welche die Zeit explizit enthielten.

Am einfachsten und zweckmäßigsten ist es natürlich,

zeichnen wir die letzteren als holonome. In diesem Buche, mit Ausnahme von §§ 27 und 28 ist, sowie überhaupt in der bisherigen Mechanik, immer vorausgesetzt, daß die generalisierten Koordinaten holonome sind. Es kann auch sein, daß bloß die Differentiale der rechtwinkligen Koordinaten durch die der generalisierten gegeben sind, daß also im einfachsten Falle an Stelle der Gleichungen 22) Gleichungen von der Form

23) $$dx_k = \Pi^{(k)}\,dt + \sum_1^s{}_h\, \Pi_h^{(k)}\,dp_h$$

treten. Wenn diese Gleichungen nicht auf lauter Gleichungen von der Form

24) $$dx_k = dF_k(p_1, p_2 \ldots p_s, t)$$

reduzierbar sind, so bezeichnen wir die generalisierten Koordinaten als nicht holonome. Alsdann treten auch an Stelle der Gleichungen 25) entsprechende Differentialgleichungen. Für nicht holonome generalisierte Koordinaten bedürfen die meisten im Texte entwickelten Lehrsätze unter anderem schon die Lagrangeschen Gleichungen einer ganz wesentlichen Modifikation (vergl. §§ 27 und 28, dann Wien. Sitzungsber. 111, IIa, S. 1603, Dezember 1902). Wenn es nicht möglich ist, mehr als g der Gleichungen 23) auf die Form 24) zu bringen, so nennen wir g den Grad der Nichtholonomität der generalisierten Koordinaten.

wenn die Funktionen F der Gleichungen 22) eindeutig und kontinuierlich sind, da dann die Position des Systems durch die generalisierten Koordinaten eindeutig bestimmt ist. Doch läßt sich manchmal die Einführung mehrdeutiger Funktionen nicht vermeiden. Man kommt dann überein, daß die Werte der generalisierten Koordinaten mit bestimmten willkürlich gewählten beginnen und sich dann stets kontinuierlich mit der Zeit ändern sollen. Da auch die Werte der rechtwinkligen Koordinaten sich stets kontinuierlich mit der Zeit ändern, so ist dadurch jede Mehrdeutigkeit ausgeschlossen, solange man nicht an eine Stelle kommt, wo sich mehrere Funktionswerte verzweigen. An solchen Verzweigungsstellen oder anderen singulären Stellen, wo die Funktionen diskontinuierlich, unbestimmt oder unendlich werden, sind immer besondere Betrachtungen resp. besondere Festsetzungen notwendig, während an allen übrigen Stellen die zu entwickelnden Gleichungen richtig bleiben.

Wenn zwischen den generalisierten Koordinaten Gleichungen bestehen, so können natürlich die Funktionen F mittels derselben in verschiedene Formen gebracht werden, indem man die eine oder andere generalisierte Koordinate vermöge der zwischen den generalisierten Koordinaten bestehenden Gleichungen durch die übrigen ausdrückt, oder sonst gewisse in den Funktionen F vorkommende Ausdrücke unter Benutzung dieser Gleichungen in eine andere Form bringt.

Da zu jeder Reihe von kontinuierlich sich folgenden Wertekombinationen der x bis zu etwaigen Verzweigungspunkten oder singulären Stellen eine einzige kontinuierliche Reihe von Wertekombinationen der p gehört, so kann man aus den Gleichungen 22) jedenfalls auch umgekehrt die p als Funktionen der x ausdrücken, was auf folgende Form führen soll

$$25)\quad \begin{cases} p_1 = \Phi_1(x_1, x_2 \ldots x_{3n}, t) \\ p_2 = \Phi_2(x_1, x_2 \ldots x_{3n}, t) \\ \vdots \\ p_s = \Phi_s(x_1, x_2 \ldots x_{3n}, t), \end{cases}$$

wobei natürlich die Funktionen Φ ebenfalls in verschiedene Formen gebracht werden können, falls Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten bestehen. Auch die Funktionen Φ können mehrdeutig sein und einzelne singuläre Stellen haben, für welche dann die Gültigkeit der zu entwickelnden Gleichungen aufhört und besondere Betrachtungen erforderlich sind.

Es hätte keine Schwierigkeit, mittels der Gleichungen 22) in die ersten und zweiten Differentialquotienten der x nach der Zeit, sowie in die Ausdrücke für die Kräfte die p statt der x einzuführen. Die Substitution dieser Werte in die für die rechtwinkligen Koordinaten geltenden Bewegungsgleichungen würde dann in jedem speziellen Falle die Form liefern, welche die Bewegungsgleichungen nach Einführung der verallgemeinerten Koordinaten annehmen.

Wir wollen aber im folgenden zeigen, wie diese Form viel kürzer und ganz allgemein mittels des Prinzipes der stationären Wirkung gefunden werden kann.

§ 5. Begriff der verallgemeinerten Kräfte.

Es seien $x_1\, x_2\, \ldots\, x_{3n}$ beliebige Koordinatenwerte, $p_1\, p_2\, \ldots p_s$ die dazu gehörigen Werte der p oder bei Mehrdeutigkeit bestimmte dazu gehörige Werte der p. Den durch die Gleichungen 5) bestimmten Zuwächsen $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_{3n}$ der x sollen die Zuwächse $\delta p_1\, \delta p_2\, \ldots\, \delta p_s$ der p entsprechen, welche also jedenfalls auch sonst vollkommen willkürlich sind, nur daß sie mit den etwa zwischen den p bestehenden Bedingungen vereinbar sein müssen; die durch sie bestimmte Verschiebung des Systems nennen wir die Verschiebung *B*. Dann folgt mit Ausnahme der singulären Stellen, von denen jedenfalls nur einzelne vorhanden sein sollen, aus den Gleichungen 22):

$$26)\qquad \delta x_k = \sum_1^s{}_h \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\,\delta p_h \qquad k = 1, 2, \ldots 3n.$$

Wir ließen immer solche Zustände einander korrespondieren, welche zu gleichen Zeiten gehören, d. h. bei der durch das Zeichen δ angedeuteten Operation ist immer ein

Zustand der unvariierten mit dem der gleichen Zeit t entsprechenden Zustande der variierten Bewegung zu vergleichen. Infolgedessen muß bei Bildung von δx_k die Zeit t als unveränderlich angesehen werden, wogegen man für den während der Zeit dt bei der unvariierten Bewegung eintretenden Zuwachs von x_k die Formel erhält:

27) $$d x_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} dt + \sum_1^s {}^h \frac{\partial x_k}{\partial p_h} d p_h .$$

Die Koeffizienten der δp in Formel 26) sind die partiellen Ableitungen der Funktionen F nach den p, also selbst wieder Funktionen der p und eventuell der Zeit. Wenn man von bestimmten Werten der x und p ausgeht, so sind bis zu den singulären Stellen die δx eindeutig durch die δp bestimmt und umgekehrt, da nirgends außer in den Verzweigungspunkten ein zu gewissen p gehöriges Wertsystem der x kontinuierlich in ein anderes oder umgekehrt übergehen kann.

Substituiert man die Werte 26) in den Ausdruck 21) für die bei der fingierten Verschiebung B geleistete Arbeit des Systems, so nimmt dieser die Form an

28) $$-\delta'' V = \sum_1^{3n} X_k \delta x_k = \sum_1^s {}^h P_h \delta p_h ,$$

wobei

29) $$P_h = \sum_1^{3n} {}^k X_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h} \qquad h = 1, 2 \ldots s$$

ist. Durch Einführung dieser Größen erhält man aus Gleichung 17) oder 20):

30) $$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_1^s {}^h P_h \delta p_h \right) dt = 0 .$$

Die Richtigkeit der Gleichung 17) wurde für beliebige virtuelle Verschiebungen bewiesen, welche jedoch sowohl für $t = t_0$ als auch für $t = t_1$ verschwinden müssen. Es gilt also die Gleichung 30) ebenfalls für beliebige mit den Bedingungsgleichungen verträgliche δp_h, sobald diese sämtlich für jede

dieser beiden Zeiten verschwinden; denn man sieht leicht, daß, wenn sämtliche δx verschwinden, dann auch sämtliche δp verschwinden müssen und umgekehrt.

Die Größen P_k spielen eine ganz analoge Rolle wie früher die Größen X_k. Erstere heißen daher die verallgemeinerten Kräfte, und zwar P_k die in der Richtung der verallgemeinerten Koordinate p_k wirkende verallgemeinerte Kraft oder auch die Projektion oder Komponente der Gesamtkraft in der Richtung der Koordinate p_k. Wenn nämlich die Koordinatentransformation bloß in einem Übergange zu anders gerichteten Koordinatenachsen besteht, so sieht man leicht, daß P_k im gewöhnlichen Sinne des Wortes die Komponente der auf einen Punkt wirkenden Kraft in der Richtung der betreffenden neuen Koordinatenachse ist.

$-\delta'' V$ ist die bei einer bloß gedachten Verschiebung geleistete Arbeit. Wollte man die während der Zeit dt für die unvariierte Bewegung wirklich geleistete Arbeit

$$\sum_1^{3n}{}_k X_k\, d x_k$$

berechnen, so wären natürlich für die dx die Werte 27) zu substituieren und es würde folgen $-dV + \frac{\partial V}{\partial t} dt$.

Wenn die X nur Funktionen der Koordinaten sind und auch die Funktionen F der Gleichungen 22) die Zeit nicht enthalten, so sind die P ebenfalls Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten, welche die Zeit nicht enthalten. Wir sagen dann, das System ist skleronom und skleronom bestimmt. Enthalten die X oder die F die Zeit explizit (ist das System rheonom oder rheonom bestimmt, oder beides) so wird dies auch wenigstens von einigen der P gelten. Sind dagegen die X auch von den Geschwindigkeitskomponenten oder noch komplizierteren Größen abhängig, so enthalten natürlich auch die P die Ableitungen der p nach der Zeit oder noch verwickelter gebaute Ausdrücke. Wenn die X die negativen partiellen Ableitungen einer Funktion V (der Kraftfunktion) nach der betreffenden Koordinate sind und V nur die Koordinaten und eventuell explizit die Zeit enthält, so daß

30a) $$X_k = -\frac{\partial V}{\partial x_k} \qquad k = 1, 2 \ldots 3n$$

ist, so wird, wie sofort aus Gleichung 29) ersichtlich ist:

31) $$P_h = -\sum_1^{3n} {}_k \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = -\frac{\partial V}{\partial p_h}.$$

Man erhält also dann die nach einer beliebigen generalisierten Koordinate wirkende generalisierte Kraft, indem man in der Kraftfunktion die rechtwinkligen Koordinaten x mittels der Gleichungen 22) durch die generalisierten Koordinaten ausdrückt, die so erhaltene Funktion der generalisierten Koordinaten und der Zeit nach der betreffenden generalisierten Koordinate partiell differenziert und schließlich das Vorzeichen umkehrt.

Wenn zwischen den p keine Gleichung mehr besteht, so kann man die nach p_h wirkende verallgemeinerte Kraft unabhängig von den rechtwinkligen Koordinaten und den Komponenten der äußeren Kräfte nach den Richtungen der rechtwinkligen Koordinatenachsen in der folgenden Weise definieren. Man läßt p_h um δp_h wachsen, die übrigen p aber konstant, sowie auch die Zeit, insofern die Form der p mit ihr veränderlich ist. Die dabei geleistete Arbeit $-\delta_h'' V$ durch den Parameterzuwachs δp_h dividiert ist die betreffende generalisierte Kraft. Es ist also:

32) $$P_h = -\frac{\delta_h'' V}{\delta p_h}.$$

Sind die p nicht voneinander unabhängig, so können natürlich für jedes einzelne P verschiedene Ausdrücke aufgestellt werden. Es lassen sich dann sämtliche äußere und innere nach jedem Parameter wirkenden Kräfte gar nicht durch alleinige Betrachtung der Arbeitsleistung bei jeder virtuellen Verschiebung voneinander trennen, gleichwie allein durch Angabe der Arbeitsleistung bei jeder virtuellen Verschiebung sämtliche Komponenten der auf alle materiellen Punkte wirkenden äußeren Kräfte nach den rechtwinkligen Koordinatenrichtungen in dem Falle ebenfalls noch keineswegs bestimmt sind, daß zwischen den rechtwinkligen Koordinaten Gleichungen bestehen.

Wenn aber die X, sowie die in den Gleichungen 22) vorkommenden Funktionen F gegeben sind und man daran keine Eliminationen mittels der Bedingungsgleichungen vornimmt, so sind die Ausdrücke 29) bestimmt. Es sind jene Werthe, welche die Formel 29) (resp. 32)) geben würde, wenn man ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen alle p bis auf p_h konstant läßt, aus den Gleichungen 22) die dazu gehörigen Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten und mittels der Formel 28) $\delta_h'' V$ berechnen würde.

Die generalisierten Kräfte haben natürlich nicht immer die Dimensionen einer Kraft im gewöhnlichen Sinne. Da $P_h \delta p_h$ immer die Dimensionen einer Arbeit hat, so hat z. B. P_h die Dimension einer mit einer Länge multiplizierten Kraft (einer Arbeit, eines Drehmomentes), wenn p_h ein Winkel, also eine bloße Zahl ist.

§ 6. Generalisierte Geschwindigkeit, lebendige Kraft, generalisiertes Moment. Eine sehr allgemeine Gleichung.

Wir wollen nun den Differentialquotienten einer beliebigen Größe nach der Zeit wieder mit einem angehängten Strich bezeichnen und die Differentialquotienten $p_1', p_2' \dots$ der verallgemeinerten Koordinaten nach der Zeit die verallgemeinerten Geschwindigkeiten nennen. Die Division der Gleichung 27) durch dt liefert:

$$33) \qquad x_k' = \frac{\partial x_k}{\partial t} + \sum_1^s {}_h\, p'_h \frac{\partial x_k}{\partial p_h} \qquad k = 1, 2 \dots 3n.$$

Da die partiellen Differentialquotienten der x_k Funktionen der p und der Zeit sind, so sind also durch diese Formel die gewöhnlichen Geschwindigkeitskomponenten x' als Functionen der verallgemeinerten Koordinaten p und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten p' ausgedrückt und zwar sind sie bezüglich der letzteren Größen linear. Diese Funktionen werden die Zeit dann noch explizit enthalten, wenn diese auch in den Funktionen F explizit enthalten ist (wenn die verallgemeinerten Koordinaten rheonom sind).

Der partielle Differentialquotient eines so ausgedrückten x'_k nach p'_h (d. h. der daraus unter Konstanthaltung aller

übrigen p', aller p und der Zeit, wenn letztere explizit in $\partial x'_k/\partial p'_h$ enthalten ist, gebildete) ist

$$34)\qquad \frac{\partial x'_k}{\partial p'_h} = \frac{\partial x_k}{\partial p_h},$$

also gleich dem aus 22) gebildeten partiellen Differentialquotienten des entsprechenden x nach dem entsprechenden p.

In den rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt ist die lebendige Kraft durch Formel 14) gegeben. Substituiert man für die x' die Werte 33), so folgt T als ganze Funktion zweiten Grades der p'. Wir wollen setzen

$$35)\quad \begin{cases} T = \frac{1}{2}\sum_1^s{}_h \sum_1^s{}_k a_{hk} p'_h p'_k + \sum_1^s{}_h \beta_h p'_h + \gamma \\ \quad = \frac{1}{2} a_{11} p'^2_1 + \frac{1}{2} a_{22} p'^2_2 \cdots + a_{12} p'_1 p'_2 + \cdots \\ \quad\quad + \beta_1 p'_1 + \beta_2 p'_2 \cdots + \gamma, \end{cases}$$

wobei wir unter a_{hk} und a_{kh} stets dieselbe Größe, nämlich den halben Koeffizienten von $p'_h p'_k$ im Ausdrucke für T verstehen. Die beiden Glieder, welche man erhält, einmal, wenn man in der ersten Summe den Summationsbuchstaben gleich h und in der zweiten gleich k, das andere Mal, wenn man in der ersten Summe den Summationsbuchstaben gleich k und in der anderen gleich h setzt, addieren sich dann zu $a_{hk} p'_h p'_k$.

Die Koeffizienten a, β und γ werden noch die generalisierten Koordinaten p in irgend einer von der Form der Funktionen F abhängigen Weise enthalten. Falls die Funktionen F der Gleichungen 22) die Zeit nicht explizit enthalten, also, wie wir uns ausdrückten, für skleronome generalisierte Koordinaten verschwinden die β und γ und T wird eine homogene quadratische Funktion der p'.

Man bezeichnet den partiellen, d. h. bei Konstanthaltung des t, aller p und aller übrigen p' gebildeten Differentialquotienten von T nach p'_h mit q_h und nennt ihn das betreffende generalisierte Moment. Es ist also:

$$36)\qquad q_h = \frac{\partial T}{\partial p'_h} = \sum_1^s{}_k a_{hk} p'_k + \beta_h.$$

Wenn man den Verlauf der unvariierten Bewegung verfolgt, so sind allerdings sämtliche p Funktionen der Zeit allein und freilich auch der Anfangswerte, mit denen die Bewegung begonnen hat, so daß bei einem gegebenen Systeme und gegebenen Anfangswerten, wenn eines der p gegeben ist, dadurch im allgemeinen alle anderen bestimmt sind, entweder eindeutig oder mehrdeutig, manchmal freilich unendlich vieldeutig, selbst so, daß sie noch eine kontinuierlich zwischen gewissen Grenzen liegende Mannigfaltigkeit von Werten annehmen können. Die p' aber sind zudem die Differentialquotienten der entsprechenden p nach der Zeit.

In Formel 36) aber, wie auch schon früher bei Bildung aller partiellen Differentialquotienten, wird dies gar nicht berücksichtigt. Es wird für einen Augenblick T einfach als ein Ausdruck betrachtet, der in gegebener Weise aus den p und p' zusammengesetzt ist und ohne Rücksicht auf die Bedeutung der p und p' gerade so partiell differenziert wird, als ob sich jedes der p und jedes der p' unabhängig von allen anderen für sich allein beliebig ändern könnte, was z. B. dann wirklich der Fall wäre, wenn man nicht bloß die Zeit, sondern auch jeden der Anfangswerte der p und p' als beliebig veränderlich betrachten würde.

In dem speziellen Falle, daß die generalisierten Koordinaten mit den rechtwinkligen zusammenfallen, ist $p'_h = x'_h$, daher T durch den Ausdruck 14) gegeben und man hat

$$37)\qquad q_h = \frac{\partial T}{\partial x'_h} = m_h x'_h,$$

q_h ist also dann das, was wir schon im I. Teile das in der betreffenden Koordinatenrichtung geschätzte Bewegungsmoment genannt haben.

Denken wir uns in den Ausdruck für T die generalisierten Koordinaten eingeführt, so daß er die Form 35) annimmt, so folgt zunächst für jeden Zeitmoment:

$$38)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta T = \sum_1^s{}^h \frac{\partial T}{\partial p'_h}\delta p'_h + \sum_1^s{}^h \frac{\partial T}{\partial p_h}\delta p_h = \sum_1^s{}^h q_h \delta p'_h + \\ + \sum_1^s{}^h \frac{\partial T}{\partial p_h}\delta p_h. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist δp_h der Zuwachs, welchen der Wert der generalisierten Koordinaten p_h beim Übergange von dem der Zeit t entsprechenden Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung erfährt. $p_h' = \frac{d p_h}{d t}$ ist der Wert der entsprechenden generalisierten Geschwindigkeit zu dieser Zeit für die unvariierte,

$$\frac{d p_h}{d t} + \frac{d \delta p_h}{d t} = p'_h + \delta p'_h,$$

der für den korrespondierenden Zustand der variierten Bewegung. Der Zuwachs, den diese generalisierte Geschwindigkeit beim Übergang von der unvariierten zur variierten Bewegung erfährt, ist also:

$$\delta p'_h = \frac{d \delta p_h}{d t}. \tag{39}$$

Addiert man zur Gleichung 38) beiderseits den Ausdruck

$$\sum_1^s {}_h P_h \delta p_h,$$

multipliziert mit $d t$ und integriert von t_0 bis t_1, so ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_1^s {}_h P_h \delta p_h\right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} d t \sum_1^s {}_h \left[q_h \delta p'_h + \left(\frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h\right) \delta p_h\right]. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Irgend ein Glied der ersten Summe der rechten Seite dieser Gleichung hat mit Inbegriff der Integration nach t die Form

$$\int_{t_0}^{t_1} q_h \delta p'_h d t,$$

was unter Berücksichtigung der Gleichung 39) durch partielle Integration gleich

$$\left| q_h \delta p_h \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d q_h}{d t} \delta p_h d t$$

gefunden wird. Transformiert man jedes Glied der rechten Seite der Gleichung 40) in dieser Weise und vereinigt dann wieder alle diese Glieder, so folgt allgemein:

$$41)\quad \begin{cases} \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\delta T + \sum\limits_1^s {}_h P_h \delta p_h\right) dt = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \sum\limits_1^s {}_h \left[-\frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h\right] \delta p_h + \sum\limits_1^s {}_h q_h \delta p_h \Big|_{t_0}^{t_1}. \end{cases}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist keineswegs an die Bedingung geknüpft, daß für die Integrationsgrenzen, also für $t = t_0$ und $t = t_1$, die Variationen sämtlicher Koordinaten verschwinden. Wenn dies jedoch der Fall ist, wenn also für $t = t_0$ und $t = t_1$ sämtliche δp verschwinden, so verschwindet das letzte Glied der rechten Seite der Gleichung 41). Andererseits aber verschwindet in diesem Falle auch die linke Seite dieser Gleichung gemäß der Gleichung 30) und es folgt somit in diesem speziellen Falle:

$$42)\quad \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum\limits_1^s {}_h \left(-\frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h\right) \delta p_h \, dt = 0.$$

§ 7. Erste Form der Lagrangeschen Bewegungsgleichung

Wenn zwischen den p keine Bedingungsgleichungen bestehen, so sind in Gleichung 42) sämtliche δp voneinander unabhängig und man kann aus der Allgemeingültigkeit dieser Gleichung leicht beweisen, daß alle Koeffizienten aller δp für alle Zeiten verschwinden müssen. Denn würde der Koeffizient irgend eines der δp, z. B. der von δp_h, nicht für alle Zeiten verschwinden, so könnte man für alle Zeiten, für welche er positiv ist, auch δp_h positiv, für alle, für welche er negativ ist, auch δp_h negativ, dagegen alle anderen δp gleich Null wählen. Die linke Seite der Gleichung 42) wäre dann notwendig positiv und könnte nicht verschwinden, was mit dem eben Bewiesenen in Widerspruch steht. Man hat also zu allen Zeiten und, wenn alle Funktionen kontinuierlich sind, auch beliebig nahe an t_0 und t_1:

$$43)\quad \frac{d q_h}{d t} - \frac{\partial T}{\partial p_h} = P_h, \quad h = 1, 2, 3 \ldots s.$$

Die Zahl s der generalisierten Koordinaten kann nicht kleiner sein, als die Zahl $i = 3n - \tau$ der Freiheiten des Systems, weil sonst eine Bestimmung der Lage sämtlicher Punkte des Systems durch die generalisierten Koordinaten unmöglich wäre. Ist $s = i$, so tritt der eben betrachtete Fall ein, daß zwischen den generalisierten Koordinaten keinerlei Bedingungsgleichungen bestehen. Die generalisierten Koordinaten werden aber nur dann holonom sein können, wenn das System selbst ein holonomes ist. Ist dagegen $s > i$, so bleiben zwischen den generalisierten Koordinaten noch $\sigma = s - i = s - 3n + \tau$ Bedingungsgleichungen übrig.

Beim Gebrauche rechtwinkliger Koordinaten hatte die l-te Bedingungsgleichung die Form 2). Führen wir vermöge der Gleichungen 22) und 27) die generalisierten Koordinaten ein, so nimmt diese Bedingungsgleichung die Form an

44) $$\pi^l\,dt + \sum_1^s{}_h\, \pi_h^l\, dp_h = 0,$$

wobei

44a) $$\pi^l = \xi^l + \sum_1^{3n}{}_k\, \xi_k^l \frac{\partial x_k}{\partial t}, \qquad \pi_h^l = \sum_1^{3n}{}_k\, \xi_k^l \frac{\partial x_k}{\partial p_h}.$$

Bei Bildung der partiellen Differentialquotienten der x sind diese natürlich vermöge der Gleichungen 22) als Funktionen von t und den p zu betrachten. Wenn eine Bedingungsgleichung von den generalisierten Koordinaten identisch erfüllt wird, so müssen für dieselbe sämtliche π identisch verschwinden.

Die der Bedingung 44) entsprechende Bedingungsgleichung für den Übergang von einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustand der variierten Bewegung aber wird, falls nicht alle π verschwinden und sie daher identisch erfüllt ist, lauten:

45) $$\sum_1^s{}_h\, \pi_h^l\, \delta p_h = 0.$$

Die π sind natürlich jetzt Funktionen der generalisierten Koordinaten, welche auch die Zeit explizit enthalten können. Letzteres wird jedoch niemals der Fall sein, wenn die früher mit F und $\mathfrak{F}$ bezeichneten Funktionen die Zeit nicht explizit enthielten.

Bei der in der Anmerkung auf Seite 5 § 1 angedeuteten Variationsmethode, bei welcher die korrespondierenden Zustände nicht gleichen Zeiten entsprechen und daher auch die Zeit variiert wird, welche wir aber vorläufig nirgends anwenden werden, müßten an Stelle der Gleichungen 45) die Gleichungen treten:

46) $$\pi^l \delta t + \sum_1^s {}_h \pi_h^l \delta p_h = 0 .$$

Falls das System holonom ist, werden auch die Bedingungsgleichungen 44) holonom sein, d. h. sich auf σ Gleichungen von der Form

47) $$d\varphi(p_1, p_2 \ldots p_s, t) = 0$$

reduzieren lassen. Wenn dagegen das System inholonom vom Grade g ist, so müssen g von den Gleichungen 44) übrig bleiben, die sich nicht auf diese Form bringen lassen.

Im ersten Falle haben die Bedingungen, welche für den Übergang vom unvariierten zum variierten Zustande gelten, ebenfalls die Form

48) $$\delta\varphi(p_1, p_2 \ldots p_s, t) = 0$$

und es kommt ihnen eine überaus einfache Bedeutung zu. Diese Gleichungen besagen nämlich, daß die Funktion φ beim Übergange von jedem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung ebenfalls denselben konstanten Wert behalten muß, der ihr auch für die ganze unvariierte Bewegung zukommt, daß also auch während der ganzen variierten Bewegung diese Funktion jenen konstanten Wert haben muß, oder mit anderen Worten, daß auch die variierte Bewegung aus lauter Lagen bestehen muß, welche mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sind, d. h. selbst mit diesen vereinbar sein muß.

Wenn die Bedingungen in der Form gegeben sind: $\varphi =$

einer gegebenen Konstanten, so ist dieser Satz selbstverständlich umkehrbar, d. h. jedesmal wenn die variierte Bewegung in ihrem Verlaufe den Bedingungen genügt, muß ihnen auch jeder Übergang von einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung genügen. Sind dagegen die Bedingungen bloß in der Form 47) gegeben, so könnte im Verlaufe der variierten Bewegung φ gleich einer Konstanten sein, deren Wert von dem für die unvariierte Bewegung geltenden etwas verschieden wäre. Dann könnte der Verlauf der unvariierten Bewegung den Bedingungen genügen und auch der der variierten für sich, nicht aber der Übergang von der einen zur anderen. Doch ist diese Möglichkeit sofort wieder ausgeschlossen, wenn die Koordinaten für $t = t_0$ und $t = t_1$ nicht variieren.

Die Bedeutung, welche den Variationsbedingungen im zweiten Falle, wenn das System inholonom ist, zukommt, wollen wir im nächsten Paragraphen erörtern. Hier wollen wir zunächst zeigen, wie die Gleichung 42) zu behandeln ist, wenn beliebige Bedingungsgleichungen zwischen den p gegeben sind, deren Anzahl σ sei. Wir setzen voraus, daß jede derselben in die Form 44) gebracht werden kann, welcher zwischen den Koordinatenvariationen die Bedingung 45) entspricht. Wir multiplizieren die Gleichung 45) mit einem zu bestimmenden Faktor λ_l, welcher Funktion der Koordinaten und der Zeit sein kann, summieren dann bezüglich l von 1 bis σ, multiplizieren ferner mit dt, integrieren von $t = t_0$ bis $t = t_1$ und addieren endlich das Resultat zur linken Seite der Gleichung 42).

Die λ können dann so bestimmt werden, daß in der auf diese Art erhaltenen Gleichung die Koeffizienten von σ der δp verschwinden. Die übrigen δp sind aber unabhängig und man beweist durch dieselbe Schlußweise, durch welche wir die Gleichungen 43) erhielten, daß auch ihre Koeffizienten verschwinden müssen. Die Nullsetzung aller dieser Koeffizienten liefert die Gleichungen:

$$49)\qquad \frac{dq_h}{dt} - \frac{\partial T}{\partial p_h} = P_h + \sum_1^{\sigma} \lambda_l \pi_h^{(l)}, \qquad h = 1, 2, 3 \ldots s.$$

Dies sind die allgemeinen von Lagrange zuerst angegebenen Bewegungsgleichungen in generalisierten Koordinaten. Falls eine Kraftfunktion existiert, nehmen sie die Form an

$$\frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial (T - V)}{\partial p_h} + \sum_1^{\sigma} \iota \lambda_\iota \pi_h^{(\iota)}, \tag{50}$$

während man in diesem Falle auch schreiben kann

$$q_h = \frac{\partial (T - V)}{\partial p'_h}, \tag{51}$$

wenn V die Geschwindigkeiten nicht enthält.

§ 8. Bedeutung der Variationsbedingungen für nicht holonome Systeme.

Wir gehen nun zur Erläuterung der Bedeutung über, welche die Variationsbedingungen für nicht holonome Systeme haben. In diesem Falle ist es durchaus nicht ein- und dasselbe, ob man sagt, der Verlauf der variierten oder der Übergang von der unvariierten zur variierten Bewegung solle die Bedingungsgleichungen erfüllen. Da nämlich dann gewisse Bedingungsgleichungen nicht integrabel sind, so brauchen sie, wenn sie von einem bestimmten Übergange aus einem Anfangszustande Z_1 in einen Zustand Z_2, und wiederum von einem Übergange aus dem Zustande Z_2 in einen Zustand Z_3 gelten, nicht auch von jedem anderen Übergange aus dem Zustande Z_1 in den Zustand Z_3 zu gelten. Daraus also, daß diese Bedingungsgleichungen für jeden Übergang aus einem Zustande der unvariierten Bewegung in den korrespondierenden Zustand der variierten Bewegung gelten (Übergang A), folgt dann nicht, daß sie auch für den Übergang von jedem zum nächsten Zustande der variierten Bewegung gelten (Übergang B).

Beim Übergange B gehen die Werte, welche die Koordinaten bei der variierten Bewegung zur Zeit t haben (h-te Koordinate $= p_h + \delta p_h$), in diejenigen über, welche sie für die variierte Bewegung zur Zeit $t + dt$ haben (h-te

Koordinate $= p_h + \delta p_h + dp_h + d\,\delta p_h$). Wir können daher die Form, welche die Gleichung 44) für diesen Übergang annimmt, symbolisch so schreiben:

$$dt\,\pi^l(p_h + \delta p_h, t) + \sum_1^s{}_h (dp_h + d\,\delta p_h) \,.\, \pi_h^l(p_h + \delta p_h, t) = 0,$$

was durch Subtraktion der Gleichung 44) liefert:

$$52)\quad \begin{cases} \delta\left[\pi^l dt + \sum_1^s{}_k \pi_k^{(l)}(p_h, t)\, dp_k\right] = \sum_1^s{}_k \frac{\partial \pi^{(l)}}{\partial p_k}\,\delta p_k\, dt + \\ \qquad + \sum_1^s{}_h \sum_1^s{}_k \frac{\partial \pi_h^{(l)}}{\partial p_k}\, dp_h\, \delta p_k + \sum_1^s{}_k \pi_k^{(l)}\, d\,\delta p_k = 0\,. \end{cases}$$

Gleichung 45) drückt aus, daß die entsprechende Bedingung für den Übergang A zur Zeit t gilt, d. h. für den Übergang vom ursprünglichen Zustande zur Zeit t zum variierten zur selben Zeit. Die Gleichung, welche ausdrückt, daß dieselbe Bedingung auch zur Zeit $t + dt$ für Übergang A erfüllt ist, d. h. für den Übergang aus dem der Zeit $t + dt$ entsprechenden ursprünglichen Zustande zu dem derselben Zeit entsprechenden variierten Zustande, finden wir, indem wir Gleichung 45), in welcher wir den Summationsbuchstaben auch mit k bezeichnen können, nach t differenzieren, wodurch folgt:

$$53)\quad \begin{cases} d \sum_1^s{}_k \pi_k^{(l)}\,\delta p_k = \sum_1^s{}_k \frac{\partial \pi_k^{(l)}}{\partial t}\, dt\, \delta p_k + \\ \qquad + \sum_1^s{}_k \sum_1^s{}_h \frac{\partial \pi_k^{(l)}}{\partial p_h}\,\delta p_k\, dp_h + \sum_1^s{}_k \pi_k^{(l)}\, d\,\delta p_k = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung 53) ist sicher mit 52) identisch, wenn allgemein

$$\frac{\partial \pi^{(l)}}{\partial p_h} = \frac{\partial \pi_h^l}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \pi_h^{(l)}}{\partial p_k} = \frac{\partial \pi_k^{(l)}}{\partial p_h}$$

ist, d. h. wenn die Bedingung holonom ist. Andernfalls sind beide Gleichungen im allgemeinen nicht identisch. Wenn

also auch der Übergang von jedem Zustande der unvariierten zum entsprechenden Zustande der variierten Bewegung den Bedingungsgleichungen entsprechend geschieht, so folgt daraus noch nicht, daß auch die Reihenfolge aller variierten Zustände eine den Bewegungsgleichungen entsprechende Bewegung liefert.

Besonders auffallend tritt dies hervor, wenn man von dem variierten Zustande wieder zu einem neuen variierten Zustande etc. übergeht, bis man schließlich zu einer variierten Bewegung gelangt, welche um endliches von der ursprünglichen Bewegung, welche wir die unvariierte nannten, verschieden ist. Wenn dann auch jeder Übergang von jedem Zustande irgend einer der variierten Bewegungen zum korrespondierenden Zustande der nächstfolgenden variierten Bewegung den Bedingungsgleichungen gemäß erfolgt, so kann doch die Reihenfolge der Zustände, zu welcher man ganz zuletzt gelangt ist, eine Bewegung bilden, welche die Bewegungsgleichungen nicht mehr im entferntesten erfüllt.

Wenn z. B. das System eine Kugel ist, so ist die Bedingung, daß sie auf einer festen Fläche rollen muß, eine nicht holonome, wird also durch eine nicht integrable Gleichung von der Form 44), die aber weder die Zeit noch deren Differential enthält, dargestellt. Die Bedingung für die Richtigkeit der Gleichung 42) ist dann, daß der Übergang von jedem Zustande der unvariierten zu dem korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung durch Rollen auf dieser Fläche geschieht. Hieraus und aus dem Umstande, daß die unvariierte Bewegung ein Rollen auf derselben Fläche ist, folgt aber noch keineswegs, daß auch die durch die Reihenfolge der variierten Lagen dargestellte Bewegung wieder ein Rollen auf dieser Fläche ist.[1])

Bei holonomen Systemen können wir die Bedingungen, denen die variierte Bewegung genügen muß, in einem Satze aussprechen, in dem gar nicht davon die Rede ist, welchem Zustande der unvariierten Bewegung man jeden Zustand der variierten Bewegung korrespondieren läßt, in-

---

[1]) Vergl. Hölder, Gött. Nachr. 1896, Heft 2, S. 122.

dem wir bloß sagen, die variierte Bewegung muß als solche ganz unabhängig von der unvariierten den Bedingungsgleichungen genügen. Die Bedingungen dagegen, denen bei nicht holonomen Systemen die variierte Bewegung genügen muß, scheint ihrer Formulierung nach davon abhängig zu sein, welchen Zustand der variierten Bewegung man bei Bildung der δp mit einem jeden Zustande der unvariierten Bewegung vergleicht (ihm korrespondieren läßt), da wir sagten, die variierte Bewegung muß so geschehen, daß der Übergang von jedem Zustande der unvariierten Bewegung zu dem korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung den Bedingungsgleichungen genügt. Wir wollen dies kurz die Hölder sche Art der Variation nennen.

Es kann also die Frage aufgeworfen werden, ob eine bestimmte, dieser Bedingung genügende variierte Bewegung nicht aufhört, ihr zu genügen, wenn man nichts anderes verändert, als daß man mit jedem Zustande der unvariierten Bewegung nicht denselben Zustand der variierten Bewegung wie früher, sondern einen zu einer unendlich wenig verschiedenen Zeit gehörigen Zustand der variierten Bewegung korrespondieren läßt. Es muß dann, wenn man von der unvariierten Bewegung nach der Hölderschen Variationsart zu einer ersten variierten, von dieser wieder nach der Hölderschen Variationsart zu einer zweiten, dann zu einer dritten u. s. f. übergeht, bis man zu einer um endliches verschiedenen Bewegungsart gelangt, diese, die zwar den Bedingungen der Aufgabe im allgemeinen gar nicht mehr genügen wird, doch eine gewisse charakteristische Eigenschaft haben, welche zum Ausdruck bringt, daß sie durch lauter Variationen nach der Hölderschen Art aus einer den Bedingungen der Aufgabe genügenden Bewegung entstanden ist.

Daß in der Tat das charakteristische Merkmal der Hölderschen Variationsart nicht gestört wird, wenn man unter Beibehaltung derselben variierten Bewegung bloß jeden Zustand derselben einem etwas anderen Zustande der unvariierten Bewegung korrespondieren läßt, sieht man in der folgenden Weise: Wenn früher der Zustand B

der variierten Bewegung dem zur Zeit t gehörigen Zustande A der unvariierten Bewegung, jetzt dem zur Zeit $t + \delta t$ gehörigen Zustande A_1 der unvariierten Bewegung korrespondiert, so möge δp die frühere, $\delta_1 p$ die jetzige Variation irgend einer Koordinate p, dagegen dp der Zuwachs sein, welchen diese Koordinate bei der unvariierten Bewegung beim Übergang vom Zustande A zum Zustande A_1, also bei der natürlichen Bewegung während der Zeit δt erfährt, so daß $dp = p' \delta t$ ist. Es ist dann $\delta_1 p = \delta p - dp$, und da die Bedingungsgleichungen die dp linear enthalten, so müssen ihnen auch die $\delta_1 p$ genügen, wenn ihnen die δp genügen. Denn die dp genügen ihnen, weil sie einer natürlichen, also einer jedenfalls möglichen Bewegung entsprechen.

§ 9. Zweite Form der Lagrangeschen Gleichungen.

Wir können die Gleichung 49) in eine andere Form bringen, wenn wir statt der verallgemeinerten Geschwindigkeiten p' die Momente q einführen, wobei wir uns aber auf den Fall beschränken wollen, daß die Funktionen F der Gleichungen 22) die Zeit nicht explizit enthalten, daß also die mit β und γ bezeichneten Koeffizienten im Ausdruck für T verschwinden (daß die verallgemeinerten Koordinaten skleronom sind). Die Relationen 36), welche uns die q als Funktionen der p' ausdrücken, können, wenn man die Koeffizienten a als gegeben betrachtet, auch als s lineare Gleichungen aufgefaßt werden, aus denen umgekehrt die p' als lineare Funktionen der q bestimmt werden können. Die betreffenden Gleichungen lauten dann so:

$$54)\qquad p'_h = \sum_1^s {}_k\, b_{hk}\, q_k .$$

Die Koeffizienten a sind Funktionen der p, welche wir vermöge der Gleichungen 14), 22), 33) und 35) leicht berechnen können, wenn die Massen der materiellen Punkte und die Funktionen F gegeben sind. Daher sind auch die b Funktionen der p, die sich in bekannter Weise als Quotienten zweier die a enthaltender Determinanten darstellen. Die Determinante im Nenner ist für alle p' gleich, die im Zähler

ist wegen $a_{hk} = a_{kh}$ ebenfalls für b_{hk} dieselbe wie für b_{kh}, woraus folgt:

55) $$b_{hk} = b_{kh}.$$

Die Auflösung der linearen Gleichungen 36) nach den q wäre nur dann unmöglich, wenn die Determinante aller a

56) $$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1s} \\ a_{12}, a_{22} \dots a_{2s} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1s}, a_{2s}, \dots a_{ss} \end{vmatrix}$$

verschwinden würde. Dies kann aber niemals für reelle Werte eintreten. T ist nämlich gleich $\frac{1}{2}\sum_{1}^{3n} {}^k m_k x_k'^2$, also eine Summe von Quadraten mit positiven Koeffizienten. Es kann also nur verschwinden, wenn alle x' und daher auch alle p' verschwinden. Das Verschwinden der Determinante 56) ist aber die Bedingung, daß die linearen Gleichungen für die p', welche man erhält, wenn man alle q gleich Null setzt, eine andere Auflösung als das Verschwinden sämtlicher p' zulassen. Würde also diese Determinante 56) verschwinden, so würden aus den Gleichungen 36) immer gewisse Werte der p' bestimmbar sein, welche nicht alle verschwinden, für welche aber alle q und daher auch T verschwinden würden, da ja, wie man sofort durch Einsetzen der Werte 36) für die q sieht,

57) $$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{s} {}^k p'_k q_k$$

ist. Die Gleichung 57) ergibt sich auch in folgender Weise. Wenn f eine homogene Funktion n-ten Grades von $y_1, y_2 \dots y_m$ ist, so hat man bekanntlich:

$$n f = \sum_{1}^{m} {}^k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k}.$$

Setzt man $f = T$, $y_k = p'_k$, so folgt hieraus sofort die Gleichung 57), da T, wenn die Funktionen F die Zeit nicht explizit enthalten, eine homogene quadratische Funktion der p' und $\partial T / \partial p'_k = q_k$ ist. In den in 43) und 49) vorkommenden Größen $\partial T / \partial p_h$ ist T durch die Gleichung 35)

als Funktion von den p und p' ausgedrückt zu denken, d. h. es sind bei der Differentiation alle übrigen p und alle p' als konstant zu betrachten. Wir können aber in T die p' vermöge der Gleichungen 54) als Funktionen der p und q ausdrücken. Dann erhalten wir T als Funktion der p und q ausgedrückt. Weil es homogene quadratische Funktion der p' war, diese aber wieder homogene lineare Funktionen der q sind, so wird T auch als homogene quadratische Funktion der q erscheinen. Es sei etwa:

$$58)\quad T=\frac{1}{2}\sum_1^s{}^h\sum_1^s{}^k c_{hk}q_hq_k=\frac{1}{2}c_{11}q_1^2+\frac{1}{2}c_{22}q_2^2+\cdots+c_{12}q_1q_2+\cdots$$

Die Koeffizienten c sind natürlich Funktionen der p und es ist identisch $c_{hk}=c_{kh}$.

Den aus diesem Ausdrucke gebildeten partiellen Differentialquotienten von T nach p_h, wobei also nebst der anderen p nicht die p', sondern die q als konstant zu betrachten sind, wollen wir mit

$$\frac{\partial_q T}{\partial p_h}$$

bezeichnen. Wir werden ihn erhalten, wenn wir zuerst T als Funktion von p und p' ausdrücken und darin die p' vermöge der Gleichungen 54) als Funktionen der p und q betrachten. Es ist also:

$$59)\quad \frac{\partial_q T}{\partial p_h}=\frac{\partial_{p'} T}{\partial p_h}+\sum_1^s{}^k\frac{\partial T}{\partial p'_k}\,\frac{\partial p'_k}{\partial p_h}=\frac{\partial_{p'} T}{\partial p_h}+\sum_1^s{}^k q_k\frac{\partial p'_k}{\partial p_h}\,.$$

$\partial_{p'} T/\partial p_h$ ist die im ursprünglichen Sinne gebildete partielle Ableitung, wo T als Funktion der p und p' zu denken und unter Konstanthaltung der p' nur insofern nach p_h zu differenzieren ist, als diese Größe in den Koeffizienten a der Formel 35) vorkommt. $\partial p'_k/\partial p_k$ ist aber aus Formel 54) unter Konstanthaltung der q und alleinigen Differentiation der Koeffizienten b nach p_h zu bilden.

Bei Bildung von $\partial T/\partial p'_k$ ist es selbstverständlich, daß die übrigen p' und die p als konstant anzusehen sind, weshalb wir dem ∂ nicht den Index p' anhängten. Wie wir den Ausdruck 59) bildeten, so können wir auch den partiellen

Differentialquotienten von T nach q_h bilden, indem wir zuerst T als Funktion von p und p' ausdrücken und dann die p' durch die Gleichungen 54) durch p und q ausdrücken, wo dann bei Bildung der $\partial p' / \partial q$ die anderen q und die p als konstant zu betrachten sind. Es wird also:

$$60) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial q_h}[1] = \sum_1^s k \frac{\partial T}{\partial p'_k} \frac{\partial p'_k}{\partial q_h} = \sum_1^s k \, q_k \frac{\partial p'_k}{\partial q_h} = \\ \qquad = \sum_1^s k \, q_k b_{kh} = p'_h = \frac{d p_h}{d t}. \end{cases}$$

Andererseits folgt aus Gleichung 58):

$$61) \quad \frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_1^s k \, c_{hk} q_k .$$

Da dies nach Gleichung 60) gleich dem durch Gleichung 54) gegebenen Werte von p'_h sein muß, und die Geschwindigkeiten und daher auch die q unabhängig von den Koordinaten alle möglichen Werte haben können, so müssen in 54) und 61) alle Koeffizienten der q gleich sein; man hat also allgemein:

$$62) \quad b_{hk} = c_{hk} .$$

Die partiellen Differentialquotienten der p' können wir folgendermaßen eliminieren. Wir denken uns in Gleichung 57) die p'_k vermöge der Gleichungen 54) als Funktionen der p und q ausgedrückt und dann nach p_h differenziert, indem wir die übrigen p und alle q konstant betrachten. Der Differentialquotient des T, den wir so links erhalten, ist genau das, was wir schon in 59) mit $\partial_q T / \partial p_h$ bezeichneten; ebenso ist rechts der Differentialquotient des p'_k das, was wir in der rechten Seite von 59) mit $\partial p'_k / \partial p_h$ bezeichneten. Wir erhalten also, indem wir 57) in der besprochenen Weise nach p_h partiell differenzieren

---

[1]) Wir unterlassen es wieder, in diesem Ausdrucke dem ∂ im Zähler den Index q anzuhängen, da es, wenn wir nach einem der q partiell differenzieren, selbstverständlich ist, daß wir alle übrigen q und alle p als konstant anzusehen haben.

$$2\frac{\partial_q T}{\partial p_h} = \sum_1^s {}^k q_k \frac{\partial p'_k}{\partial p_h},$$

was mit 59) zusammengehalten liefert:

63) $$\frac{\partial_{p'} T}{\partial p_h} = -\frac{\partial_q T}{\partial p_h}.$$

Wenn wir 57) genau in demselben Sinne, in dem wir es soeben nach p_h differenzierten, nun nach q_h differenzieren, so müssen wir alle übrigen q_k und alle p_k konstant lassen und die p' durch die p_h und q_h ausgedrückt denken. Die Summe rechts in 57) enthält offenbar das Glied $q_h p'_h$, welches nach q_h differenziert liefert

$$p'_h + q_h \frac{\partial p'_h}{\partial q_h},$$

während in allen anderen Gliedern dieser Summe das betreffende q als konstant zu betrachten ist. Mit Rücksicht hierauf erhält man aus 57)

$$2\frac{\partial T}{\partial q_h} = p'_h + \sum_1^s {}^k q_k \frac{\partial p'_k}{\partial q_h} = 2p'_h,$$

was mit Gleichung 60) übereinstimmt.

Will man in der von uns gewählten Bezeichnungsweise ausdrücken, daß in den Gleichungen 43), 49) und 50) bei Bildung der partiellen Differentialquotienten die p und p' als independent zu betrachten sind, so müßte man diese Gleichungen so schreiben:

64) $$\frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial_{p'} T}{\partial p_h} + P_h$$

und

65) $$\frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial_{p'} T}{\partial p_h} + P_h + \sum_1^\sigma {}^l \lambda_l \pi_{(h)}^{(l)}.$$

Würde man dagegen p und q bei Bildung der partiellen Differentialquotienten als independent betrachten, so würde hieraus nach 63) folgen:

66) $$\frac{dq_h}{dt} = + P_h - \frac{\partial_q T}{\partial p_h}$$

und

$$67)\qquad \frac{dq_h}{dt} = P_h - \frac{\partial_q T}{\partial p_h} + \sum_1^\sigma {}^l \lambda_l \pi_h^{(l)}.$$

Natürlich wird man die Indizes des ∂ weglassen, wenn man ein für allemal ausgemacht hat, welche partielle Differentialquotienten man meint.

Wenn die Kräfte eine Kraftfunktion haben, die nur die Koordinaten, eventuell noch die Zeit enthält, so verwandelt sich die Gleichung 67) in:

$$68)\qquad \frac{dq_h}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial p_h} - \frac{\partial_q T}{\partial p_h} + \sum_1^\sigma {}^l \lambda_l \pi_h^{(l)}.$$

Da aber V die q nicht enthält, so kann man die Gleichung 68) auch so schreiben:

$$69)\qquad \frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial_q(T+V)}{\partial p_h} = \sum_1^\sigma {}^l \lambda_l \pi_h^l.$$

Setzt man nun

$$70)\qquad E = T + V,$$

so ist E die Größe, welche, wenn V die Zeit nicht enthält, während der ganzen Bewegung konstant bleiben muß. Man kann dann die Bewegungsgleichungen in der symmetrischen Form

$$71)\qquad \frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_h} + \sum_1^\sigma {}^l \lambda_l \pi_h^{(l)}$$

schreiben, welche man die Hamiltonsche kanonische Form derselben nennt. Wenn nebst den Bedingungsgleichungen die einzige Größe E als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten, Momente und eventuell der Zeit gegeben ist, können die Bewegungsgleichungen ohne weiteres hingeschrieben werden. Falls keine Bedingungsgleichungen zwischen den p existieren, nehmen die Gleichungen 71) die symmetrische Form an:

$$72)\qquad \frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_h}.$$

Setzt man analog

$$73)\qquad T - V = H,$$

so erhalten die Gleichungen 64) und 65) eine ähnliche Form, nämlich:

$$74)\qquad \frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h} + \sum_1^{\sigma}{}^{l} \lambda_l \pi_h^{(l)}, \qquad q_h = \frac{\partial H}{\partial p'_h},$$

wobei natürlich wieder das Glied $\sum_1^{\sigma}{}^{l} \lambda_l \pi_h^{(l)}$ entfällt, wenn zwischen den p keine Bedingungen bestehen.

§ 10. Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen ohne Hilfe der Variationsrechnung.

Wir wollen noch zeigen, wie man die Lagrangeschen Gleichungen ohne den Umweg über die Betrachtung der Variationen gewinnen kann, wobei aber natürlich die generalisierten Koordinaten jetzt wieder skleronom oder rheonom sein können. Die allgemeinen Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten können wir nach Gleichung 129) des I. Teiles, § 43 in der Form schreiben:

$$75)\qquad m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} = X_k + \sum_1^{\tau}{}^{l} \lambda_l \xi_k^{(l)}.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\frac{\partial x_k}{\partial p_h}$, bilden sie für alle Werte des k und addieren alle so erhaltenen Gleichungen. Setzen wir wie früher

$$P_h = \sum_1^{3n}{}^{k} X_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h},$$

so erhalten wir in dieser Weise mit Rücksicht auf die Gleichungen 44a)

$$76)\qquad \sum_1^{3n}{}^{k} m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = P_h + \sum_1^{\sigma}{}^{l} \lambda_l \pi_h^{(l)},$$

wobei der Summenausdruck rechts verschwindet, wenn die

generalisierten Koordinaten die betreffende Bedingung identisch erfüllen. Nun ist identisch:

$$77)\qquad \frac{d^2 x_k}{d t^2}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{d}{d t}\left[x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right] - x'_k \frac{d}{d t}\frac{\partial x_k}{\partial p_h}.$$

Im zweiten Faktor des letzten Gliedes kann man die Ordnung der Differentiation vertauschen. Denn es ist

$$\frac{d}{d t}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \sum_1^s {}^l \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial p_l} p'_l + \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial t}$$

$$x'_k = \sum_1^s {}^l \frac{\partial x_k}{\partial p_l} p'_l + \frac{\partial x_k}{\partial t},$$

daher

$$\frac{\partial x'_k}{\partial p_h} = \sum_1^s {}^l \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial p_l} p'_l + \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial t}$$

und

$$\frac{d}{d t}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{\partial x'_k}{\partial p_l},$$

wo bei der letzten partiellen Differentiation in x'_k alle p' und alle anderen p als konstant, also die Variablen p und p' als independent zu betrachten sind. Bei gleicher Auffassung der partiellen Differentialquotienten hatten wir nach 34):

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{\partial x'_k}{\partial p'_h}.$$

Durch Substitution dieser Werte geht 77) über in:

$$\frac{d^2 x_k}{d t^2}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{d}{d t}\left(x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p'_h}\right) - x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p_h}.$$

Multipliziert man mit m_k und summiert über alle Werte des k, so erhält man, da

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^{3n} {}^k m_k x'^2_k = T,$$

also

$$\sum_1^{3n} m_k x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p'_h} = \frac{\partial T}{\partial p'_h} = q_h$$

ist,

$$\sum_1^{3n} {}^k m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{d q_h}{d t} - \frac{\partial T}{\partial p_h}.$$

Durch Substitution dieses Wertes in die Gleichung 76) folgt:

$$\frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h + \sum_1^r \lambda_l \varkappa_h^{(l)}.$$

Wir sind also ohne Variationsbetrachtungen zur Gleichung 49) gelangt, welche die allgemeinste Form der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen darstellt. Für jede Bedingungsgleichung, welche von den generalisierten Koordinaten identisch erfüllt wird, verschwinden sämtliche $\varkappa$. Wenn also alle Bedingungsgleichungen von den generalisierten Koordinaten identisch erfüllt werden, also zwischen den letzteren keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen, so verschwinden überhaupt alle π, und es folgt

$$\frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h,$$

was mit Gleichung 43) identisch ist.

§ 11. Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten.

Wir wollen zunächst die Anwendung der gefundenen Gleichungen an einigen möglichst einfach gewählten Beispielen zeigen.

Ein einziger materieller Punkt bewege sich in einer Ebene, ohne sonst einer Bedingung unterworfen zu sein. x, y seien seine rechtwinkligen, r, ϑ seine Polarkoordinaten. Letztere wählen wir als generalisierte Koordinaten. Wir setzen also:

$$p_1 = r, \quad p_2 = \vartheta, \quad p'_1 = r' = \frac{d r}{d t}, \quad p'_2 = \vartheta' = \frac{d \vartheta}{d t}.$$

Da $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ ist, so kann man durch direkte Differentiation nach der Zeit die ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit finden:

$$\frac{d x}{d t} = \frac{d r}{d t} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{d \vartheta}{d t} \quad \text{etc.}$$

Die Substitution dieser Werte in die die rechtwinkligen Koordinaten enthaltenden Bewegungsgleichungen (§ 9 Gleichung 13) des I. Teiles) liefert uns ohne weiteres die Form, welche die Bewegungsgleichungen nach Einführung der Polar-

koordinaten annehmen. Wir wollen jedoch hierzu mittels der Lagrangeschen Gleichungen gelangen, die uns in diesem Falle keinen anderen Nutzen gewähren, als daß sie die etwas weitläufige Rechnung abkürzen.

Wir suchen zuerst nach 32) die generalisierten Kräfte. r wachse bei konstantem ϑ um δr, d. h. der Punkt verschiebe sich um

78) $$AB = \delta r$$

in der Richtung r. Ist R die in dieser Richtung darauf wirkende äußere Kraft, so ist $-\delta_r'' V = R\delta r$ die Arbeit, daher

$$P_1 = \frac{-\delta_r'' V}{\delta r} = R$$

die nach r wirkende generalisierte Kraft. Wächst dagegen ϑ bei konstantem r um $\delta\vartheta$, so erfährt der Punkt die Verschiebung

79) $$AC = r\delta\vartheta$$

senkrecht zu r in der Richtung der wachsenden ϑ. Ist Θ die Komponente der darauf wirkenden äußeren Kraft in dieser Richtung, so ist $-\delta_\vartheta'' V = \Theta . r\delta\vartheta$ die Arbeit; daher

$$P_2 = r\Theta$$

die nach ϑ wirkende generalisierte Kraft, welche keine Kraft im gewöhnlichen Sinne, sondern ein Moment ist, also die Dimension Kraft $\times$ Länge hat.

Während dt wächst gleichzeitig r um dr und ϑ um $d\vartheta$. Das Bewegliche legt also nach 78) und 79) in der Richtung r den Weg $AB = dr$, senkrecht darauf den Weg $AC = rd\vartheta$, im ganzen den Weg $AD = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}$ zurück. Seine Geschwindigkeit ist

$$\frac{AD}{dt} = \sqrt{r'^2 + r^2\vartheta'^2},$$

seine lebendige Kraft

80) $$T = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\vartheta'^2),$$

welche somit als Funktion der p und p' ausgedrückt ist. Man erhält hieraus

81) $$q_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = mr', \qquad q_2 = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = mr^2\vartheta',$$

82) $$\frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{\partial T}{\partial r} = m r \vartheta'^2, \quad \frac{\partial T}{\partial p_2} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0.$$

Daher liefern die Gleichungen 43):

$$\frac{d(m r')}{dt} - m r \vartheta'^2 = R, \quad \frac{d(m r^2 \vartheta')}{dt} = r\Theta$$

oder

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} - m r \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = R, \quad m r \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2m\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} = \Theta.$$

Wollte man den Gleichungen die Form 66) geben, so müßte man T durch die p und q ausdrücken.

Aus 80) und 81) folgt:

83) $$T = \frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2mr^2},$$

und daher:

$$\frac{\partial_q T}{\partial r} = -\frac{q_2}{m r^3}, \quad \frac{\partial_q T}{\partial \vartheta} = 0.$$

Es sind also die Gleichungen 63) erfüllt. Durch Substitution des Wertes von q_2 wird

$$\frac{\partial_q T}{\partial r} = -\frac{\partial_{p'} T}{\partial r};$$

denn die partiellen Differentialquotienten in 81) sind diejenigen, die wir genauer mit $\partial_{p'} T/\partial r$ und $\partial_{p'} T/\partial \vartheta$ bezeichnet haben. Auch die Gleichungen 60) sind erfüllt; denn es folgt aus 83):

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{q_1}{m} = r', \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{q_2}{m r^2} = \vartheta'.$$

Die Gleichungen 66) aber nehmen die Form an

$$\frac{dq_1}{dt} = R - \frac{q_2}{m r^3}, \quad \frac{dq_2}{dt} = r\Theta,$$

deren Richtigkeit man leicht verifiziert, deren Nutzen man freilich in diesem einfachen Falle nicht einsieht.

Ebensowenig hat es in diesem einfachen Falle einen Zweck, die Gleichungen in die kanonische Form zu bringen, was wir aber doch bloß zur Erläuterung des Mechanismus der Methode ausführen wollen, der natürlich um so klarer wird, je einfacher das Beispiel ist. Seien X, Y die Komponenten der auf den materiellen Punkt in den Koordinatenrichtungen wirkenden äußeren Kraft und

$$X = -\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y},$$

dann ist:

$$P_1 = R = -\frac{\partial V(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, t)}{\partial r} = X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta$$

$$P_2 = r\Theta = -\frac{\partial V(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, t)}{\partial\vartheta} = -rX\sin\vartheta + rY\cos\vartheta.$$

Bezeichnen wir $V(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, t)$ kurz mit $V(r, \vartheta, t)$, so ist

$$E = T + V = \frac{mr'^2}{2} + \frac{mr^2\vartheta'^2}{2} + V(r, \vartheta, t)$$

die Energie, welche für skleronome Systeme während der ganzen Bewegung konstant bleibt. Denn es ist dT gleich der von den äußeren Kräften der Masse zugeführten Arbeit

$$R\,dr + r\Theta\,d\vartheta = -dV + \frac{\partial V}{\partial t}dt.$$

Will man die kanonische Form herstellen, so hat man noch q_1 und q_2 für r' und ϑ' einzuführen, erhält also

$$E = \frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2mr^2} + V(r, \vartheta, t),$$

und die kanonische Form der Gleichungen lautet, da p_1 mit r, p_2 mit ϑ identisch ist:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_1}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial r}, \quad \frac{dq_2}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial\vartheta}.$$

Die Gleichungen 74) aber würden, wenn man $H = T - V$ setzt, lauten:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{d(mr')}{dt} = \frac{\partial H(r'\vartheta')}{\partial r}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{d(mr\vartheta')}{dt} = \frac{\partial H(r'\vartheta')}{\partial\vartheta}$$

$$q_1 = mr' = \frac{\partial H}{\partial r'}, \qquad q_2 = mr\vartheta' = \frac{\partial H}{\partial\vartheta'}.$$

Natürlich würden alle diese Gleichungen auch für beliebig viele materielle Punkte gelten, die sich frei in der Ebene bewegen, wenn man Polarkoordinaten einführt. Nur würde dann V die Koordinaten aller Punkte enthalten.

Bei Transformation räumlicher rechtwinkliger Koordinaten x, y, z in räumliche Polarkoordinaten r, ϑ, φ will ich mich kürzer fassen. Sei

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z = r\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Wächst r bei konstantem ϑ und φ um δr, so verschiebt sich der Punkt um δr in einer Richtung, die wir die Richtung von r nennen. Wächst ϑ bei konstantem r und φ um $\delta\vartheta$, so verschiebt sich der Punkt um $r\delta\vartheta$ in einer Richtung, die wir kurz die von ϑ nennen. Wächst endlich φ bei konstantem r und ϑ um $\delta\varphi$, so verschiebt sich der Punkt um $r\sin\vartheta\,\delta\varphi$ in einer Richtung, die wir die von φ nennen. Die Komponenten der auf den Punkt wirkenden äußeren Kraft in diesen drei Richtungen seien R, Θ und Φ. Die drei Verschiebungsarbeiten sind $R\delta r$, $r\Theta\delta\vartheta$ und $r\sin\vartheta.\Phi\delta\varphi$, daher die drei generalisierten Kräfte:

$$P_1 = R, \quad P_2 = r\Theta, \quad P_3 = r\sin\vartheta.\Phi.$$

Die drei Komponenten des während dt zurückgelegten Weges in den drei eben besprochenen Richtungen sind dr, $rd\vartheta$, $r\sin\vartheta.d\varphi$. Daher ist die Geschwindigkeit

$$\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2},$$

und die lebendige Kraft

$$T = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\vartheta'^2 + r^2\varphi'^2\sin^2\vartheta),$$

woraus folgt

$$q_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = mr', \quad q_2 = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = mr^2\vartheta', \quad q_3 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = mr^2\sin^2\vartheta\,\varphi'.$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr(\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta), \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = mr^2\varphi'^2\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

und die Gleichungen 43) verwandeln sich nach einigen leichten Reduktionen in:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^2\vartheta\right] = R$$

$$mr\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2m\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} - mr\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin\vartheta\cos\vartheta = \Theta$$

$$mr\sin\vartheta\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2m\sin\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} + 2mr\cos\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} = \Phi.$$

Alle weiteren Lagrange-Hamiltonschen Gleichungen liefern nichts mehr, was für dieses Problem von Wichtigkeit

wäre, und zur bloßen Einübung mag das bei den ebenen Polarkoordinaten Erbrachte genügen.

§ 12. Nochmals Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Um an einem Beispiele von der einfachsten Art zu zeigen, daß die Lagrangeschen Gleichungen auch ganz ohne Beziehung auf irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem angewendet werden können, betrachten wir nochmals den schon im I. Teile behandelten Fall der Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Wenn sich irgend ein starrer Körper während einer unendlich kleinen Zeit dt um irgend eine Achse um einen unendlich kleinen Winkel dw dreht, so beschreibt ein materieller Punkt mit der Masse m_1 desselben, der sich in der Entfernung r_1 von der Drehungsachse befindet, dabei den unendlich kleinen Kreisbogen $ds = r_1 dw$. Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes ist daher:

$$c = \frac{ds}{dt} = r_1 \frac{dw}{dt}.$$

Die lebendige Kraft desselben ist:

$$\frac{m_1}{2} r_1^2 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2.$$

Ebenso ist die lebendige Kraft eines zweiten materiellen Punktes des Körpers von der Masse m_2, der sich in der Entfernung r_2 von der Drehungsachse befindet:

$$\frac{m_2}{2} r_2^2 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2.$$

Die gesamte lebendige Kraft des Körpers ist daher, wenn man dessen Trägheitsmoment $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$ bezüglich der Drehungsachse mit K bezeichnet:

84) $$T = \frac{K}{2} \left(\frac{dw}{dt}\right)^2.$$

Es soll nun auf das Massenteilchen m_1 irgend eine Kraft P_1 wirken. Wir legen durch m_1 eine Ebene E senkrecht zur Drehungsachse, welche diese im Punkte O durchschneide, und zerlegen die Kraft P_1 in zwei Komponenten, von denen die eine D_1 die Richtung der Drehungsachse hat,

also senkrecht zur Ebene E steht, die andere Q_1 in diese Ebene fällt. n_1 sei die von O auf die Richtung von Q_1 gefällte Senkrechte. Da der Weg ds des Massenteilchens in die Ebene E fällt, so leistet die Kraft D_1 keine Arbeit. Die gesamte Arbeit der Kraft P_1 ist also gleich:

$$Q_1\, ds \cos(Q_1, ds) = Q_1\, r_1\, dw \cos(n_1, r_1) = Q_1\, n_1\, dw.$$

Nun ist aber das Produkt $Q_1 n_1$ nichts anderes als das, was wir im I. Teile, § 29 das Moment der Kraft P_1 bezüglich der Drehungsachse genannt haben. Wir wollen es mit M_1 bezeichnen. Sei P_2 irgend eine andere auf den festen Körper wirkende Kraft, und M_2 ihr Moment bezüglich der Drehungsachse, so findet man ebenso für die Arbeit dieser zweiten Kraft während der Drehung des Körpers um den unendlich kleinen Winkel dw den Wert $M_2\, dw$ etc.

Die gesamte Arbeit δA aller auf den Körper wirkenden Kräfte ist also, wenn wir jetzt den Drehungswinkel mit δw statt mit dw bezeichnen:

85) $$\delta A = \delta w \sum M = \delta w\, D_a;$$

dabei ist D_a die Summe der Drehungsmomente aller äußeren Kräfte um die Drehungsachse, wie im I. Teile, § 55.

Es hat nun gar keine Schwierigkeit, die schon im I. Teile, § 55 auf anderem Wege gewonnene Bewegungsgleichung für einen festen Körper, der keiner anderen Bewegung als einer Drehung um eine feste Achse fähig ist, nochmals aus den Lagrangeschen Gleichungen zu gewinnen. Der dort mit w bezeichnete Winkel, um den sich der Körper von seiner Anfangslage bis zur Zeit t gedreht hat, ist die einzige Variable, durch welche die Position des Körpers bereits eindeutig bestimmt ist. Dies ist also die einzige generalisierte Koordinate p. Daher ist p' gleich der Winkelgeschwindigkeit $\omega = dw/dt$.

Die generalisierte Kraft findet man nach Gleichung 32), indem man den Ausdruck 85) durch $\delta p = \delta w$ dividiert. Es ist also $P = D_a$. Die lebendige Kraft ist nach Formel 84) $T = \frac{1}{2}\omega^2 K$. Daher ist:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial w} = 0, \quad q = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial T}{\partial \omega} = \omega K.$$

In der Gleichung 43) ist, weil nur eine generalisierte Koordinate p vorhanden ist, der Index wegzulassen. Man erhält also

85a) $$\frac{dq}{dt} - \frac{\partial T}{\partial p} = P,$$

und nach Substitution der gefundenen Werte

$$K\frac{d\omega}{dt} = D_a,$$

was mit dem im I. Teile, § 55 Gefundenen übereinstimmt.

Doch können wir nach dieser Methode natürlich nicht die Kräfte finden, welche auf die Lager wirken.

Andererseits können wir aber den Satz mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen noch bedeutend verallgemeinern. Wir denken uns beliebige feste Körper um beliebige feste Achsen drehbar, die durch Zahnräder oder Galsche Ketten (welche auch Masse haben können) so verbunden sind, daß ihre Winkelgeschwindigkeiten in konstantem Verhältnis stehen. Wir können dann den Weg p, welchen irgend ein Punkt einer Galschen Kette oder ein nicht in der Rotationsachse liegender Punkt eines rotierenden Körpers (der Antriebspunkt, driving-point) zurückgelegt hat, als verallgemeinerte Koordinate wählen.

p kehrt dann selbstverständlich nicht jedesmal zum Werte Null zurück, wenn der Antriebspunkt nach einem oder mehreren Umläufen wieder an die alte Stelle zurückgekehrt ist, sondern bloß wenn er ebenso viele Umläufe im einen wie im entgegengesetzten Sinne gemacht hat, so daß zwar durch den Wert von p die Position des Systems, nicht aber durch die letztere der Wert von p eindeutig bestimmt ist.

Die Geschwindigkeit jedes materiellen Punktes mit der Masse m_k des Systems ist dann gleich der Geschwindigkeit p' des Antriebspunktes, multipliziert mit einer Konstanten a_k, welche berechnet werden kann, wenn die Bedingungen des Systems gegeben sind. Die gesamte lebendige Kraft des Systems ist also:

$$\frac{p'^2}{2}\sum a_k^2 m_k.$$

Wenn der Weg p des Antriebspunktes um δp wächst, so ist die gesamte Arbeit aller auf das System wirkenden Kräfte gleich

$$\delta p \sum Q_k a_k,$$

wobei im letzten Ausdrucke a_k der Wert des Koeffizienten a für den Angriffspunkt irgend einer Kraft, Q_k deren Komponente in der Richtung des Weges $a_k \delta p$ des Angriffspunktes jener Kraft ist. Die generalisierte Kraft P, welche die generalisierte Koordinate p zu vergrößern sucht, ist also $\sum^k Q_k a_k$. Man nennt diese Größe auch das auf den Antriebspunkt reduzierte Moment aller Kräfte. Die Lagrangesche Gleichung 43) resp. 85a) verwandelt sich daher für unser System in:

$$\frac{d^2 p}{d t^2} \sum^k m_k a_k^2 = \sum^k Q_k a_k.$$

Da der Koeffizient von $d^2 p / d t^2$ konstant ist, so hat sie wieder genau die Form der Gleichung 13) des I. Teiles, welche für die Bewegung eines einzigen materiellen Punktes in einer geradlinigen oder krummlinigen Bahn gilt.

Diese Form tritt jedesmal auf, wenn die Position sämtliche Teile eines Systems durch eine einzige Variable p bestimmt ist und $\partial T / \partial p$ verschwindet, wenn also der Ausdruck für die lebendige Kraft bloß den Differentialquotienten der betreffenden Variablen nach der Zeit enthält, von dem Absolutwert dieser Koordinate selbst aber unabhängig ist. Dies trifft z. B. bei allen Systemen ein, welche Helmholtz Monozykel ohne langsam veränderliche Parameter nennt und von denen später ausführlich die Rede sein wird.

II. Allgemeinste Drehung eines starren Körpers.

§ 13. Generalisierte Koordinaten zur Bestimmung der Lage eines starren um einen festen Punkt drehbaren Körpers.

Wir gehen nun über zur Bewegung eines festen Körpers, in welchem ein einziger Punkt O fest gehalten wird, während er im übrigen vollkommen frei ist und auf den von außen beliebige Kräfte wirken. Es handelt sich zunächst darum, verallgemeinerte Koordinaten, d. h. Variable einzuführen, durch welche die Lage des festen Körpers im Raume zu einer beliebigen Zeit t eindeutig bestimmt wird.

Zu diesem Zwecke wählen wir den fest gehaltenen Punkt O zum Ursprunge zweier verschiedener rechtwinkliger Koordinatensysteme. Die Lage der Achsen OX, OY, OZ des einen (des fixen) Koordinatensystems soll im Raume unveränderlich sein. Die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ des anderen (des beweglichen) Koordinatensystems sollen ein für allemal fest mit dem Körper verbunden sein, so daß sie bei allen Bewegungen des festen Körpers ihre relative Lage gegen diesen nicht verändern, sondern sich einfach mit ihm mitbewegen.

Die relative Lage der beweglichen Koordinatenachsen gegen den Körper kann vorläufig noch ganz beliebig sein. Später werden wir sie so wählen, daß die beweglichen Koordinatenachsen Hauptträgheitsachsen des festen Körpers sind, was immer möglich ist, da nach I. Teil, § 59 in jedem festen Körper sich mindestens in einer Weise drei aufeinander senkrechte Gerade finden lassen, welche Hauptträgheitsachsen sind.

Beide Koordinatensysteme sollen kongruent (nicht Spiegelbilder) sein, also entweder beide französische oder beide englische (I. Teil, § 30). Im ersteren Falle nennen wir eine Drehung um eine gerichtete Drehungsachse positiv oder negativ, je nachdem sie für ein Auge, das von dorther blickt, wohin die Drehungsachse gerichtet ist, im Sinne des

Uhrzeigers oder im entgegengesetzten geschieht. Im letzteren Falle nehmen wir das Zeichen einer Drehung verkehrt. Immer ist also die Drehung, durch welche die positive Abszissenachse auf kürzestem Wege in die Lage der positiven y-Achse übergeht, eine positive Drehung um die positive z-Achse.

Zu irgend einer Zeit t ist nun die Lage des Körpers im Raume bestimmt durch die relative Lage des beweglichen Koordinatensystems gegen das fixe. Winkel, welche diese relative Lage eindeutig bestimmen, werden also auch die Lage des festen Körpers im Raume eindeutig bestimmen.

Um solche Winkel zu finden, verfahren wir folgendermaßen. Wir bezeichnen eine der beiden Hälften, in welche die Durchschnittslinie der fixen und beweglichen XY-Ebene durch den Punkt O geteilt wird, mit OR. Für den Zeitanfang kann man jede beliebige dieser beiden Hälften mit OR bezeichnen. Für alle anderen Zeiten ist dann dadurch bestimmt, welche der beiden Hälften für OR zu wählen ist, daß die Lage dieser Geraden OR sich kontinuierlich mit der Zeit verändern soll; es soll also die Gerade OR niemals während einer unendlich kleinen Zeit plötzlich in die entgegengesetzte Richtung überspringen.

Die relative Lage derartiger Geraden und Ebenen im Raume versinnlicht man sich am besten, wenn man sich wie in Fig. 1 die Punkte und größten Kreise perspektivisch zeichnet, in denen sie eine um den Punkt O mit dem Radius eins geschlagene Kugelfläche durchschneiden. Die Durchschnittspunkte sollen denselben Buchstaben erhalten, mit denen die Endpunkte der betreffenden Geraden bezeichnet wurden.

XRY und $\xi R \eta$ sind also die Quadranten der größten Kreise, in welchen der positive Quadrant der fixen resp. beweglichen XY-Ebene unsere Kugel durchschneidet. Der Winkel der Geraden OX und OR werde mit A bezeichnet und zwar beginne die Zählung dieses Winkels von OX und gehe in dem Sinne fort, in dem man auf kürzestem Wege von der positiven X-Achse zur positiven Y-Achse gelangt. Die ganze Richtungsänderung, welche man der Geraden OX

in diesem Sinne fort erteilen muß, bis sie in die Lage OR übergeht, sei eben der Winkel A. Bleibt daher OX fix und erhält A einen positiven Zuwachs, so dreht sich OR in positivem Sinne um OZ.

Der Winkel zwischen der fixen und beweglichen Z-Achse, und zwar von der ersteren im positiven Sinne um die Achse OR gegen die letzte gezählt, heiße C, so daß bei festem OZ und wachsendem C die Achse $O\zeta$ eine positive Drehung um OR macht. C ist daher auch der Winkel der beiden XY-Ebenen, und zwar derjenigen Halbebenen, in welche OR durch eine kleine positive Drehung um OZ resp. $O\zeta$ gelangt.

Da A deren Durchschnittslinie, C deren Neigung bestimmt, so bestimmen beide Winkel A und C die Lage der $\xi\eta$-Ebene relativ gegen das fixe Koordinatensystem, also auch im Raume eindeutig, wodurch auch die Lage von $O\zeta$ eindeutig bestimmt ist. Nach unserer Übereinkunft über die Art der Zählung des Winkels C entscheidet der Wert dieses Winkels auch, in welchem Sinne $O\zeta$ zu ziehen ist.

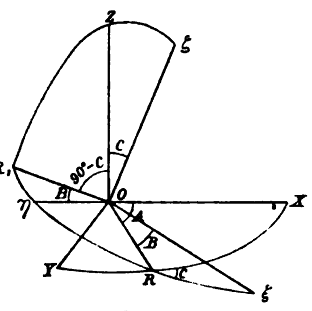


Fig. 1.

Die Lage der beweglichen Koordinatenachsen und damit die des festen Körpers ist also vollständig bestimmt, wenn noch der Winkel B der beweglichen Abszissenachse $O\xi$ mit der bereits bestimmten Geraden OR gegeben ist, und zwar soll dieser Winkel von OR gegen $O\xi$ in dem Sinne gezählt werden, in dem eine negative Drehung um $O\zeta$ erfolgt, so daß also bei fixem OR die bewegliche Abszissenachse und damit der Körper bei wachsendem B eine negative Drehung um $O\zeta$ macht.

Wir wollen die Winkel A, B, C so zählen, daß sie im Verlauf der Bewegung des Körpers niemals einen Sprung um den Betrag 2π machen. Sie können also auch größer als 2π, ja auch größer als beliebige Vielfache von 2π werden. Durch die Lage des festen Körpers sind daher

die Werte dieser Winkel nicht eindeutig bestimmt; dagegen ist umgekehrt durch den Wert dieser drei Winkel die Lage des Körpers eindeutig bestimmt.

Diese drei Winkel können daher als die generalisierten Koordinaten unseres Problems gewählt werden, und wir wollen setzen:

$$p_1 = A, \quad p_2 = B, \quad p_3 = C.$$

Um die Lage dieser Winkel drastisch zu versinnlichen, können wir uns den Körper in einer sogenannten cardanischen Aufhängung denken. Von drei konzentrischen Ringen liege der erste fix in der xz-Ebene; der zweite sei im ersten um die fixe z-Achse drehbar und liege augenblicklich in der Ebene ZOR; der dritte sei im zweiten um die Achse OR drehbar und liege augenblicklich in der Ebene $RO\zeta$. Dieser trage erst den darin um die Achse $O\zeta$ drehbaren Körper, in dem eine gegebene, starr mit ihm verbundene zu $O\zeta$ senkrechte Gerade augenblicklich die Lage $O\xi$ habe.

§ 14. Generalisierte Kräfte bei der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

Ehe wir an die Aufstellung der Bewegungsgleichungen gehen, wollen wir folgende Aufgaben lösen: 1. Welche Lagenänderung erfährt der Körper, wenn B und C konstant bleiben und bloß A einen unendlich kleinen Zuwachs δA erfährt? Dabei bleibt selbstverständlich wie immer die Lage der fixen Koordinatenachsen im Raume unveränderlich. Da C und B konstant bleiben, so bleibt die Neigung der beweglichen z-Achse gegen die fixe konstant und auch der Winkelabstand der beweglichen Abszissenachse von OR. Es rückt nur OR um δA vor. Der ganze Körper dreht sich also, da er fix mit dem beweglichen Koordinatensysteme verbunden ist, um die Ache OZ im positiven Sinne um den Winkel δA.

Diese Drehung kann in zwei Komponenten zerlegt werden, eine um eine Achse, die mit der Richtung, welche augenblicklich der Achse $O\zeta$ zukommt, zusammenfällt, die

andere um die Achse OR_1, welche die Durchschnittslinie der Ebene der beiden Z-Achsen mit der $\xi\eta$-Ebene ist. Dieselbe steht natürlich senkrecht auf $O\xi$ und OR, muß also mit $O\eta$ denselben Winkel B bilden, den $O\xi$ mit OR bildet, und wir wollen sie in dem Sinne ziehen, daß dieser Winkel von $O\eta$ gegen OR_1 gezählt gleich B, nicht um π davon verschieden ist.

$\xi R\eta R_1$ und $R_1 Z\zeta$ sind in der Fig. 1 die beiden größten Kreise, in denen einerseits die $\xi\eta$-Ebene, andererseits die Ebene der beiden Z-Achsen die Kugel schneiden.

Wir wollen noch den Kosinus irgend eines Winkels mit dem entsprechenden kleinen lateinischen, den Sinus mit dem entsprechenden kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen, also setzen:

86) $\cos B = b, \quad \sin B = \beta, \quad \cos C = c, \quad \sin C = \gamma.$

Dann ist $c\,\delta A$ die Komponente der Drehung δA um die Achse $O\zeta$, und $\gamma\,\delta A$ die Komponente um die Achse OR_1. Letztere kann wieder in zwei Komponenten um die Achsen $O\xi$ und $O\eta$ zerlegt werden. Da die Achse $O\xi$ mit OR_1 den Winkel $90^0 + B$ bildet, so sind die beiden letzteren Komponenten $-\beta\gamma\,\delta A$ und $b\gamma\,\delta A$. Die gesamte Lagenänderung, welche der feste Körper erfährt, wenn B und C konstant bleiben, dagegen A um δA wächst, kann also durch drei Drehungen $c\,\delta A$, $-\beta\gamma\,\delta A$ und $b\gamma\,\delta A$ um die drei beweglichen Koordinatenachsen hervorgerufen gedacht werden.

2. Nun soll A und C konstant bleiben, dagegen B um δB wachsen. Dann macht das bewegliche Koordinatensystem und daher auch der fix damit verbundene feste Körper die Drehung $-\delta B$ um die Achse $O\zeta$.

3. Wenn endlich A und B konstant bleiben und nur C um δC wächst, so dreht sich der Körper um den Winkel δC um die Achse OR, welche Drehung in die beiden Komponenten $b\,\delta C$ und $\beta\,\delta C$ um $O\xi$ und $O\eta$ zerlegt werden kann. Wenn wir im folgenden von „Drehungen um die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$“, oder von „Kräftemomenten oder Komponenten eines Vektors bezüglich derselben“ etc. sprechen, so ist das immer ein abgekürzter Ausdruck, statt zu sagen

„um oder bezüglich solcher Achsen, welche mit den Richtungen zusammenfallen, die augenblicklich die Koordinatenachsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ haben". Wir können das Resultat unserer Betrachtungen in der folgenden Tabelle darstellen, wo unter jeder Winkeländerung diejenigen Drehungen verzeichnet sind, welche zusammen jener Winkeländerung entsprechen.

87)

	δA	δB	δC
$O\xi$	$-\beta\gamma\delta A$	—	$b\delta C$
$O\eta$	$b\gamma\delta A$	—	$\beta\delta C$
$O\zeta$	$c\delta A$	$-\delta B$	—

Wir wollen nun zunächst die generalisierten Kräfte finden. Da die Winkel A, B, C die Rolle der generalisierten Koordinaten spielen, so finden wir die generalisierten Kräfte, indem wir gleichzeitig A, B, C um δA, δB und δC wachsen lassen und die bei der hierdurch erzeugten Lagenänderung, welche wir die Lagenänderung K nennen wollen, geleistete Arbeit $-\delta'' V$ auf die Form $P_1\,\delta A + P_2\,\delta B + P_3\,\delta C$ bringen. Die Koeffizienten der Variationen der generalisierten Koordinaten sind dann die generalisierten Kräfte. Da sich unendlich kleine Drehungen addieren, so setzt sich die Lagenänderung K aus der Summe aller im Schema 87) verzeichneten Drehungen zusammen. Sie kann daher durch drei Drehungen erzeugt gedacht werden, eine Drehung um die Achse $O\xi$ um den Winkel $-\beta\gamma\delta A + b\delta C$, eine um die Achse $O\eta$ um den Winkel $b\gamma\delta A + \beta\delta C$, und eine Drehung um die Achse $O\zeta$ um den Winkel $c\delta A - \delta B$.

Nach Formel 85) ist die Arbeit, welche geleistet wird, wenn sich ein fester Körper um irgend eine Achse um einen unendlich kleinen Winkel dreht, gleich dem Produkt des Drehungswinkels in die Summe der Momente aller auf den Körper wirkenden Kräfte bezüglich jener Achse. Bezeichnen wir daher die Summe der Momente aller auf unseren festen Körper wirkenden Kräfte bezüglich der Achsen $O\xi$ resp. $O\eta$ und $O\zeta$ mit D resp. E und F, so finden wir die durch die Drehung um $O\xi$ geleistete Arbeit, indem wir den betreffenden Drehungswinkel mit D multiplizieren, und das-

selbe gilt für die Achsen $O\eta$ und $O\zeta$. Da ferner die gesamte Arbeit, welche bei der Superposition mehrerer unendlich kleiner Bewegungen geleistet wird, immer gleich der Summe der bei diesen Bewegungen einzeln geleisteten Arbeiten ist, so ist die gesamte mit $-\delta'' V$ bezeichnete Arbeit gleich:

$$D(-\beta\gamma\delta A + b\delta C) + E(b\gamma\delta A + \beta\delta C) + F(c\delta A - \delta B).$$

Setzt man den Koeffizienten von δA in diesem Ausdrucke gleich P_1, den von δB gleich P_2, den von δC gleich P_3, so erhält man:

88) $$P_1 = -\beta\gamma D + b\gamma E + cF, \quad P_2 = -F, \quad P_3 = bD + \beta E.$$

§ 15. Lebendige Kraft eines starren Körpers, der sich um einen festen Punkt dreht.

Wir wollen nun weiter den Wert berechnen, welchen die lebendige Kraft T des Körpers zu irgend einer Zeit t hat. Wir lassen zu diesem Zwecke eine unendlich kleine Zeit dt vergehen und bezeichnen mit dA, dB und dC die wirklichen Zuwächse dieser drei Winkel während der Zeit dt. Das Schema 87) gilt für beliebige unendlich kleine Zuwächse der Winkel, daher auch für die Zuwächse dA, dB und dC. Die während der Zeit dt eintretende Lagenänderung des Körpers ist also äquivalent drei Drehungen, einer um den Winkel

89) $$d\varphi = -\beta\gamma\, dA + b\, dC$$

um die Achse $O\xi$, einer zweiten um den Winkel

90) $$d\chi = b\gamma\, dA + \beta\, dC$$

um die Achse $O\eta$, und einer dritten um den Winkel

91) $$d\psi = c\, dA - dB$$

um die Achse $O\zeta$.

Die durch diese drei Drehungen erzeugte Lagenänderung kann man auch durch eine einzige Drehung um den Winkel

$$dw = \sqrt{(d\varphi)^2 + (d\chi)^2 + (d\psi)^2}$$

um eine Achse Ω ersetzen, deren Winkel mit den drei Koordinatenachsen $O\xi$, $O\eta$ und $O\zeta$ mit (Ω, ξ), (Ω, η),

„um oder bezüglich solcher Achsen, v die
zusammenfallen, die augenblickli
$O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ haben". Wir kön
Betrachtungen in der folgenden
jeder Winkeländerung diejenige
welche zusammen jener Wink

Da ferner die Drehung ... Superposition mehrerer ... immer gleich ... geleisteten ... Arbeit

87) $O\xi$ | $-\beta$; $O\eta$; $O\zeta$

ung,
Wir wollen nun ... elgeschwi
finden. Da die Winke ... lgeschwindigkei
Koordinaten spielen, ... die ganze Lagen-
indem wir gleichzeit ... eit dt hervorbringt.
lassen und die bei ... chwindigkeit oder auch
welche wir die L ... digkeit;
Arbeit $-\delta'' V$ au

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{dw}{dt}\cos(\Omega, \eta)$$

Die Koeffiziente
ordinaten sind
unendlich kle

$$\frac{dw}{dt}\cos(\Omega, \zeta)$$

Lagenänderu
zeichneten ... Komponenten in den Richtungen
drei Drehu ... chnen wir die letzteren mit λ, μ, ν, so
die Achse
die Achs ... ξ), $\mu = \omega\cos(\Omega, \eta)$, $\nu = \omega\cos(\Omega, \zeta)$.
Drehun ... nden wir, wenn wir für $d\varphi$, $d\chi$ und $d\psi$ die
N ... 90) und 91) substituieren und wieder A', B', C'
wenn ... , dB/dt, dC/dt schreiben:
unen
Dre

$$\lambda = \frac{d\varphi}{dt} = -\beta\gamma A' + bC', \quad \mu = \frac{d\chi}{dt} = b\gamma A' + \beta C',$$

$$\nu = \frac{d\psi}{dt} = cA' - B'.$$

Nun sahen wir (vergl. Formel 84), daß die lebendige Kraft eines Körpers, dessen gesamte Bewegung in einem bestimmten Zeitmomente sich auf eine bloße Drehung um irgend eine Achse reduziert, gleich dem halben Produkt des Träg-

ers

$+ \lambda \frac{\partial T}{\partial \mu}$.

d des Wertes von P_2
98) liefert:

F.

en könnten wir
Gleichungen
durch eine
Masse Es wurden
beweglich rdinaten-
Körper verbun ng der
rend der ganzen Bew chung
die Trägheitsmomente de bloß
beweglichen Koordinatenachsen. Ko-
ieselben Größen, die wir in § 58 des
e, f bezeichnet haben, während die dort
ichneten Richtungskosinus der Achse, bezüglic
das Trägheitsmoment gesucht wird, jetzt die Werte
μ/ω, ν/ω haben. Das Trägheitsmoment bezüglich der
se Ω ist also nach der dort entwickelten Formel 151)

$$K = G\frac{\lambda^2}{\omega^2} + H\frac{\mu^2}{\omega^2} + J\frac{\nu^2}{\omega^2} - 2G'\frac{\mu\nu}{\omega^2} - 2H'\frac{\lambda\nu}{\omega^2} - 2J'\frac{\lambda\mu}{\omega^2},$$

woraus durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}\omega^2$ folgt:

95) $$T = \tfrac{1}{2}(G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2) - G'\mu\nu - H'\lambda\nu - J'\lambda\mu.$$

Da wir die Lage der beweglichen Koordinatenachsen relativ gegen den festen Körper wählen können wie wir wollen, so wird es am zweckmäßigsten sein, dies so zu tun, daß sie Hauptträgheitsachsen des festen Körpers sind. Da nach § 59 des I. Teiles jeder Körper mindestens drei aufeinander senkrechte Hauptträgheitsachsen hat, so ist dies immer möglich. Dann wird $G' = H' = J' = 0$, daher:

96) $$K = G\frac{\lambda^2}{\omega^2} + H\frac{\mu^2}{\omega^2} + J\frac{\nu^2}{\omega^2}$$

97) $$T = \tfrac{1}{2}(G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2).$$

Hätte der Körper keine andere Drehung, als die mit der Winkelgeschwindigkeit λ um die Achse $O\xi$, so wäre $T = \frac{1}{2} G \lambda^2$. Ebenso wäre die lebendige Kraft, wenn nur die Drehungen um die Achse $O\eta$ resp. $O\zeta$ vorhanden wären, $\frac{1}{2} H\mu^2$ resp. $\frac{1}{2} J\nu^2$. Die gesamte lebendige Kraft ist die Summe dieser drei lebendigen Kräfte, welche den Drehungen um $O\xi$ resp. $O\eta$ und $O\zeta$ allein entsprechen, wenn diese Koordinatenachsen Hauptträgheitsachsen sind, nicht aber in allen anderen Fällen, wie überhaupt die lebendige Kraft der Superposition mehrerer Bewegungen keineswegs immer gleich der Summe der lebendigen Kräfte der Einzelbewegung ist.

§ 16. Die Eulerschen Gleichungen.

Da wir drei verallgemeinerte Koordinaten haben, so haben wir in den Lagrangeschen Gleichungen 43) zu setzen $h = 1$, 2 und 3. Wir wollen zunächst die Gleichung

98) $$\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial p_2} = P_2$$

behandeln, welche wir erhalten, wenn wir $h = 2$ setzen. Da $p_2 = B$ ist, so wird:

$$q_2 = \frac{\partial T}{\partial B'}.$$

Bei Bildung des partiellen Differentialquotienten sind die beiden übrigen generalisierten Geschwindigkeiten, also A' und C', sowie alle Koordinaten A, B, C, daher auch b, β, c, γ ganz wie Konstante anzusehen. Nach den Gleichungen 94) enthält von den drei Größen λ, μ, ν bloß die letzte die Größe B' und es ist $\frac{\partial \nu}{\partial B'} = -1$, daher wird:

$$q_2 = \frac{\partial T}{\partial B'} = -\frac{\partial T}{\partial \nu} = H'\lambda + G'\mu - J\nu.$$

Bei der Differentiation nach $p_2 = B$ muß A, C, A', B', C', daher auch c und γ konstant betrachtet werden. Es folgt, wenn man sich der Bedeutung von b und β erinnert, aus den Gleichungen 94)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial B} = -b\gamma A' - \beta C' = -\mu,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial B} = -\beta\gamma A' + b C' = \lambda, \qquad \frac{\partial \nu}{\partial B} = 0,$$

daher:

$$\frac{\partial T}{\partial p_2} = \frac{\partial T}{\partial B} = -\mu\frac{\partial T}{\partial \lambda} + \lambda\frac{\partial T}{\partial \mu}.$$

Die Substitution dieser Werte und des Wertes von P_2 aus den Gleichungen 88) in Gleichung 98) liefert:

$$99)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \nu}\right) = \mu\frac{\partial T}{\partial \lambda} - \lambda\frac{\partial T}{\partial \mu} + F.$$

Die beiden anderen Bewegungsgleichungen könnten wir ableiten, indem wir in den Lagrangeschen Gleichungen $h = 1$ und $h = 3$ setzen. Wir gelangen jedoch durch eine andere Betrachtungsweise rascher zum Ziele. Es wurden zwar die Winkel A, B, C, welche bezüglich der Koordinatenachsen eine unsymmetrische Lage haben, zur Ableitung der Gleichung 99) benutzt, sie kommen jedoch in der Gleichung selbst gar nicht mehr vor. Dieselbe enthält vielmehr bloß Größen, welche sich bei zyklischer Vertauschung der Koordinatenachsen selbst zyklisch vertauschen.

Genau so wie wir die Gleichung 99) ableiteten, hätte man eine andere Gleichung ableiten können, indem man den Winkel der beiden Abszissenachsen mit C, die Winkel der y- resp. η-Achse mit der Durchschnittslinie der beiden yz-Ebenen mit A resp. B bezeichnet hätte. Dann hätte man dieselbe Gleichung erhalten; nur wären darin die Größen λ, μ, ν, ferner die Größen D, E, F und ebenso G, H, J untereinander zyklisch vertauscht. Es werden also jedenfalls auch noch die beiden durch zyklische Vertauschung aus 99) folgenden Gleichungen

$$100)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \lambda}\right) = \nu\dfrac{\partial T}{\partial \mu} - \mu\dfrac{\partial T}{\partial \nu} + D \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \mu}\right) = \lambda\dfrac{\partial T}{\partial \nu} - \nu\dfrac{\partial T}{\partial \lambda} + E \end{cases}$$

richtig sein müssen. Hierbei ist nach 95)

$$101)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \lambda} = G\lambda - J'\mu - H'\nu \\ \dfrac{\partial T}{\partial \mu} = -J'\lambda + H\mu - G'\nu \\ \dfrac{\partial T}{\partial \nu} = -H'\lambda - G'\mu + J\nu, \end{cases}$$

daher:

$$102)\quad \nu\frac{\partial T}{\partial \mu} - \mu\frac{\partial T}{\partial \nu} = \mu\nu(H-J) + G'(\mu^2-\nu^2) + H'\lambda\mu - J'\lambda\nu.$$

Wählt man die beweglichen Koordinatenachsen so, daß sie Hauptträgheitsachsen des festen Körpers sind, was man natürlich immer tun wird, wenn nicht ganz spezielle Gründe dagegen sprechen, so wird $G' = H' = J' = 0$, daher

$$103)\quad \frac{\partial T}{\partial \lambda} = G\lambda, \quad \frac{\partial T}{\partial \mu} = H\mu, \quad \frac{\partial T}{\partial \nu} = J\nu,$$

und die Gleichungen 99) und 100) verwandeln sich in:

$$104)\quad \begin{cases} G\dfrac{d\lambda}{dt} = (H-J)\mu\nu + D \\ H\dfrac{d\mu}{dt} = (J-G)\lambda\nu + E \\ J\dfrac{d\nu}{dt} = (G-H)\lambda\mu + F. \end{cases}$$

Diese Gleichungen heißen die Eulerschen Gleichungen. Sie bestimmen zunächst λ, μ, ν als Funktionen der Zeit und man hat dann noch A, B und C durch Integration der Gleichungen 94) als Funktionen der Zeit zu berechnen, wodurch erst die Bestimmung der Bewegung des Körpers, d. h. seiner Lage zu jeder Zeit gelungen ist, eine Aufgabe, die freilich häufig dadurch erschwert wird, daß man die Momente D, E, F der Kräfte erst berechnen kann, wenn man die Bewegung des Körpers im Raume selbst schon kennt.

§ 17. Behandlung dreier einfacher Spezialfälle.

Aus den Gleichungen 104) ist sofort folgendes ersichtlich:

1. Wenn die drei Hauptträgheitsmomente G, H und J verschieden sind, und keine äußeren Kräfte wirken, also $D = E = F = 0$ ist, so können die Gleichungen

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\nu}{dt} = 0$$

nur dann bestehen, d. h. die Rotationsachse kann ihre Lage gegen den Körper nur dann unverändert beibehalten, wenn entweder $\mu = \nu = 0$ oder $\lambda = \nu = 0$ oder $\lambda = \mu = 0$ ist,

d. h. wenn die Drehung um eine der drei Hauptträgheitsachsen stattfindet. Es stimmt dies mit dem im I. Teile, § 60 gefundenen Resultate überein, daß, wenn ein Körper um eine unveränderliche Achse rotiert, die nicht Hauptträgheitsachse ist, stets Kräfte auf diese Achse wirken müssen.

2. Wenn alle drei Hauptträgheitsmomente gleich sind, so werden die Gleichungen 104) voneinander unabhängig und jede derselben stimmt mit der Gleichung überein, welche wir für die Drehung um eine feste Achse erhalten haben. Es wird also dann die Drehung um eine der Koordinatenachsen durch die Drehung um die beiden anderen Koordinatenachsen nicht beeinflußt (als nur dadurch, daß durch jene anderen Drehungen etwa die Momente der Kräfte bezüglich der ersten Koordinatenachse geändert werden).

Die Drehung um jede der Koordinatenachsen geschieht also genau so, als ob der Körper nur um diese Achse drehbar wäre und in jedem Zeitmomente das gleiche Drehungsmoment um dieselbe drehend wirken würde. Wenn z. B. keine äußeren Kräfte wirken, so geschieht die Drehung um jede der Koordinatenachsen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

3. Es sollen zwei Hauptträgheitsmomente untereinander gleich, z. B. $G = H$, das dritte aber davon verschieden sein und keine äußeren Kräfte auf den Körper wirken, also $D = E = F = 0$ sein. Dann folgt aus der letzten der Gleichungen 104) $\nu =$ konst.; die beiden anderen aber verwandeln sich, wenn man setzt

105) $$\frac{J - G}{G}\nu = h$$

in

$$\frac{d\lambda}{dt} = -h\mu, \quad \frac{d\mu}{dt} = h\lambda,$$

woraus man ohne Schwierigkeit findet:

106) $$\lambda = i\cos[h(t+\tau)], \quad \mu = i\sin[h(t+\tau)].$$

i und τ sind die beiden Integrationskonstanten.

Wir wollen nun die geometrische Bedeutung der Größen $G\lambda$, $H\mu$ und $J\nu$ aufsuchen und zwar nicht bloß in diesem

speziellen, sondern im ganz allgemeinen in diesem Abschnitte behandelten Falle. Irgend ein Massenteilchen m des festen Körpers befinde sich zur Zeit t im Punkte A des Raumes und gelange infolge der Drehung $\lambda\,dt$ nach B. Die Projektionen dieser beiden Punkte auf eine fixe Ebene, welche zur Zeit t mit der $\eta\zeta$-Ebene zusammenfällt, seien A' und B'. Dann ist $A'B' = OA'.\lambda.dt$. Die doppelte Fläche des Dreiecks $OA'B'$ aber ist $OA'^2.\lambda.dt$. Daher ist das, was wir in § 31 des I. Teiles das Flächenmoment der Masse m bezüglich der Achse $O\xi$ genannt haben, gleich $m.OA'^2.\lambda$, und die Summe der Flächenmomente aller Massenteilchen des Körpers bezüglich der Achse $O\xi$ ist $\lambda.\sum m\,OA'^2 = G\lambda$. Man sieht leicht, daß durch die Drehungen $\mu\,dt$ und $\nu\,dt$ jedes dieser Flächenmomente nur um einen verschwindenden Betrag geändert wird. Ebenso sind $H\mu$ und $J\nu$ die Summen der Flächenmomente aller Massenteilchen des Körpers bezüglich der Achsen $O\eta$ und $O\zeta$.

Diesen drei Größen sind (ebenfalls nach dem in § 31 des I. Teiles Auseinandergesetzten) zur Zeit t die Kosinus der drei Winkel proportional, welche diejenige Achse mit den drei Koordinatenachsen bildet, bezüglich welcher die Summe der Flächenmomente aller Massenteilchen des Körpers ein Maximum ist.

Nun kehren wir zu dem jetzt behandelten speziellen Falle zurück. Da keine äußeren Kräfte wirken, ist die Lage dieser Achse unveränderlich im Raume (vergl. wieder § 31 des I. Teiles). Wir wollen diejenige Hälfte derselben, um welche die Drehung im positiven Sinne geschieht, als die positive OZ-Achse wählen. Dann ist also der Kosinus und Sinus des Winkes der beiden z-Achsen:

107) $$c = \frac{J\nu}{\sqrt{G^2\lambda^2+H^2\mu^2+J^2\nu^2}} = \frac{J\nu}{\sqrt{G^2 i^2+J^2\nu^2}}, \quad \gamma = \frac{G i}{\sqrt{G^2 i^2+J^2\nu^2}}.$$

Diese Ausdrücke, daher auch der Winkel der beiden z-Achsen, sind konstant.

Es soll nun die positive $O\zeta$-Achse in dem Sinne gezogen werden, daß ν positiv ist. Die Lage, welche die Achse der zu ν senkrechten Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\lambda^2+\mu^2} = i$ zu

Anfang der Zeit hat, wählen wir als $O\xi$-Achse und ziehen sie wieder in dem Sinne, daß die Drehung des Körpers um die positive $O\xi$-Achse zu Anfang der Zeit im positiven Sinne geschieht. Dann ist für $t = 0$, $\mu = 0$ und λ positiv, daher in den Gleichungen 106) $\tau = 0$ und i positiv. Da auch die Drehung um OZ im positiven Sinne geschieht, so liegt zu Anfang, und daher immer C zwischen 0° und 90° und es ist in den Gleichungen 107) die Wurzel mit positivem Zeichen zu nehmen.

Die Gleichungen 94) liefern ferner:

108) $$\begin{cases} \lambda = i\cos(ht) = -\beta\gamma\dfrac{dA}{dt}, \quad \mu = i\sin(ht) = b\gamma\dfrac{dA}{dt}, \\ \nu = \text{konst.} = c\dfrac{dA}{dt} - \dfrac{dB}{dt}. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt

$$\frac{dA}{dt} = \pm\frac{i}{\gamma}, \qquad B = ht \mp 90^\circ,$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zusammengehören. Aus der letzten der Gleichungen 108) folgt

$$\nu = \pm\frac{ci}{\gamma} - h,$$

oder, wenn man die Werte c und γ aus 107) substituiert:

$$\nu = \pm\frac{J\nu}{G} - h.$$

Damit dies mit 105) stimmt, müssen die oberen Zeichen gewählt werden, und man hat:

$$B = ht - 90^\circ, \qquad A = \frac{i}{\gamma}t + A_0 = \frac{\sqrt{G^2 i^2 + J^2\nu^2}}{G}t + A_0.$$

Die invariable Achse OZ liegt anfangs in der $\xi\zeta$-Ebene zwischen der positiven ξ- und positiven ζ-Achse, da die Komponente der Drehung um alle diese drei Achsen für $t = 0$ positiv ist; daher fällt OR mit der negativen $O\eta$-Achse zusammen, da um OR die Drehung von $+OZ$ gegen $+O\zeta$, also in unserem Falle auch von $+O\xi$ gegen $+O\zeta$ eine positive sein soll; denn bei einer positiven Drehung um OR muß C wachsen. Legen wir die OY-Achse in die Richtung, die anfangs $O\eta$ hat, also die OX-Achse in die anfängliche

Ebene der beiden z-Achsen und zwar in die Halbebene, die $O\xi$ enthält, so ist auch $A_0 = -90^\circ$.

$O\zeta$ beschreibt eine Kegelfläche um die Achse OZ, wobei sich die Ebene der beiden z-Achsen mit der Winkelgeschwindigkeit $A' = i/\gamma$ um die z-Achse dreht, was einer Drehung des Körpers um $O\zeta$ mit der Winkelgeschwindigkeit ν und gleichzeitig um eine in der Ebene der z-Achsen auf $O\zeta$ senkrechte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit i entspricht. Die augenblickliche Drehungsachse Ω, um welche sich der Körper mit der ebenfalls konstanten Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\nu^2 + i^2}$ dreht, liegt auch in der Ebene der beiden z-Achsen, und zwar zwischen OZ und $O\zeta$, wenn $G > J$, sonst auf der anderen Seite von OZ, da $\operatorname{tg}(Z, \zeta) = Gi/J\nu$, $\operatorname{tg}(\Omega, \zeta) = i/\nu$ ist.

§ 18. Algebraische Lösung der Aufgabe im Falle des Fehlens äußerer Kräfte.

Wir gehen nun über zur Betrachtung des Falles, wo das Trägheitsellipsoid ein dreiachsiges Ellipsoid ist und keine äußeren Kräfte wirken, also $D = E = F = 0$ ist, so daß die Gleichungen 104) folgende Form annehmen:

$$\text{109)} \qquad \begin{cases} G\dfrac{d\lambda}{dt} = (H - J)\mu\nu \\ H\dfrac{d\mu}{dt} = (J - G)\lambda\nu \\ J\dfrac{d\nu}{dt} = (G - H)\lambda\mu. \end{cases}$$

Multipliziert man von diesen Gleichungen die erste mit λ, die zweite mit μ, die dritte mit ν, und addiert alle drei, so erhält man:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2}{2}\right) = 0.$$

Bezeichnet man daher den konstanten Wert des eingeklammerten Ausdruckes mit $\frac{1}{2}k^2$, so folgt

$$\text{110)} \qquad G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2 = k^2,$$

was nichts anderes als die Gleichung der lebendigen Kraft

ist, da die linke Seite dieser Gleichung die doppelte lebendige Kraft des Körpers darstellt.

Multipliziert man von den Gleichungen 109) die erste mit $G\lambda$, die zweite mit $H\mu$, die dritte mit $J\nu$, und addiert wieder, so folgt in derselben Weise

111) $$G^2\lambda^2 + H^2\mu^2 + J^2\nu^2 = h^2,$$

wobei h eine zweite Integrationskonstante darstellt. Da $G\lambda$, $H\mu$ und $J\nu$ die Flächenmomente der gesamten Masse des Körpers bezüglich der Achsen $O\xi$, $O\eta$ und $O\zeta$ sind (vergl. § 17, Punkt 3), so ist h das maximale Flächenmoment des Körpers, also dessen Flächenmoment bezüglich der invariabeln Achse K (vergl. I. Teil, § 31), deren Winkel mit den beweglichen Koordinatenachsen durch die Gleichungen

112) $$\begin{cases} \cos(K, \xi) = \frac{1}{h} G\lambda, \quad \cos(K, \eta) = \frac{1}{h} H\mu, \\ \cos(K, \zeta) = \frac{1}{h} J\nu \end{cases}$$

gegeben sind. Ziehen wir sie immer in dem Sinne, daß das Flächenmoment des Körpers bezüglich derselben positiv ist, so haben wir h mit positiven Vorzeichen zu wählen, und die Kosinus der Formel 112) haben dasselbe Vorzeichen wie λ resp. μ und ν.

Die invariable Achse K behält während der ganzen Bewegung ihre Lage im Raume unveränderlich bei. Dagegen sind die Kosinus 112) veränderlich, da die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sich mit dem Körper mitbewegen und daher ihre Lage im Raume fortwährend ändern.

Durch Elimination von ν resp. von μ aus den Gleichungen 110) und 111) erhalten wir μ resp. ν durch λ ausgedrückt. Substituieren wir die betreffenden Werte von μ und ν in die erste der Gleichungen 109), so erhalten wir:

113) $$dt = \frac{d\lambda\, G\sqrt{HJ}}{\sqrt{[h^2 - k^2 J + G(J-G)\lambda^2]\,[k^2 H - h^2 - G(H-G)\lambda^2]}}.$$

Es werden also die Größen λ, μ, ν im allgemeinen durch elliptische Funktionen der Zeit dargestellt.

Den speziellen Fall, wo zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, wo sich also die Funktionen auf trigono-

metrische reduzieren, haben wir schon erschöpfend im vorigen Paragraphen behandelt. Die elliptischen Funktionen reduzieren sich auch auf trigonometrische für $h = k\sqrt{H}$, wenn also der Abstand der im nächsten Paragraphen zu beschreibenden Ebene T vom Mittelpunkte des Trägheitsellipsoides gleich der mittleren Halbachse desselben ist.

Wie im allgemeinen Falle die Integrale von der obigen Form auf die sogenannte Normalform zu bringen und in einfachster Weise durch spezielle elliptische Funktionen auszudrücken sind, wird in den Lehrbüchern für diese Funktionen ausführlich gelehrt. Ich will darauf um so weniger eingehen, als eine einheitliche Bezeichnung der elliptischen Funktionen noch nicht eingeführt ist. Ich will vielmehr zur Entwickelung einer von Poinsot begründeten Theorie übergehen, welche uns gestattet, uns von der Art der Bewegung des in Rede stehenden Körpers ein anschauliches Bild zu machen.

§ 19. Poinsots geometrische Konstruktion.

Weder die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ noch das zum Punkte O gehörige Trägheitsellipsoid des festen Körpers verändern ihre Lage relativ gegen den Körper. Es genügt daher, sich von der Bewegung des Trägheitsellipsoides im Raume ein auschauliches Bild zu machen. Die Gleichung desselben ist entsprechend den Gleichungen 152) und 153) des I. Teiles, § 58

114) $$G\xi^2 + H\eta^2 + J\zeta^2 = 1,$$

wobei ξ, η, ζ die Koordinaten irgend eines Punktes des als Fläche zu denkenden Trägheitsellipsoides bezüglich der beweglichen Koordinatenachsen sind.

Die augenblickliche Drehungsachse Ω bildet mit den Koordinatenachsen Winkel, deren Kosinus nach den Gleichungen 93) gleich λ/ω, μ/ω, ν/ω sind. Bezeichnen wir mit Ω' den Punkt, wo dieselbe die Fläche des Trägheitsellipsoides durchsticht, so ist $O\,\Omega'$ derjenige Halbmesser des Trägheitsellipsoides, welcher die Richtung der augenblicklichen Drehungsachse hat. Ist ϱ dessen Länge, so sind

115) $$\xi = \frac{\varrho\lambda}{\omega}, \quad \eta = \frac{\varrho\mu}{\omega}, \quad \zeta = \frac{\varrho\nu}{\omega}$$

die Koordinaten seines Endpunktes Ω'. Da dieser Punkt auf dem Trägheitsellipsoide liegt, so erfüllen diese Werte die Gleichungen 114). Es ist also:

$$G\left(\frac{\varrho\lambda}{\omega}\right)^2 + H\left(\frac{\varrho\mu}{\omega}\right)^2 + J\left(\frac{\varrho\nu}{\omega}\right)^2 = 1,$$

woraus folgt:

116) $$\omega = k\varrho,$$

117) $$\xi = \frac{\lambda}{k}, \quad \eta = \frac{\mu}{k}, \quad \zeta = \frac{\nu}{k}.$$

Die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω ist also in jedem Momente proportional der Länge desjenigen Halbmessers des Trägheitsellipsoides, welcher die Richtung der augenblicklichen Drehungsachse hat.

Wir wollen noch im Punkte Ω' eine Tangentialebene T an das Trägheitsellipsoid legen. Die von O auf die Ebene T gefällte Normale habe die Länge p und bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel (p, ξ), (p, η), (p, ζ).

Wir machen nun von folgendem bekannten Satze der analytischen Geometrie Gebrauch. Wählt man die Achsen eines beliebigen Ellipsoides, dessen Halbachsen a, b, c sind, als Koordinatenachsen, zieht vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf die im Punkte mit den Koordinaten ξ, η, ζ an dasselbe errichtete Tangentialebene eine Senkrechte, so hat diese die Länge

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}$$

und bildet mit den Koordinatenachsen Winkel, deren Kosinus

$$\cos(p, \xi) = \frac{\xi}{a^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}, \quad \cos(p, \eta) = \frac{\eta}{b^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}$$

$$\cos(p, \zeta) = \frac{\zeta}{c^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}$$

sind. In unserem Falle sind die Halbachsen:

$$a = 1/\sqrt{G}, \qquad b = 1/\sqrt{H}, \qquad c = 1/\sqrt{J}.$$

Da Ω' der Berührungspunkt ist, so sind auch für ξ, η, ζ die Werte 117) einzusetzen, und es wird:

$$118) \quad \begin{cases} p = \frac{k}{h}, \quad \cos(p, \xi) = \frac{G\lambda}{h}, \quad \cos(p, \eta) = \frac{H\mu}{h}, \\ \cos(p, \zeta) = \frac{J\nu}{h}. \end{cases}$$

Die erste Formel zeigt, daß die Länge p der von O auf die Tangentialebene T gefällten Senkrechten im Verlaufe der Bewegung der Körper konstant bleibt, die drei übrigen, daß auch die Richtung dieser Senkrechten im Raume, daher auch relativ gegen die fixen Koordinatenachsen unveränderlich bleibt. Denn diese Senkrechte hat die Richtung der invariablen Achse, da ja die für $\cos(p, \xi)$, $\cos(p, \eta)$ und $\cos(p, \zeta)$ gefundenen Werte mit denen identisch sind, die wir für die Kosinus der Winkel fanden, welche die invariable Achse mit den beweglichen Koordinatenachsen bildet.

Wenn wir daher in der Richtung der invariablen Achse nach der Seite hin, um welche das maximale Flächenmoment mit positivem Zeichen erscheint, vom Punkte O aus die Strecke k/h auftragen und durch ihren Endpunkt eine zur invariablen Achse senkrechte Ebene T legen, so wird diese Ebene während der ganzen Bewegung des Körpers vom Trägheitsellipsoid berührt.

Wir berufen uns ferner auf folgenden allgemeinen phoronomischen Satz. Es seien uns zwei beliebige bewegte Körper gegeben, die sich in einem Momente in einem Punkte berühren, an dem die Oberfläche keines der beiden Körper eine Kante oder Spitze hat. Es sind drei Fälle möglich: 1. In der Relativbewegung des zweiten Körpers gegen den ersten Körper ist die Komponente der Geschwindigkeit desjenigen Punktes P des zweiten Körpers, in dem dieser den ersten berührt, normal zur Berührungsebene von Null verschieden. Sie muß, da wir die Gestalt der Körper als unveränderlich voraussetzen, in bezug auf den ersten Körper nach außen gerichtet sein, die beiden Körper trennen sich (wenigstens an dieser Stelle). Diese Geschwindigkeit muß

sich zudem unmittelbar vorher diskontinuierlich mit der Zeit geändert haben, da sonst der Punkt P des zweiten Körpers aus dem Innern des ersten herauskommen müßte. 2. Diese Normalkomponente ist Null, aber der Punkt P hat relativ gegen den ersten Körper eine von Null verschiedene Geschwindigkeitskomponente, deren Richtung in die gemeinsame Tangentialebene fällt; dann sagt man, die Körper gleiten an dieser Stelle aneinander. 3. Auch die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des Punktes P der relativen Bewegung des zweiten Körpers gegen den ersten Körper ist Null, so daß dessen Weg bei dieser Relativbewegung während einer unendlich kleinen Zeit dt klein höherer Ordnung als dt ist, also durch dt dividiert mit abnehmendem dt der Grenze Null zueilt; dann sagt man, die Körper rollen aufeinander.

Die folgende ist eine allgemeinere Definition des Rollens, von welcher die soeben gegebene ein Spezialfall ist und welche auch den Fall einschließt, daß mehrere Berührungspunkte vorhanden sind, die auch in Kanten oder Spitzen der Oberflächen liegen können; nur schließen wir den Fall aus, daß auf eine endliche Strecke unendlich viele Kanten oder Spitzen fallen. „Zwischen den Zeiten t und $t + dt$ findet ein Rollen zweier fester Körper aufeinander statt, wenn eine oder mehrere Stellen vorhanden sind, wo die Oberflächen beider Körper zur Zeit t die Entfernung Null hatten, und wenn an allen diesen Stellen je zwei Punkte des einen und anderen Körpers, welche zur Zeit t die Entfernung Null hatten, auch zur Zeit $t + dt$ eine Entfernung haben, die unendlich klein höherer Ordnung als dt ist."

Das Trägheitsellipsoid berührt die Ebene T nur in einem Punkte, und zwar hat der Punkt des Trägheitsellipsoides, in welchem dieses die Ebene T berührt, weder eine normale noch tangentiale Geschwindigkeit, da er in der augenblicklichen Drehungsachse liegt, deren sämtliche Punkte momentan ruhen (während dt nur Wege zurücklegen, die unendlich klein höherer Ordnung als dt sind). Das Trägheitsellipsoid rollt also auf der festen Ebene T, wodurch seine Bewegung vollständig bestimmt ist.

§ 20. Poloide, Serpoloide.

Die Bahn des festen Körpers, d. h. der Inbegriff der sukzessiven Lagen, die er im Verlaufe der Zeit annimmt, sowie auch der sukzessiven Lagen der augenblicklichen Drehungsachse ist durch die Gestalt und Größe des Trägheitsellipsoides und den Wert des Verhältnisses k/h vollständig bestimmt. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist gleich dem mit k multiplizierten Halbmesser ϱ des Trägheitsellipsoides, dessen Endpunkt in der Ebene T liegt. Um daher die Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn bestimmen zu können, muß man k und h separat kennen. Die Punkte, in denen nacheinander die Berührung des Trägheitsellipsoides und der Ebene T stattfindet, bilden sowohl auf dem Ellipsoide als auch auf der Ebene eine kontinuierliche Kurve. Die erstere Kurve heißt die Poloide, die letztere die Serpoloide. Die Poloide hat eine lemniskatenartige Gestalt und besteht aus einem zusammenhängenden Zuge oder aus zwei abgesonderten Teilen. Die Serpoloide ist eine sternartige geschlossene oder ungeschlossene Kurve, ähnlich den in den Figg. 10, 11 etc. des I. Teiles, § 22 dargestellten Bahnen bei der Zentralbewegung.

Die Poloide ist der geometrische Ort aller Durchschnittpunkte der augenblicklichen Drehungsachse mit der Oberfläche des Trägheitsellipsoides. Bezeichnen wir wie im vorigen Paragraph mit ξ, η, ζ die Koordinaten eines dieser Punkte (des Punktes Ω'), so folgt aus den Gleichungen 111) und 117):

$$G^2\xi^2 + H^2\eta^2 + J^2\zeta^2 = \frac{h^2}{k^2}.$$

Der Punkt Ω' liegt also auch noch auf dem durch diese Gleichung dargestellten Ellipsoide, dessen Halbachsen der Richtung nach mit denen des Trägheitsellipsoides zusammenfallen, aber die Längen haben:

$$\frac{h}{kG}, \quad \frac{h}{kH}, \quad \frac{h}{kJ}.$$

Das letztere Ellipsoid ist also gestreckter, d. h. es weicht von der Kugelgestalt stärker ab als das Trägheitsellipsoid.

Die Durchschnittslinie der beiden Ellipsoide ist die Poloide. Es mögen beide Ellipsoide dreiachsig sein und zwar sei $G < H < J$, so daß also zur Achse $O\xi$ die größte Halbachse beider Ellipsoide und das kleinste Trägheitsmoment des Körpers gehört. Dieser soll nun unverändert bleiben und wir studieren verschiedene Bewegungen desselben, wobei die Anfangslage der augenblicklichen Drehungsachse, also das Verhältnis h/k wechseln soll, welches ja von den Anfangsgeschwindigkeiten der Teilchen des Körpers abhängt. Dann bleibt also das Trägheitsellipsoid unverändert und auch das zweite Ellipsoid bleibt ähnlich zu sich selbst und ändert nur seine absolute Größe.

Solange $h/k < \sqrt{G}$ ist, sind alle drei Halbachsen desselben kleiner als die des Trägheitsellipsoides; es liegt also das zweite Ellipsoid ganz innerhalb des Trägheitsellipsoides und die betreffenden Werte der Konstanten entsprechen keiner möglichen Bewegung. Wird $h/k = \sqrt{G}$, so berühren sich beide Ellipsoide an den beiden Polen der großen Achse. Der Körper dreht sich also mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes. Ist h/k ein wenig größer, so beginnen sich beide Ellipsoide ein wenig zu schneiden und zwar anfangs in zwei ganz kleinen, die beiden genannten Pole umgebenden Kurven. Die augenblickliche Drehungsachse bleibt also immer ganz nahe der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes. Mit wachsendem Werte von h/k wächst auch das zweite Ellipsoid. Die beiden Schnittkurven entfernen sich immer mehr von den beiden Polen der größten Achse und vereinigen sich endlich zu einer einzigen Kurve, welche sich an zwei mit den Polen der mittleren Achse des Trägheitsellipsoides zusammenfallenden Punkten selbst durchschneidet und in der Form der sich selbst durchschneidenden Lemniskate ähnelt. Die Drehung kann zwar auch mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Achse stattfinden, welche die Richtung der mittleren Halbachse des Trägheitsellipsoides hat, aber die augenblickliche Drehungsachse kann sich nicht in

einem Kegel bewegen, dessen Seite immer einen sehr kleinen Winkel mit der Richtung der mittleren Halbachse des Trägheitsellipsoides einschließt.

Wächst h/k noch mehr, so zerfällt die lemniskatenartige Kurve wieder in zwei getrennte Hälften, welche aber jetzt die beiden Pole der kleinsten Achse des Trägheitsellipsoides umgeben und sich immer mehr nach diesen zurückziehen, bis für $h/k = \sqrt{J}$ die Berührung nur mehr in diesen stattfindet, der Körper also um die Achse seines größten Trägheitsmomentes rotiert. Ein ein wenig kleinerer Wert von h/k entspricht einer Bewegung des Körpers, wobei die augenblickliche Drehungsachse immer sehr nahe der Achse des größten Trägheitsmomentes liegt. Größeren Werten entspricht keine mögliche Bewegung mehr.

Apparate zur Versinnlichung der geometrischen Darstellung der Bewegung eines frei um einen Punkt drehbaren Körpers haben Mach, Obermayer[1]) und andere konstruiert.

Die eine Hälfte des Trägheitsellipsoides ist aus Holz, Gips oder Metall modelliert und mittels eines Kugelgelenkes, das sich im Mittelpunkt des Ellipsoides befindet, nach allen Richtungen frei drehbar. Das Kugelgelenk wird durch folgende Vorrichtung getragen.

An einem horizontalen Brette, das die oben besprochene Ebene T darstellt, ist eine vertikal nach aufwärts gehende Stange befestigt, welche einen horizontalen Querstab trägt. Dieser Stab trägt dann nochmals höher oder tiefer stellbar eine kürzere vertikal nach abwärts gerichtete Stange, an deren unterem Ende das Kugelgelenk angebracht ist; man stellt nun die letztere Stange bald tiefer, bald weniger tief, jedoch immer so, daß das Ellipsoid das Brett berührt und kann bei jeder Einstellung der Stange vermöge des Kugelgelenkes das Ellipsoid auf dem Brette in solcher Weise wälzen, daß es ohne Gleitung rollt. Es führt dann genau dieselbe Bewegung aus, welche das mit einem frei um einen Punkt drehbaren Körper fest verbundene Trägheitsellipsoid

---

[1]) Carls Repertorium Bd. 4, S. 361 und Bd. 15, S. 54.

bei der ohne Einfluß von Kräften nach den Gesetzen der Mechanik erfolgenden Bewegung des Körpers ausführen würde.

Legt man durch die Serpoloide einen im Raume festen Kegel, durch die Poloide einen fest mit dem bewegten Körper verbundenen Kegel, welche beide ihre Spitze im festen Punkte O haben, so rollt während der Bewegung der letztere Kegel auf dem ersteren.

Man kann auch aus dieser Konstruktion die schon gefundenen Sätze über die Stabilität der Rotation um die Achse größten und kleinsten Trägheitsmomentes und die Labilität der Rotation um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmomentes herleiten. Wenn sich nämlich der Körper anfangs um eine Achse drehte, die mit der größten Achse des Trägheitsellipsoides einen sehr kleinen Winkel bildet (d. h. einen Winkel der klein ist gegen den Quotienten der größten Halbachse in die Differenz der größten und mittleren Halbachse), so ist p nur wenig kleiner als die größte Halbachse des Trägheitsellipsoides und alle Halbmesser desselben, welche erhebliche Winkel mit der größten Achse bilden, sind kleiner als p, reichen daher nicht bis zur Ebene T. Die Drehung muß also immer um eine Achse geschehen, die sehr nahe der größten Halbachse liegt, diese ist stabile Rotationsachse. Man kann auch sagen: Wenn sie anfangs Rotationsachse ist und dann eine sehr kleine, nur während kurzer Zeit wirkende störende Kraft auf den Körper wirkt, so weicht die gestörte Bewegung nach Aufhören der störenden Kraft für alle spätere Zeit nur sehr wenig von der ursprünglichen ab.

Man beweist ebenso, daß auch die kleinste Achse des Trägheitsellipsoides in demselben Sinne eine stabile Rotationsachse ist. Die Rotation kann auch eine beliebig lange Zeit hindurch gleichförmig um die mittlere Achse des Trägheitsellipsoides geschehen. Tritt aber dann durch kurze Zeit eine kleine störende Kraft auf, so geschieht nach ihrem Verschwinden die Rotation nicht mehr genau um die mittlere Achse. Die Gestalt der Poloide gleicht dann der einer Lemniskate, die sich nahezu an der Stelle, wo die mittlere

Achse die Ellipsoidfläche trifft, selbst schneidet, die der Serpoloide einer Spirale ähnlich der Bahn bei der Zentralbewegung, die dem Fußpunkte der Senkrechten p beliebig nahe kommen und sich beliebig oft um ihn herumschlingen kann und dann wieder davon entfernt. Die augenblickliche Drehungsachse entfernt sich daher immer mehr und schließlich um endliches von der mittleren Achse des Trägheitsellipsoides. Man sagt, die Rotation um diese kann zwar andauern, ist aber labil.

Falls das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, sieht man leicht, wie diese geometrische Darstellung wieder zu den Resultaten führt, die wir schon in § 17 analytisch ableiteten.

§ 21. Allgemeine Gleichungen für die Drehung eines schweren Rotationskörpers um einen festen Punkt.

Wir haben den Fall, daß zwei Hauptträgheitsmomente eines um einen festen Punkt beliebig beweglichen festen Körpers bezüglich dieses Punktes untereinander gleich sind, schon in § 17 ausführlich unter der Voraussetzung diskutiert, daß keine äußeren Kräfte wirken. Wir kehren zu diesem Falle, weil er der physikalisch wichtigste ist, nochmals zurück und setzen zunächst allgemein die Wirksamkeit ganz beliebiger äußerer Kräfte voraus. Später werden wir besonders auf die Schwerkraft unser Augenmerk richten.

Wir wählen die Achse des von den beiden anderen verschiedenen Trägheitsmomentes zur $O\zeta$-Achse, so daß also $G = H$ ist und die allgemeinen Gleichungen 104) folgendermaßen lauten:

$$\text{119)}\qquad \begin{cases} D = G\lambda' + (J - G)\mu\nu \\ E = G\mu' - (J - G)\lambda\nu \\ F = J\nu'. \end{cases}$$

Wir wollen bloß das Drehungsmoment F um die Achse $O\zeta$ in unseren Rechnungen belassen, es aber aus einem sogleich ersichtlichen Grunde mit $-\mathfrak{B}$ bezeichnen. Statt D und E aber wollen wir die Drehmomente $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ der äußeren

Kräfte um die Achsen OR und OZ einführen. Man findet aus den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken ξRZ und ηRZ der Fig. 1, § 13, Seite 53 leicht

$$120) \quad \cos(O\xi, OZ) = -\beta\gamma, \quad \cos(O\eta, OZ) = b\gamma$$

(vergl. das später vorkommende Schema 139) § 23). Es ist also:

$$\mathfrak{C} = Db + E\beta,$$
$$\mathfrak{A} = -D\beta\gamma + Eb\gamma + Fc.$$

Wir wollen hier für D, E, F, die Werte 119), darin aber für λ, μ, ν die Werte 94) und für λ', μ', ν' die daraus durch Differentiation nach der Zeit folgenden Werte:

$$\lambda' = -\beta\gamma A'' + bC'' - b\gamma A'B' - \beta c A'C' - \beta B'C'$$
$$\mu' = b\gamma A'' + \beta C'' - \beta\gamma A'B' + bcA'C' + bB'C'$$
$$\nu' = cA'' - B'' - \gamma A'C'$$

substituieren. Es folgt:

$$121) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{C} &= G(C'' - c\gamma A'^2) + J\gamma(cA'^2 - A'B') \\ \mathfrak{A} &= \frac{d}{dt}[J(c^2A' - cB') + G\gamma^2 A'] = \\ &= J(c^2A'' - cB'' - 2c\gamma A'C' + \gamma B'C') + \\ &+ G(\gamma^2 A'' + 2c\gamma A'C') \\ \mathfrak{B} &= J\frac{d}{dt}(-cA' + B') = J(-cA'' + B'' + \gamma A'C'). \end{aligned} \right.$$

Man hätte diese Relationen leicht direkt aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 43) in der folgenden Weise erhalten können. Man sieht sofort, daß nach der durch Gleichung 32) ausgedrückten Definition der verallgemeinerten Kraft die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die verallgemeinerten Kräfte nach den Koordinaten A, B und C sind. Es liefern daher die Lagrangeschen Gleichungen:

$$122) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial A'} - \frac{\partial T}{\partial A} &= \mathfrak{A} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial B'} - \frac{\partial T}{\partial B} &= \mathfrak{B} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial C'} - \frac{\partial T}{\partial C} &= \mathfrak{C}. \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber die lebendige Kraft:

$$T = \frac{G}{2}(\lambda^2 + \mu^2) + \frac{J}{2}\nu^2 .$$

Die Substitution der Werte 94) gibt:

$$123)\qquad T = \frac{G}{2}(\gamma^2 A'^2 + C'^2) + \frac{J}{2}(c A' - B')^2 .$$

Die Einführung dieses Wertes in die Gleichungen 122) liefert sofort die Gleichungen 121). Es ist mir nicht ganz verständlich, warum Helmholtz, welcher dieselben Gleichungen nach der letzteren Methode entwickelt hat, sagt[1], das Moment $\mathfrak{B}$ (Helmholtz nennt es C) müsse seinen Stützpunkt am inneren beweglichen Ringe der kardanischen Aufhängung haben, durch welche er sich die freie Beweglichkeit des Körpers um einen Punkt vermittelt denkt. Für die bloße Tatsache, daß die Achse des Momentes $\mathfrak{B}$ sich mit der Achse des größten Hauptträgheitsmomentes des Körpers mitbewegen muß, ist doch dieser Ausdruck nicht ganz der richtige.

Falls das Moment der auf den festen Körper wirkenden äußeren Kräfte zu allen Zeiten bezüglich der Achse $O\zeta$ des von den beiden anderen verschiedenen Hauptträgheitsmomentes gleich Null ist, was z. B. immer der Fall ist, wenn die Angriffspunkte aller äußeren Kräfte auf dieser Achse liegen, ist $\mathfrak{B} = 0$, und die dritte der Gleichungen 121) liefert:

$$124)\qquad c A' - B' = \nu = \text{konst.}$$

Die Gleichungen 121) vereinfachen sich dann und man erhält:

$$125)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{d}{dt}(J\nu c + G\gamma^2 A') \\ \mathfrak{C} = G(C'' - c\gamma A'^2) + J\gamma\nu A'. \end{cases}$$

Wir spezialisieren nun diese Formeln weiter, indem wir annehmen, daß auf den in Rede stehenden Körper, der bezüglich des Drehpunktes zwei gleiche Hauptträgheits-

[1]) Helmholtz, Die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Borchardts Journ. Bd. 100, S. 154; Ges. Abh. Bd. 3, S. 223.

momente hat, nur eine einzige Kraft p von unveränderlicher Größe und Richtung wirkt, deren Angriffspunkt auf der durch den Drehpunkt gehenden Hauptträgheitsachse $O\zeta$ liegt, der das verschiedene Hauptträgheitsmoment entspricht. Dieser Fall ist z. B. realisiert, wenn bloß die Schwere auf den Körper wirkt und sein Schwerpunkt in $O\zeta$ liegt.

Wir wählen die unveränderliche Richtung der Kraft zur negativen fixen OZ-Achse, ziehen also im Falle der Schwere die positive fixe OZ-Achse vertikal nach aufwärts. Ferner wählen wir diejenige Halbachse, auf welcher der Angriffspunkt der Kraft p, also im Falle der Schwere der Schwerpunkt liegt, als positive $O\zeta$-Achse und bezeichnen dessen Entfernung vom Drehpunkte mit l, so daß also im Falle der Schwere p das Gewicht des Körpers und l die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte ist. Die Kraft p übt jetzt nur ein Moment $pl\gamma$ aus, welches den Winkel C zu vergrößern sucht, keines in der Richtung der Winkel A oder B. Es ist also:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = pl\gamma,$$

und die Gleichungen 125) verwandeln sich in

126) $$J\nu c + G\gamma^2 A' = \varkappa,$$

127) $$G(C'' - c\gamma A'^2) + J\nu\gamma A' = pl\gamma,$$

wobei $\varkappa$ eine Konstante ist. Dazu kommt noch die Gleichung 124).

$G\lambda$, $H\mu$ und $J\nu$ sind die Flächenmomente des Körpers bezüglich der Richtungen, welche die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ augenblicklich im Raume haben.

128) $$G\lambda\cos(z, \xi) + H\mu\cos(z, \eta) + J\nu\cos(z, \zeta)$$

ist also das Flächenmoment des Körpers bezüglich der fixen Achse OZ. Nun ist $\cos(z,\zeta) = c$, $\cos(z, \xi) = -\beta\gamma$, $\cos(z, \eta) = b\gamma$ (vergl. Gleichung 120) und das Schema 139) des § 23). Substituiert man noch für λ, μ, ν die Werte 94), so geht der Ausdruck 128) in die linke Seite der Gleichung 126) über. Letztere Gleichung besagt also, daß das Flächen-

moment des Körpers bezüglich der Achse OZ konstant ist, was selbstverständlich ist, da ja die Kraft p bezüglich dieser Achse stets das Moment Null hat.

Dazu kommt noch die Gleichung der lebendigen Kraft, welche wir am einfachsten in folgender Weise gewinnen. Wir multiplizieren die Gleichung 127) mit C' und addieren dazu die mit A' multiplizierte Ableitung der Gleichung 126) nach t. Es folgt:

$$G(C'C'' + \gamma^2 A'A'' + c\gamma C'A'^2) = p l \gamma C'$$

und daraus durch Integration

$$129) \qquad G(C'^2 + \gamma^2 A'^2) + 2plc = \chi,$$

wobei χ eine neue Integrationskonstante ist. Daß dies in der Tat nichts anderes als die Gleichung der lebendigen Kraft ist, erkennt man leicht folgendermaßen. Da ν konstant ist, reduziert sich der veränderliche Teil der lebendigen Kraft auf $\frac{1}{2}G(\lambda^2 + \mu^2)$, was gemäß der Gleichungen 94) gleich $\frac{1}{2}G(C'^2 + \gamma^2 A'^2)$ ist. Die Arbeit der Kraft aber ist $\int p l \gamma \, dt = -plc +$ konst.

Eliminiert man aus den Gleichungen 126) und 129) die Größe A', so erhält man dt durch einen Differentialausdruck gegeben, der nur C und dC enthält. Die Substitution des so erhaltenen Ausdruckes für dt in Gleichung 126) liefert auch dA in Form eines Differentialausdruckes, der nur C und dC enthält. Die Integration des ersten Differentialausdruckes liefert C als elliptische Function von t, die des zweiten C als elliptische Funktion von A. Wir führen dies hier nicht weiter aus, sondern wollen nur in einiger noch spezielleren Fällen den Typus der Erscheinungen aus den Gleichungen herleiten.

§ 22. Spezialfälle.

I. Für $\nu = 0$ gehen die Gleichungen 126) und 129) in die Bewegungsgleichungen eines gewöhnlichen physischen Pendels über, das unter dem Einflusse der Schwerkraft allein um einen festen Punkt drehbar ist und folgende Bedingungen erfüllt:

1. Die Verbindungslinie des Drehpunktes und Schwerpunktes, welche wir die Pendelachse nennen, muß Hauptträgheitsachse sein.

2. Auf dieser Achse muß seine augenblickliche Drehungsachse zu Anfang der Zeit senkrecht stehen, wenn es zu dieser Zeit überhaupt eine Bewegung hatte.

3. Die Trägheitsmomente bezüglich aller durch den Drehpunkt senkrecht zur Pendelachse gelegten Achsen müssen gleich sein.

Die Gleichungen 126) und 129) stimmen in diesem Falle vollkommen mit den Gleichungen, welche wir im I. Teile, § 40 S. 144 ff. für die Bewegung des einfachen Pendels fanden, wenn wir an Stelle des dort mit w bezeichneten Winkels $180^\circ - C$, an Stelle des mit ϑ bezeichneten Winkels den Winkel A und an Stelle der Konstanten g, k und H die Konstante $l^2 p/G$, $l^2 \varkappa/G$ und $l^2 \chi/G$ setzen. Es tritt also an Stelle des Winkels, welchen die vom Aufhängepunkte nach dem beweglichen materiellen Punkte gezogene Gerade mit der Vertikalen bildet, der Winkel, den die Pendelachse mit der Vertikalen bildet, an Stelle des Winkels, den die durch den Aufhängepunkt und den beweglichen materiellen Punkt gelegte Vertikalebene mit einer fixen Vertikalebene bildet, der Winkel, den die durch die Pendelachse gelegte Vertikalebene mit einer fixen Vertikalebene bildet.

II. Wir betrachten den Fall, daß ν von Null verschieden ist, aber der schwere Körper sich niemals weit von seiner Ruhelage entfernt, so daß also die positive $O\zeta$-Achse immer nahezu vertikal nach abwärts gerichtet, und wenn wir $C = 180^\circ - r$ setzen, r eine kleine Größe ist.[1] Daher kann $\gamma = \sin C = r$, $c = \cos(180^\circ - r) = -1 + \frac{1}{2} r^2$ gesetzt werden und die Gleichungen 126) und 129) verwandeln sich in:

130) $$r^2 (G A' + \tfrac{1}{2} J \nu) = \varkappa + J \nu,$$

131) $$G(r'^2 + r^2 A'^2) = \chi + 2pl - plr^2.$$

Wir wollen nun die Lage des Körpers nicht relativ gegen das fixe Koordinatensystem, sondern gegen ein drittes

[1] Ein positives ν bedeutet also eine Rotation, die von der positiven y- gegen die positive x-Achse auf kürzestem Wege geschieht.

Koordinatensystem OX', OY', OZ' bestimmen. OZ' soll immer mit der fixen z-Achse OZ zusammenfallen. OX' soll zu Anfang der Zeit mit OX zusammenfallen, sich aber in der festen xy-Ebene mit der konstanten Geschwindigkeit $\frac{J\nu}{2G}$ um die feste z-Achse im negativen Sinne drehen, also so, wie man auf kürzestem Wege von der positiven y- zur positiven x-Achse gelangt. Die beiden Achsen OX und OX' sollen also zur Zeit t den Winkel $\frac{J\nu t}{2G}$ miteinander einschließen. Zur selben Zeit ist daher der Winkel zwischen OR und OX'

$$\sphericalangle OR,\ OX' = A + \frac{J\nu t}{2G}.$$

Wir führen lieber den Winkel ϑ zwischen der Vertikalebene, die die Pendelachse $O\zeta$ enthält, und der $X'OZ$-Ebene also den Winkel ein, welchen jene beiden von der z-Achse begrenzten Halbebenen miteinander bilden, von denen die eine die Achse $O\zeta$, die andere die Achse OX' enthält. Da die erstere Halbebene immer senkrecht auf OR steht, so ist:

132) $$\vartheta = (\sphericalangle OR,\ OX') - 90^0 = A + \frac{J\nu t}{2G} - 90^0.$$

Wenn h und k neue Integrationskonstanten sind, so gehen die Gleichungen 130) und 131) durch Einführung des Winkels ϑ über in

133) $$r^2\vartheta' = k,\quad r'^2 + r^2\vartheta'^2 = h - \left(\frac{pl}{G} + \frac{J^2\nu^2}{4G^2}\right)r^2.$$

Dies sind aber genau wieder die Gleichungen, welche wir im I. Teile, § 40 S. 146 für sehr kleine Schwingungen des einfachen Pendels fanden. Bei kleinen Schwingungen geschieht also die Bewegung des rotierenden Pendels relativ gegen das fixe Koordinatensystem, oder, wie man sagt, absolut im Raume gerade so, wie die des gewöhnlichen nicht rotierenden Pendels relativ gegen ein Koordinatensystem, das sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{J\nu}{2G}$ im positiven Sinne um die nach aufwärts gezogene Vertikale dreht, also wenn dies die Winkelgeschwindigkeit

der Erde wäre, wie die eines am Pole aufgehängten Foucaultschen Pendels relativ gegen die Erde. Beim rotierenden Pendel müssen noch die schon am Anfange dieses Paragraphen hervorgehobenen Bedingungen erfüllt sein, daß die Verbindungslinie vom Drehpunkt und Schwerpunkt Hauptträgheitsachse ist und daß die Trägheitsmomente bezüglich aller durch den Drehpunkt senkrecht zu dieser Verbindungslinie (der Pendelachse) gezogener Achsen gleich sind.

Die Pendelachse des nicht rotierenden Vergleichspendels kann sich natürlich, je nach den Werten der Konstanten, absolut im Raume in einer Ebene, einem elliptischen oder Kreiskegel bewegen.

Dieselbe Bewegung macht nach der alten Undulationstheorie des Lichtes ein Ätherteilchen, wenn sich geradlinig, elliptisch oder zirkular polarisiertes Licht in einem Körper fortpflanzt, der die Polarisationsebene dreht, denn es durchläuft ja dieselben Bewegungsphasen nacheinander, welche die verschiedenen Ätherteilchen des Strahles nach der alten Undulationstheorie gleichzeitig haben. Daher erklärt man die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes oft durch die Annahme, daß die Volumelemente Bestandteile enthalten, die um die Achse der magnetischen Kraft rotieren.

Dieselbe Bewegung erhält man auch, wenn man mit einem um die Pendelachse nach allen Seiten gleichbeschaffenen Pendel ein Gyrotrop fest verbindet, welches sich rasch um die Pendelachse als Rotationsachse dreht. Dieses Pendel schwingt wie ein Foucaultsches schwingen würde, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Erde viel größer wäre oder wie obiges Ätherteilchen. Durch eine daran befestigte Büchse, aus welcher ein feiner Sandstrahl auf ein untergelegtes Brett fließt, kann man die Bahn eines Punktes der Achse fixieren. Entsprechend der ungleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des rechts- und linkszirkular polarisierten Strahles hat das Pendel, wenn es als Kreispendel schwingt für die eine und andere Umlaufsrichtung verschiedene Schwingungsdauer.

III. Die Bewegung, welche man die Präzessionsbewegung

eines Kreisels nennt, wird folgendermaßen erzeugt: Ein schwerer Rotationskörper, der sich sehr rasch um seine Rotationsachse $O\zeta$ dreht, wird möglichst ruhig auf eine Vorrichtung aufgesetzt, die einen vom Schwerpunkte verschiedenen Punkt O der Achse fixiert.

$\frac{1}{2}J\nu^2$ ist die Energie der Rotation des Körpers um die Achse $O\zeta$, welche während der ganzen Bewegung konstant bleibt.

$$E = \frac{G}{2}\gamma^2 A'^2 + \frac{G\,C'^2}{2} + p\,l(1 + c)$$

ist die übrige Energie des Körpers gegenüber der Ruhe desselben in seiner Gleichgewichtslage (d. h. letztere als Energienullpunkt gewählt). E muß nach Gleichung 129) natürlich ebenfalls konstant bleiben. Die Bedingung, daß C nahe gleich 180^0 sei, lassen wir nun fallen. Die Bedingung, daß der Körper sehr rasch rotiert, aber ruhig aufgesetzt wird, präzisieren wir dahin, daß E zu Anfang und daher immer klein gegen $\frac{1}{2}J\nu^2$ sein soll.

Da im Ausdrucke für E alle drei Addenden wesentlich positiv sind, so muß um so mehr der erste derselben $\frac{1}{2}G\gamma^2A'^2$ klein gegenüber $\frac{1}{2}J\nu^2$ sein. Wir setzen nun voraus, daß G nicht sehr groß gegenüber J ist. Da jedenfalls $\gamma \overline{\gtrless} 1$ ist, so folgt, daß auch $G^2\gamma^4A'^2$ klein gegen $J^2\nu^2$, daher $G\gamma^2A'$ klein gegen $J\nu$ ist. Wenn wir die Werte zu Anfang der Zeit mit dem Index Null bezeichnen, so folgt aus 126):

$$c - c_0 = \frac{G\gamma_0^2A'_0 - G\gamma^2A'}{J\nu}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung sind im Zähler beide Ausdrücke klein gegen den Nenner, daher ist die ganze rechte Seite klein und c immer sehr nahe gleich c_0. Es wird also der Winkel C immer fast konstant bleiben, die Achse des Kreisels sinkt nicht, sondern behält ihre Neigung gegen die Vertikale.

IV. Bewegungen, wo C konstant ist, sind übrigens auch möglich, wenn $\frac{1}{2}J\nu^2$ nicht groß gegen E ist und wir wollen alle diese Bewegungen im folgenden unter einem behandeln. Wenn C konstant ist, muß nach 129) und 130) auch A' konstant sein. Setzt man die unter dieser Voraussetzung

aus den Gleichungen 94) abgeleiteten Werte von $d\lambda/dt$ und dp/dt in die beiden ersten der Gleichungen 119), so folgt:

$$-b\gamma G A' B' = (G-J)\nu b \gamma A' + pl\gamma b$$
$$-\beta\gamma G A' B' = (G-J)\nu\beta\gamma A' + pl\gamma\beta.$$

Diese beiden Gleichungen sind identisch. Durch Kürzung der ersten mit $b\gamma$ oder der zweiten mit $\beta\gamma$ folgt mit Rücksicht auf 124):

134) $$GcA'^2 - J\nu A' + pl = 0$$

135) $$A' = \frac{J\nu \pm \sqrt{J^2\nu^2 - 4Gcpl}}{2Gc}.$$

Sei zuerst C gleich $180^0 - \varepsilon$, wobei $\varepsilon < 90^0$ ist, so wird:

$$A' = \frac{-J\nu \pm \sqrt{J^2\nu^2 + 4Gpl\cos\varepsilon}}{2G\cos\varepsilon}.$$

Für $\nu = 0$ entspricht dies einem gewöhnlichen sogenannten Kreispendel, d. h. einem Pendel, dessen Schwerpunkt sich in einem horizontalen Kreise bewegt. Die Dauer eines Hinganges ist π/A'. Ist ν von Null verschieden, so enthält das Kreispendel einen um die Verbindungslinie seines Schwerpunktes und Aufhängepunktes ohne Reibung rotierenden Körper. Die Schwingungsdauer ist dann verschieden, je nachdem das Pendel in der einen oder anderen Richtung herumgeht. Der Zahlenwert von A' ist größer, daher die Schwingungsdauer kürzer, wenn A' das entgegengesesetzte Vorzeichen wie ν hat, d. h. wenn der rotierende Körper, dessen Achse mit der negativen OZ-Achse einen spitzen Winkel bildet, so daß ein positives ν annähernd einer gleichsinnigen Rotation wie ein abnehmendes A entspricht, im gleichen Sinne rotiert als das Pendel herumgeht. Dies haben wir für sehr kleine Entfernungen von der Ruhelage schon sub II bewiesen und haben schon dort auf die Analogie hingewiesen mit der Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des rechts und links zirkularen Lichtes in Medien, welche die Polarisationsebene des Lichtes drehen.

Für $C = 90^0$ wird die Umlaufsgeschwindigkeit für die Umlaufsrichtung, für welche A' und ν entgegengesetzt bezeichnet sind, unendlich, für die andere gleich

136) $$\frac{pl}{J\nu}.$$

Ist C ein spitzer Winkel, so ist eine derartige Bewegung nur möglich für

$$J\nu \gtreqless 2\sqrt{Gplc},$$

und zwar, wenn das Ungleichheitszeichen gilt, mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten im gleichen Sinne.

Kehren wir wieder zu der sub III gemachten Spezialisierung zurück, d. h. nehmen wir an, daß ν sehr groß ist. Dann wird die eine Wurzel der Gleichung 134) in allen drei Fällen ($C < 90^0$, $C = 90^0$, $C > 90^0$) sehr groß (im zweiten genau unendlich). Die andere nimmt in allen drei Fällen mit wachsendem ν ab und hat für große ν angenähert den Wert 136). Sie entspricht also der bekannten sogenannten Präzessionsbewegung. Da A' positiv ist, so dreht sich dabei die Ebene der OZ- und $O\zeta$-Achse im positiven Sinne um OZ, wenn die Rotation im positiven Sinne um $O\zeta$ erfolgt.

Genau dieselbe Präzessionsbewegung ist natürlich immer möglich, wenn unter sonst gleichen Umständen statt der Schwerkraft beliebige andere Kräfte wirken, sobald sich nur deren Wirksamkeit auf ein Moment $\mathfrak{M}$ reduziert, das bloß die Achse $O\zeta$ gegen OZ oder davon wegzutreiben, also den Körper um eine auf diesen beiden Geraden senkrechte Achse zu drehen sucht. Man hat dann in den obigen Formeln bloß $\mathfrak{M}/\gamma$ statt pl zu schreiben.

Den Sinn der Präzessionsbewegung findet man unter allen Umständen folgendermaßen: Man denkt sich zuerst die Achse $O\zeta$ auf kürzestem Wege senkrecht gegen OZ gedreht. Dann denkt man sich in einem beliebigen Punkte der Achse $O\zeta$, der nicht mit O zusammenfällt, eine Kraft angebracht, die den Körper in demselben Sinne wie das Moment $\mathfrak{M}$ zu drehen sucht, und verlängert diese Kraft in dem Sinne, in dem sie wirkt, bis zur Peripherie des rotierenden Körpers. Die Richtung, wohin sich der getroffene Punkt der Peripherie infolge der Rotationsbewegung des Körpers augenblicklich bewegt, fällt mit der Richtung zusammen, in der sich derselbe Punkt infolge der Präzession bewegt.

§ 23. Komponenten der Drehung um die fixen Achsen. Winkel der fixen und beweglichen Achsen.

Zwischen den verschiedenen beim Probleme der Rotation eines festen Körpers um einen fixen Punkt vorkommenden Größen besteht noch eine große Anzahl wichtiger Beziehungen, welche wir nun kennen lernen wollen. Wir haben in den Gleichungen 94) die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω in drei Komponenten um die beweglichen Koordinatenachsen als Drehungsachsen zerlegt. Wir wollen sie nun in drei Komponenten um die drei fixen Koordinatenachsen OX, OY, OZ als Drehungsachsen zerlegen und diese letzteren Komponenten mit l, m, n bezeichnen. Wir betrachten jede der drei Lagenänderungen, welche eintreten, wenn

1. bei konstantem B und C der Winkel A um dA,
2. bei konstantem A und C der Winkel B um dB,
3. bei konstantem A und B der Winkel C um dC

wächst, und zerlegen jede in drei Drehungen um die drei fixen Koordinatenachsen. Die erste Lagenänderung bedarf keiner weiteren Zerlegung, da sie einer Drehung um OZ um den Winkel dA entspricht. Die zweite Lagenänderung ist eine Drehung um den Winkel dB im negativen Sinne um die Achse $O\zeta$, also um den Winkel $-dB$ im positiven Sinne um dieselbe Achse. Wir wollen den Durchschnittspunkt der beiden größten Kreise ζZ und $\xi\eta$ der Fig. 1, § 13 S. 53, welcher Z am nächsten liegt, mit R_1, und den der Verlängerung der beiden größten Kreise XRY und $\zeta Z R_1$ mit R_2 bezeichnen (letzterer Punkt ist in der Figur nicht gezeichnet). Die obige Drehung um die Achse $O\zeta$ zerlegen wir nun in zwei Komponenten um OZ und OR_2. Erstere ist $-c\,dB$, letztere $\gamma\,dB$. Letztere wird noch in zwei Komponenten $-\alpha\gamma\,dB$ und $+a\gamma\,dB$ um OX und OY zerlegt.

Die dritte oben betrachtete Lagenänderung bestand darin, daß bei konstantem A und B der Winkel C um dC wächst. Dabei dreht sich der Körper um die Achse OR um den Winkel dC, welche Drehung um die Achsen OX und OY die Komponenten $a\,dC$ und $\alpha\,dC$ liefert. Wenn wir

also ganz wie im Schema 87) S. 56 in die erste Vertikalreihe die Komponenten der ersten, in die zweite die der zweiten, in die dritte die der dritten Lagenänderung schreiben; in die erste Horizontalreihe aber die Drehungskomponenten um OX, in die zweite die um OY, in die dritte die um OZ, so erhalten wir folgendes Schema:

137)

	dA	dB	dC
OX	—	$-\alpha\gamma\, dB$	$a\, dC$
OY	—	$a\gamma\, dB$	$\alpha\, dC$
OZ	dA	$-c\, dB$	

Um l, m, n zu finden genügt es anzunehmen, daß A während der Zeit dt um $dA = A'dt$, B um $dB = B'dt$, C um $dC = C'dt$ wächst. Die gesamte durch dt dividierte Drehung, welche der Körper dabei um die Achse OX erfährt, ist die Komponente l der Winkelgeschwindigkeit in der Richtung OX, und da Analoges für die Y- und Z-Achse gilt, so ist also:

138) $l = -\alpha\gamma B' + aC', \quad m = a\gamma B' + \alpha C', \quad n = A' - cB'.$

Wir wollen nun die Winkel, welche je eine bewegliche mit je einer fixen Koordinatenachse einschließt, durch die drei Winkel A, B, C ausdrücken. Wir bezeichnen den Kosinus jedes Winkels, den die Achse $O\xi$ mit irgend einer der fixen Koordinatenachsen einschließt, mit u. v und w haben die gleiche Bedeutung für die Achsen $O\eta$ und $O\zeta$. Je nachdem die bewegliche Koordinatenachse den betreffenden Winkel mit OX, OY oder OZ einschließt, soll der Buchstabe für den Kosinus unten den Index x, y oder z erhalten.

Wir denken uns in Fig. 1 wieder alle Punkte auf der Kugeloberfläche durch größte Kreise verbunden; dann finden wir u_x, u_y, v_x, v_y aus den sphärischen Dreiecken $XR\xi$, $YR\xi$, $XR\eta$, $YR\eta$, u_z und v_z aus den sphärischen Dreiecken $ZR\xi$ um $ZR\eta$, w_x und w_y aus den sphärischen Dreiecken ζRX und ζRY. Die in dieser Weise sich ergebenden Werte können wir in der folgenden Tabelle zusammenstellen:

139)

	OX	OY	OZ
$O\xi$	$u_x = ab + \alpha\beta c$	$u_y = \alpha b - a\beta c$	$u_z = -\beta\gamma$
$O\eta$	$v_x = a\beta - \alpha bc$	$v_y = \alpha\beta + abc$	$v_z = b\gamma$
$O\zeta$	$w_x = \alpha\gamma$	$w_y = -a\gamma$	$w_z = c$

Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie hat man ferner:

$$140)\quad \left\{\begin{array}{ll} u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 & u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 = 1 \\ v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1 & u_y^2 + v_y^2 + w_y^2 = 1 \\ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1 & u_z^2 + v_z^2 + w_z^2 = 1 \\ u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y = 0 & u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \\ u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z = 0 & u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0 \\ u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z = 0 & v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0 \end{array}\right.$$

$$140\text{a})\quad \left\{\begin{array}{lll} u_x = v_y w_z - v_z w_y, & v_x = w_y u_z - w_z u_y, & w_x = u_y v_z - u_z v_y \\ u_y = v_z w_x - v_x w_z, & v_y = w_z u_x - w_x u_z, & w_y = u_z v_x - u_x v_z \\ u_z = v_x w_y - v_y w_x, & v_z = w_x u_y - u_x w_y, & w_z = u_x v_y - u_y v_x \end{array}\right. \qquad \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} = 1,$$

wobei in den Gleichungen 140a) das Zeichen wechseln müßte, wenn das lateinische und griechische Koordinatensystem nicht, wie in Schema 139) angenommen ist, kongruent, sondern Spiegelbilder wären. Hierfür sowie für die Formeln 140a) werden wir einen besonderen Beweis zu Anfang des § 25 liefern. Alle diese Formeln folgen auch durch Substitution der Werte des Schemas 139).

§ 24. Die Drehung, ausgedrückt durch die Differentiale der Kosinus der Winkel zwischen den fixen und beweglichen Achsen.

Wir bezeichnen nun mit u_x, v_x, u_y ... die Werte, welche die Kosinus der Winkel zwischen den fixen und beweglichen Koordinatenachsen zur Zeit t haben, mit $u_x + du_x$, $v_x + dv_x$,

$u_y + du_y \ldots$ die Werte, welche dieselben Kosinus zur Zeit $t + dt$ haben, und wollen daraus die drei Drehungen λdt, μdt, νdt um die drei Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ berechnen, welche zusammengenommen der gesamten Lagenänderung äquivalent sind, welche der Körper während der Zeit dt erfährt.

Wir wollen da die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ doppelt ziehen. Die einen sollen ohne unteren Index bezeichnet werden, sich mit dem Körper mitbewegen und zur Zeit $t + dt$ die Lagen $O\xi'''$, $O\eta'''$, $O\zeta'''$ haben. Die anderen $O\xi_1$, $O\eta_1$, $O\zeta_1$ sollen zur Zeit t mit $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ zusammenfallen, aber fix im Raume und daher auch unveränderlich in ihrer Lage gegen OX, OY, OZ bleiben. Dann bilden also $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ zur Zeit t und $O\xi_1$, $O\eta_1$, $O\zeta_1$ immer mit den fixen Koordinatenachsen Winkel, deren Kosinus u_x, v_x, $u_y \ldots$ sind. $O\xi'''$, $O\eta'''$ und $O\zeta'''$ aber bilden mit OX, OY, OZ Winkel, deren Kosinus $u_x + du_x$, $v_x + dx_x$, $u_y + du_y \ldots$ sind.

Die gesamte Lagenänderung des Körpers während der Zeit dt kann man sich durch folgende drei Drehungen hervorgebracht denken:

1. Der Körper erfährt die Drehung λdt um die Achse $O\xi_1$. Schon bei dieser Drehung soll die Achse $O\eta$ fest mit dem Körper verbunden sein und in die Lage $O\eta'$ übergehen. Es ist also der Winkel zwischen $O\eta$ und $O\eta'$ gleich dem Drehungswinkel λdt. Da dieser Winkel sehr klein ist, so ist mit Vernachlässigung von unendlich kleinem höherer Ordnung:

$$\lambda dt = \sin(O\eta, O\eta') = \cos(O\zeta_1, O\eta').$$

2. Der Körper erfährt die Drehung μdt um die Achse $O\eta_1$. Dabei soll die Achse $O\eta'$, welche natürlich wieder fest mit dem Körper verbunden ist, in die Lage $O\eta''$ übergehen. Da sie sich hierbei in einer Ebene verschiebt, die senkrecht auf der Ebene der beiden Geraden $O\zeta_1$ und $O\eta'$ steht, so ändert sich dabei der Kosinus der beiden letzteren Geraden nur um unendlich Kleines höherer Ordnung, mit dessen Vernachlässigung man daher hat:

$$\cos(O\zeta_1, O\eta'') = \lambda dt.$$

3. Der Körper erfährt noch die Drehung νdt um die Achse $O\zeta_1$. Dadurch soll die noch immer fest mit dem

Körper verbundene Achse $O\eta''$ in die Lage $O\eta'''$ übergeführt werden. Da sie sich hierbei wieder in einer Ebene bewegt, die senkrecht auf der Ebene der beiden Geraden $O\xi_1$ und $O\eta''$ steht, so ändert sich deren Kosinus wieder um unendlich Kleines zweiter Ordnung, es ist also schließlich:

141) $$\cos(O\zeta_1, O\eta''') = \lambda\,dt.$$

$O\eta'''$ ist aber genau die Lage der Achse $O\eta$, welche schon oben mit $O\eta'''$ bezeichnet wurde. Denn es ist die Lage, die dadurch entsteht, daß der Körper seine gesamte während dt erfolgende Lagenänderung erfährt und dabei die Achse $O\eta$ fest mit ihm verbunden bleibt. Die Kosinus der Winkel, welche $O\eta'''$ mit den fixen Koordinatenachsen bildet, sind daher diejenigen Größen, welche wir mit $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$ bezeichnet haben, während $O\zeta_1$ mit denselben Koordinatenachsen diejenigen Winkel bildet, deren Kosinus wir mit w_x, w_y und w_z bezeichnet haben. Daher ist:

142) $$\begin{cases} \cos(O\zeta_1, O\eta''') = w_x(v_x + dv_x) + w_y(v_y + dv_y) + \\ \qquad + w_z(v_z + dv_z) = w_x dv_x + w_y dv_y + w_z dv_z \end{cases}$$

wegen

143) $$v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0$$

(vergl. die Relationen 140).

Bedenken wir, daß in du_x etc. nur Glieder höherer Ordnung, die also durch dt dividiert mit abnehmendem dt sich der Grenze Null nähern, vernachlässigt sind, so daß die Quotienten du_x/dt etc. genau das sind, was man als die Differentialquotienten dieser Größen nach der Zeit bezeichnet, so erhalten wir, wenn wir den Ausdruck 142) in die Gleichung 141) einsetzen und durch dt dividieren:

144) $$\lambda = w_x \frac{dv_x}{dt} + w_y \frac{dv_y}{dt} + w_z \frac{dv_z}{dt}.$$

Die Differentiation der Gleichung 143), welche offenbar zu allen Zeiten gilt, nach der Zeit lehrt uns, daß die rechte Seite der Gleichung 144) auch gleich

$$-v_x \frac{dw_x}{dt} - v_y \frac{dw_y}{dt} - v_z \frac{dw_z}{dt}$$

ist. Man erhält daher auch:

145) $$\lambda = -v_x \frac{d w_x}{d t} - v_y \frac{d w_y}{d t} - v_z \frac{d w_z}{d t}.$$

Die zyklische Vertauschung liefert:

146) $$\begin{cases} \mu = u_x \frac{d w_x}{d t} + u_y \frac{d w_y}{d t} + u_z \frac{d w_z}{d t} = - w_x \frac{d u_x}{d t} - w_y \frac{d u_y}{d t} - w_z \frac{d u_z}{d t} \\ \nu = v_x \frac{d u_x}{d t} + v_y \frac{d u_y}{d t} + v_z \frac{d u_z}{d t} = - u_x \frac{d v_x}{d t} - u_y \frac{d v_y}{d t} - u_z \frac{d v_z}{d t}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen könnten verifiziert werden, indem wir in ihre rechte Seite für $v_x, w_x \ldots$ ihre Werte aus dem Schema 139) einsetzen. Durch Differentiation dieser Werte nach der Zeit kann man $d v_x / d t$, $d w_x / d t \ldots$ finden, die dann auch in die rechte Seite der Gleichungen 144), 145) und 146) einzusetzen sind. Man würde so für die rechten Seiten in 144), 145) und 146) wieder die Werte erhalten, die nach 94) gleich λ, μ und ν sind.

Wir können analog auch l, m, n durch $u_x, v_x, u_y \ldots$ und deren Differentialquotienten nach der Zeit ausdrücken. $l d t$, $m d t$ und $n d t$ sind die drei Drehungswinkel, welche dem Körper um die Achsen OX, OY, OZ erteilt werden müssen, um die Lagenänderung zu erzeugen, welche er während der Zeit $d t$ wirklich erfährt.

Man würde offenbar dieselbe relative Lagenänderung des Körpers relativ gegen die Achsen OX, OY, OZ erhalten, wenn man den Körper und damit die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ fix im Raume ließe, aber die drei fest miteinander verbundenen Koordinatenachsen OX, OY, OZ zuerst um OX um den Winkel $-l d t$, dann um OY um den Winkel $-m d t$, und zuletzt um OZ um den Winkel $-n d t$ drehen würde. Sie sollen dadurch in die Lagen OX''', OY''' und OZ''' übergehen. Da diese drei Geraden relativ gegen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ dieselbe Lage wie die Geraden, die wir früher mit $O\xi'''$, $O\eta'''$, $O\zeta'''$ bezeichneten, relativ gegen OX, OY, OZ haben, so ist z. B.:

147) $$\begin{cases} \cos(OY''', O\xi) = u_y + d u_y, \quad \cos(OY''', O\eta) = v_y + d v_y, \\ \cos(OY''', O\zeta) = w_y + d w_y. \end{cases}$$

Um die Lage OY''' zu ermitteln, denken wir uns wieder

die Achsen OX, OY, OZ doppelt gezeichnet. Die ersten ohne unteren Index sollen die oben besprochenen Drehungen um die Winkel $-l\,dt$, $-m\,dt$, $-n\,dt$ machen. Die zweiten, die wir mit OX_1, OY_1, OZ_1 bezeichnen wollen, sollen fix im Raume und daher auch relativ gegen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ bleiben, da wir jetzt auch die Lage der letzteren Achsen unveränderlich lassen. Die Drehung $-l\,dt$ geschieht um die Achse OX. Durch dieselbe gehe OY in die Lage OY' über, so daß man analog der Gleichung 141) hat:

148) $$-l\,dt = \sin(OY, OY') = \cos(OY', OZ_1).$$

Durch die beiden Drehungen $-m\,dt$ und $-n\,dt$ um die Achse OY_1 und OZ_1 soll die Gerade OY' in die Lagen OY'' und OY''' übergehen. Es ist dann OY''' mit der oben schon so bezeichneten Geraden identisch, und da durch die beiden zuletzt erwähnten Drehungen der Kosinus sich nur um unendlich Kleines zweiter Ordnung ändert, so folgt aus Gleichung 148):

149) $$\cos(OY''', OZ_1) = -l\,dt.$$

Da nun

$$\cos(OZ_1, O\xi) = u_z, \quad \cos(OZ_1, O\eta) = v_z, \quad \cos(OZ_1, O\zeta) = w_z$$

ist, so folgt aus den Gleichungen 147)

$$\cos(OY''', OZ_1) = u_z(u_y + du_y) + v_z(v_y + dv_y) + w_z(w_y + dw_y),$$

woraus wir in Verbindung mit Gleichung 149), ganz wie wir früher die Gleichung 144) erhielten, finden:

150) $$l = -u_z\frac{du_y}{dt} - v_z\frac{dv_y}{dt} - w_z\frac{dw_y}{dt} = u_y\frac{du_z}{dt} + v_y\frac{dv_z}{dt} + w_y\frac{dw_z}{dt},$$

mit zwei analogen durch zyklische Vertauschung gebildeten Gleichungen. Würde man die im Schema 139) zusammengestellten Werte für $u_x, v_x, u_y \ldots$ hier substituieren, aus diesen durch Differentiation nach der Zeit $du_x/dt \ldots$ bilden und auch diese Werte substituieren, so würde man wieder die Gleichungen 138) erhalten.

§ 25. Verschiedene andere Relationen.

Betrachtet man die drei unter den Gleichungen 140) vorkommenden Gleichungen

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$$
$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0$$
$$u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0$$

als lineare Gleichungen für u_x, u_y, u_z und setzt die Determinante der Koeffizienten

$$\begin{vmatrix} u_x, & u_y, & u_z \\ v_x, & v_y, & v_z \\ w_x, & w_y, & w_z \end{vmatrix} = \Delta,$$

so folgt:

151) $$\begin{cases} u_x \Delta = v_y w_z - v_z w_y \\ u_y \Delta = v_z w_x - v_x w_z \\ u_z \Delta = w_y v_x - w_x v_y . \end{cases}$$

Addiert man die Quadrate dieser drei Ausdrücke, so erhält man links Δ^2. Die rechte Seite kann man leicht in die Form

$$(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) - (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)^2 = 1$$

bringen. Es folgt also $\Delta = \pm 1$.

Bringt man die positive OX-Achse mit der positiven $O\xi$-Achse, und gleichzeitig die positive $O\eta$-Achse mit der positiven OY-Achse zur Deckung, so decken sich, falls die Koordinatensyteme kongruent sind, auch die positiven Z-Achsen. Es ist also $u_x = v_y = w_z = 1$, und aus der ersten der Gleichungen 151) folgt $\Delta = +1$. Falls die Koordinatensysteme Spiegelbilder sind, so deckt sich die positive Z-Achse mit der negativen ζ-Achse. Es ist also $u_x = v_y = -w_z = 1$ und es folgt $\Delta = -1$.

Natürlich behält Δ in beiden Fällen seinen Wert auch für alle anderen relativen Lagen der Koordinatenachsen, da es, wenn sich die Lage kontinuierlich ändert, nicht plötzlich von -1 zu $+1$ überspringen kann. Wir setzen immer kongruente Koordinatensysteme voraus, so daß also $\Delta = +1$ ist.

Wir wollen nun mit x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes P des festen Körpers bezüglich der fixen Koordinatenachsen zur Zeit t bezeichnen. ξ, η, ζ seien die

Koordinaten desselben Punktes bezüglich der beweglichen Koordinatenachsen. Die letzteren Koordinaten ändern sich natürlich nicht mit der Zeit. Dann hat man nach den bekannten Formeln für Koordinatentransformation:

152) $$\begin{cases} x = u_x \xi + v_x \eta + w_x \zeta \\ y = u_y \xi + v_y \eta + w_y \zeta \\ z = u_z \xi + v_z \eta + w_z \zeta \end{cases}$$

153) $$\begin{cases} \xi = u_x x + u_y y + u_z z \\ \eta = v_x x + v_y y + v_z z \\ \zeta = w_x x + w_y y + w_z z. \end{cases}$$

In jeder dieser Gleichungen zieht ein lateinisches x, y oder z auch den Index x oder y oder z nach sich, ein griechischer Buchstabe ξ, η oder ζ aber den Buchstaben u, v oder w.

Wir wollen nun die Zuwächse dx, dy, dz berechnen, welche die Koordinaten x, y, z durch diejenige Lagenänderung erfahren, die der Körper während der Zeit dt erfährt. Diese Lagenänderung kann durch die drei Drehungen $l\,dt$ um die Achse OX, $m\,dt$ um die Achse OY, $n\,dt$ um die Achse OZ erzeugt werden. Bezeichnet man die Koordinatenzuwächse, welche durch die erste resp. zweite oder dritte Drehung allein erzeugt würden, mit dem Index l resp. m oder n, so ist nach Formel 145) (§ 55 des I. Teiles):

$$\begin{array}{lll} dx_l = 0, & dy_l = -l z\,dt, & dz_l = l y\,dt \\ dx_m = m z\,dt, & dy_m = 0, & dz_m = -m x\,dt \\ dx_n = -n y\,dt, & dy_n = n x\,dt, & dn_n = 0. \end{array}$$

Die durch die gesamte, während dt stattfindende Lagenänderung entstehenden Koordinatenzuwächse sind bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung die Superposition dieser Zuwächse. Dividiert man die Gesamtzuwächse durch dt, so eilen die Quotienten mit abnehmendem dt folgenden Grenzwerten zu, welche also die Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit darstellen:

$$154)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = mz - ny \\ \dfrac{dy}{dt} = nx - lz \\ \dfrac{dz}{dt} = ly - mx. \end{cases}$$

Dieselben Formeln erhält man, wenn man die erste der Gleichungen 152) nach der Zeit differenziert. Da die beweglichen Koordinatenachsen mit dem festen Körper unveränderlich verbunden sind, so sind dabei ξ, η, ζ als konstant zu betrachten. Es folgt also:

$$\frac{dx}{dt} = \xi \frac{du_x}{dt} + \eta \frac{dv_x}{dt} + \zeta \frac{dw_x}{dt}.$$

Substituiert man für ξ, η, ζ deren Werte aus den Gleichungen 153), so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen 150) wieder die erste der Gleichungen 154). Wenn man die halbe Masse jedes Massenpunktes des Körpers mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ multipliziert, darin $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ durch die Werte 154) ersetzt und über alle Massenpunkte summiert, so erhält man wieder den Ausdruck 95) für die lebendige Kraft T, den wir schon kennen.

Unter den obigen Formeln haben alle, in denen die Momente D, E, F nicht vorkommen, einen rein geometrischen Charakter. In geometrischer Beziehung spielen aber die Achsen OX, OY und OZ genau dieselbe Rolle wie die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Die relativen Lagen und daher alle rein geometrischen Beziehungen bleiben vollkommen dieselben, ob die Achsen OX, OY, OZ fix sind und die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die augenblickliche Drehungsachse machen, deren Komponenten um die ersteren Achsen l, m, n, um die letzteren λ, μ, ν sind, oder ob umgekehrt die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ fix sind, und die Achsen OX, OY, OZ gerade die entgegengesetzte Drehung machen, deren Komponenten die Achse OX, OY, OZ dann natürlich $-l$, $-m$, $-n$, um die Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ aber $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ sind.

Wir können also in allen Formeln, welche die Drehungsmomente D, E, F nicht enthalten, die Achsen OX, OY, OZ mit den Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ und umgekehrt vertauschen, wodurch sich auch die Winkel A und B vertauschen, dagegen C in $-C$ und folglich auch C' in $-C'$ und γ in $-\gamma$ übergeht. Alle derartige Formeln von rein geometrischem Charakter bleiben daher richtig, wenn wir jede in der folgenden Reihe angeführte Größe mit der in der nächsten Reihe unter ihr stehenden, und umgekehrt jede in der zweiten Reihe stehende mit der darüber stehenden vertauschen:

$$x,\ y,\ z,\ u_y,\ u_z,\ v_x,\ v_z,\ w_x,\ w_y,\ l,\ m,\ n,\ A,\ C,\ \omega,\ OX,\ OY,\ OZ.$$
$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ v_x,\ w_x,\ u_y,\ w_y,\ u_z,\ v_z,\ -\lambda,\ -\mu,\ -\nu,\ B,\ -C,\ -\omega,\ O\xi,\ O\eta,\ O\zeta.$$

u_x, v_y, w_z dagegen müssen ungeändert bleiben. Durch diese Vertauschung erhält man z. B. aus $u_y = \alpha b - a\beta c$ die entsprechende Formel für v_x, ebenso aus $l = -\alpha\gamma B' + a C'$ den für $-\lambda$ gefundenen Wert etc. Derartige Vertauschungsregeln ersparen, wenn man die eine Hälfte der Formeln gefunden hat, die Arbeit der Ableitung der anderen Hälfte. Hat man aber alle Formeln bereits abgeleitet, so bilden die Vertauschungsregeln wenigstens eine oft willkommene Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung.

§ 26. Die Zusammenfassung der in den behandelten speziellen Fällen gefundenen Resultate liefert die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers.

Wir haben bewiesen, daß sich bei Einwirkung ganz beliebiger Kräfte auf einen vollkommen freien Körper dessen Schwerpunkt wie ein einziger materieller Punkt bewegt, auf den alle diese Kräfte gleichzeitig wirken und daß die Drehung um den Schwerpunkt so geschieht, als ob derselbe ohne Änderung der sonstigen Umstände festgehalten würde. Da wir die beiden letzteren Probleme nach dem vorgenommenen lösen können, so haben wir auch das allgemeine Problem der Bewegung eines vollkommen freien Körpers unter Einwirkung beliebiger Kräfte indirekt gelöst und es

ist dies in der Tat der Weg, den man meist einschlagen wird, da man dadurch die kompliziertere Aufgabe in zwei möglichst einfache zerlegt. Natürlich haben wir aber damit noch nicht die Bewegungsgleichungen für den allgemeinsten Fall explizit hingeschrieben.

Behandelt man das Problem von vornherein in voller Allgemeinheit, so werden die Gleichungen zwar erheblich komplizierter und unanschaulicher, aber man hat den Vorteil, daß man alle Aufgaben, die wir nacheinander lösten, in derselben Formel beisammen hat und durch Spezialisierung derselben gewinnen kann. Wer sich für die Schönheiten dieser Behandlungsweise interessiert, der sei außer auf Lagranges Mécanique analytique auf Kirchhoffs Vorlesungen über Mechanik verwiesen.

Ich will hier nur kurz zeigen, wie man von den bisher behandelten Spezialfällen aus, da sie ja implizit den allgemeinsten Fall enthalten, auch wieder ohne große Schwierigkeit zu den allgemeinsten Formeln gelangen kann.

Um in der allgemeinsten Weise die Lage eines vollkommen freien festen Körpers gegen ein fixes Koordinatensystem OX, OY, OZ zu definieren, legen wir durch einen beliebigen Punkt Ω des festen Körpers drei Koordinatenachsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, die sich mit diesem fest verbunden mitbewegen (die beweglichen Koordinatenachsen). Wir bezeichnen mit α, β, γ, welche Buchstaben wir, sowie a, b, c jetzt nicht mehr in demselben Sinne wie bisher verwenden, die Koordinaten des Punktes Ω bezüglich des fixen Koordinatensystems, und mit u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes Ω in den Richtungen der beweglichen Koordinatenachsen; ferner mit a, b, c die Koordi-

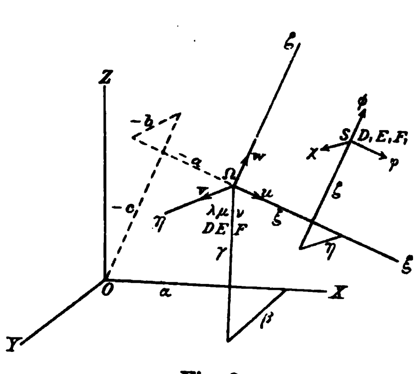


Fig. 2.

naten des Punktes O bezüglich der beweglichen Koordinatenachsen, mit l, m, n und λ, μ, ν die Komponenten der augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeit des Körpers nach den fixen resp. beweglichen Koordinatenachsen, und mit ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes S des Körpers bezüglich der beweglichen Koordinatenachsen (vergl. Fig. 2). Endlich setzen wir analog wie früher:

$$u_x = \cos(X, \xi), \quad u_y = \cos(Y, \xi), \quad v_x = \cos(X, \eta) \ldots$$

Würde der Punkt Ω ruhen, so wären bei gleicher Drehbewegung des Körpers um den Punkt Ω die Komponenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes S in den Richtungen der beweglichen Koordinatenachse:

155) $$-\eta\nu + \zeta\mu, \quad -\zeta\lambda + \xi\nu, \quad -\xi\mu + \eta\lambda.$$

(Infolge der Drehung λ allein wären sie ja nach den Formeln 145) des I. Teiles Null, $-\lambda\zeta$, $+\lambda\eta$; addiert man dazu die durch zyklische Vertauschung folgenden Geschwindigkeitskomponenten infolge der Drehungen μ und ν, so folgen die Formeln 155); vergl. auch die Formeln 154).)

Dazu addiert sich noch die Progressivbewegung des Punktes Ω, so daß die wirklichen Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes S in der Richtung der beweglichen Koordinatenachsen

156) $$\varphi = u - \eta\nu + \zeta\mu, \quad \chi = v - \zeta\lambda + \xi\nu, \quad \psi = w - \xi\mu + \eta\lambda$$

sind. Die lebendige Kraft der im Schwerpunkte vereint gedachten Gesamtmasse M des Körpers ist also:

157) $$\frac{M}{2}(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2).$$

Die lebendige Kraft der Drehung um den Schwerpunkt ist:

158) $$\tfrac{1}{2}(G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2) - G'\mu\nu - H'\lambda\nu - J'\lambda\mu = T_1.$$

Dabei haben G, H, J, G', H', J' dieselbe Bedeutung bezüglich dreier durch den Schwerpunkt parallel $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ und $\Omega\zeta$ gelegter Achsen, die sie früher bezüglich $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ hatten. Haben noch $G_1, H_1, J_1, G_1', H_1', J_1'$ dieselbe Bedeutung bezüglich der Achsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, so ist also

$$G_1 = G + M\xi^2, \qquad H_1 = H + M\eta^2, \qquad J_1 = J + M\zeta^2$$
$$G_1' = G' + M\eta\zeta, \qquad H_1' = H' + M\xi\zeta, \qquad J_1' = J' + M\xi\eta$$

(vergl. Formel 149), § 57 des I. Teiles).

Die gesamte lebendige Kraft des Körpers ist nach dem im I. Teile am Schlusse des § 64 entwickelten Theorem die Summe der Ausdrücke 157) und 158), also wenn man noch die Werte 156) substituiert:

$$159) \begin{cases} T = \frac{M}{2}[(u-\eta\nu+\zeta\mu)^2+(v-\zeta\lambda+\xi\nu)^2+(w-\xi\mu+\eta\lambda)^2]+ \\ + \frac{1}{2}(G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2) - G'\mu\nu - H'\lambda\nu - J'\lambda\mu. \end{cases}$$

Wir wollen nun die Summe der Komponenten aller auf den Körper wirkenden Kräfte in den Richtungen der beweglichen Koordinatenachsen mit X, Y, Z bezeichnen. Die Größe X ist dann nach dem Schwerpunktssatze gleich der Gesamtmasse M des Körpers multipliziert mit der Beschleunigung des Schwerpunktes in der Richtung, die mit der Richtung zusammenfällt, welche die bewegliche Abszissenachse gerade zur Zeit t hat. Die Geschwindigkeitskomponente des Schwerpunktes in dieser Richtung ist zur Zeit t gleich φ. Zur Zeit $t+\tau$ haben die beweglichen Koordinatenachsen etwas andere Richtungen: $\Omega_1\xi_1$, $\Omega_1\eta_1$, $\Omega_1\zeta_1$. Die Komponenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes in diesen Richtungen sind zur Zeit $t+\tau$:

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{d\varphi}{dt}\tau, \quad \chi_1 = \chi + \frac{d\chi}{dt}\tau, \quad \psi_1 = \psi + \frac{d\psi}{dt}\tau.$$

Die Komponente der Geschwindigkeit des Schwerpunktes zur Zeit $t+\tau$ in der Richtung, welche die bewegliche Abszissenachse zur Zeit t hatte, ist daher:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \cos(\Omega\xi, \Omega_1\xi_1) + \chi_1 \cos(\Omega\xi, \Omega_1\eta_1) + \psi_1 \cos(\Omega\xi, \Omega_1\zeta_1).$$

Nun ist bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung $\cos(\Omega\xi, \Omega_1\xi_1) = 1$. Da wir ferner sahen, daß sich die Drehungen der Parallelverschiebung einfach superponieren, so ist analog mit 141)

$$\cos(\Omega\xi, \Omega_1\eta_1) = -\nu\tau, \qquad \cos(\Omega\xi, \Omega_1\zeta_1) = \mu\tau,$$

daher mit Vernachlässigung von unendlich Kleinem von der Ordnung τ^2:

$$\varphi_2 = \varphi + \frac{d\varphi}{dt}\tau - \chi\nu\tau + \psi\mu\tau.$$

Die Beschleunigung des Schwerpunktes in der Richtung, welche die bewegliche Abszissenachse zur Zeit t hatte, aber ist

$$\lim \frac{\varphi_2 - \varphi}{\tau} = \frac{d\varphi}{dt} - \nu\chi + \mu\psi,$$

und da diese Beschleunigung mit M multipliziert gleich X sein muß, so hat man schließlich:

$$M\frac{d\varphi}{dt} = M\nu\chi - M\mu\psi + X.$$

Diese Gleichung kann mit Rücksicht auf den Wert 159) von T und die Werte 156) von φ, χ, ψ auch so geschrieben werden

160) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} = \nu\frac{\partial T}{\partial v} - \mu\frac{\partial T}{\partial w} + X,$$

was mit der Gleichung 12) der 6. Vorlesung der Kirchhoffschen Mechanik übereinstimmt.

Da die Drehung um den Schwerpunkt genau so geschieht, als ob dieser festgehalten wäre, so hat man entsprechend den Gleichungen 99) und 100)

161) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} = \nu\frac{\partial T_1}{\partial \mu} - \mu\frac{\partial T_1}{\partial \nu} + D_1,$$

wobei D_1 das Drehungsmoment aller auf den Körper wirkenden Kräfte um eine der beweglichen Abszissenachsen parallel durch den Schwerpunkt gezogene Achse ist. Bezeichnen wir mit D das Drehungsmoment derselben Kräfte bezüglich einer Achse, die mit der Lage der beweglichen Abszissenachse zur Zeit t zusammenfällt, so ist nach § 29 des I. Teiles:

$$D = D_1 + \eta Z - \zeta Y.$$

Wir können daher die Gleichung 161) in der Form schreiben:

162) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} = \nu\frac{\partial T_1}{\partial \mu} - \mu\frac{\partial T_1}{\partial \nu} - \eta Z + \zeta Y + D.$$

Nun folgt aus 158) und 159):

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{\partial T_1}{\partial \lambda} - \zeta\frac{\partial T}{\partial v} + \eta\frac{\partial T}{\partial w}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \frac{\partial T_1}{\partial \mu} - \xi\frac{\partial T}{\partial v} + \zeta\frac{\partial T}{\partial u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = \frac{\partial T_1}{\partial \nu} - \eta\frac{\partial T}{\partial u} + \zeta\frac{\partial T}{\partial v}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} - \zeta\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} +$$

$$+ \eta\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} - \psi\frac{\partial T}{\partial v} + \chi\frac{\partial T}{\partial w} \quad \text{etc.}$$

Drückt man vermöge dieser Gleichungen die in 162) erscheinenden Werte von $\frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial T_1}{\partial \mu}$ und $\frac{\partial T_1}{\partial \nu}$ durch $\frac{\partial T}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial T}{\partial \mu}$ und $\frac{\partial T}{\partial \nu}$ aus und substituiert für X, Y, Z deren Werte aus 160), so liefert die Gleichung 162)

163) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \nu\frac{\partial T}{\partial \lambda} - \mu\frac{\partial T}{\partial \nu} + w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + D,$$

was mit Kirchhoffs Gleichungen 13) (l. c.) übereinstimmt.

Die Komponente der Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Richtung der fixen Abszissenachse ist entsprechend den Gleichungen 153):

$$u_x\varphi + v_x\chi + w_x\psi = \left(u_x\frac{\partial T}{\partial u} + v_x\frac{\partial T}{\partial v} + w_x\frac{\partial T}{\partial w}\right)\frac{1}{M}.$$

Da die fixen Achsen ihre Lage im Raume nicht ändern, so ist die Komponente der Beschleunigung des Schwerpunktes in der fixen Abszissenrichtung einfach der Differentialquotient dieser Größe nach der Zeit. Multipliziert man diesen noch mit M, so muß das Produkt gleich der Summe X_{fix} der Komponenten aller auf den Körper wirkenden Kräfte in der Richtung der fixen Abszissenachse sein, wodurch man die Gleichung

164) $$\frac{d}{dt}\left(u_x\frac{\partial T}{\partial u} + v_x\frac{\partial T}{\partial v} + w_x\frac{\partial T}{\partial w}\right) = X_{fix}$$

erhält, welche mit der ersten der von Kirchhoff (l. c.) mit Nummer 14 bezeichneten Gleichungen identisch ist.

Endlich sind die Flächenmomente des ganzen Körpers bezüglich dreier durch dessen Schwerpunkt S parallel der

augenblicklichen Richtung der Achsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ gezogenen Achsen gleich $\frac{\partial T_1}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial T_1}{\partial\mu}$, $\frac{\partial T_1}{\partial\nu}$. Die Flächenmomente des Körpers bezüglich dreier gleichgerichteter, durch den fixen Koordinatenursprung O gezogener Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sind nach § 31, S. 112 des I. Teiles um die Momente größer, welche der stets in S befindlichen und mit S mitbewegten Masse M bezüglich der letzteren Achsen zukäme. Da die Punkte O und S bezüglich der Achsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ die Koordinaten a, b, c resp. ξ, η, ζ haben, so sind die Koordinaten von S bezüglich der Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ gleich $\xi - a$, $\eta - b$, $\zeta - c$. Die Geschwindigkeitskomponenten von S in den Richtungen der beweglichen Koordinatenachsen sind nach 156)

$$\frac{1}{M}\frac{\partial T}{\partial u}, \quad \frac{1}{M}\frac{\partial T}{\partial v}, \quad \frac{1}{M}\frac{\partial T}{\partial w},$$

daher ist das Flächenmoment der in S konzentriert gedachten Masse M bezüglich der Achse $O\xi$:

$$(\eta - b)\frac{\partial T}{\partial w} - (\zeta - c)\frac{\partial T}{\partial v}.$$

Das Flächenmoment m_ξ des ganzen Körpers bezüglich derselben Achse finden wir, indem wir hierzu noch $\frac{\partial T_1}{\partial\lambda}$ addieren. Daraus ergeben sich dann durch zyklische Vertauschung die Flächenmomente m_η und m_ζ des Körpers bezüglich $O\eta$ und $O\zeta$, so daß man hat:

165) $$\left\{\begin{aligned} m_\xi &= (\eta - b)\frac{\partial T}{\partial w} - (\zeta - c)\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial T_1}{\partial\lambda} \\ m_\eta &= (\zeta - c)\frac{\partial T}{\partial u} - (\xi - a)\frac{\partial T}{\partial w} + \frac{\partial T_1}{\partial\mu} \\ m_\zeta &= (\xi - a)\frac{\partial T}{\partial v} - (\eta - b)\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial T_1}{\partial\nu}. \end{aligned}\right.$$

Das Flächenmoment des Körpers bezüglich der fixen Abszissenachse aber ist:

$$m_x = u_x m_\xi + v_x m_\eta + w_x m_\zeta.$$

Hier hat man für m_ξ, m_η, m_ζ die Werte 165) zu substituieren. Bedenkt man, daß die Abszisse des Punktes O bezüglich der Achsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ gleich

$$a = -\alpha u_x - \beta u_y - \gamma u_z$$

ist, daß aus 160) folgt

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \eta \frac{\partial T}{\partial w} - \zeta \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$$

und nimmt dazu die vier aus diesen beiden Gleichungen durch zyklische Vertauschung folgenden Gleichungen, so ergibt sich unter Zuziehung der Gleichungen 140a):

166) $$\begin{cases} m_x = (\beta u_z - \gamma u_y)\frac{\partial T}{\partial u} + (\beta v_z - \gamma v_y)\frac{\partial T}{\partial v} + \\ \quad + (\beta w_z - \gamma w_y)\frac{\partial T}{\partial w} + u_x \frac{\partial T}{\partial \lambda} + v_x \frac{\partial T}{\partial \mu} + w_x \frac{\partial T}{\partial \nu}. \end{cases}$$

Setzt man den Differentialquotienten dieser Größe nach der Zeit gemäß dem Flächensatze gleich dem gesamten Drehungsmoment D_{fx} aller Kräfte bezüglich der fixen Abszissenachse und bildet aus der betreffenden Gleichung durch zyklische Vertauschung zwei neue Gleichungen, so erhält man das letzte System der für einen vollkommen freien Körper geltenden Gleichungen. Man sieht sofort, daß es unter Berücksichtigung der Abweichungen unserer Bezeichnungen von denen Kirchhoffs mit dem Gleichungssysteme identisch ist, welches dieser l. c. mit Nummer 15 bezeichnet.

III. Die verschiedenen Formen des Wirkungsprinzipes.

---

§ 27. Die Gleichungen, welche für nicht holonome generalisierte Koordinaten an die Stelle der Lagrangeschen treten.

Ehe wir die allgemeine Diskussion der verschiedenen Formen des Wirkungsprinzipes in Angriff nehmen, wollen wir noch die Zusatzglieder berechnen, welche zu den Lagrangeschen Gleichungen hinzutreten, wenn die angewandten generalisierten Koordinaten nicht holonom sind. Sie sind

dann jedenfalls durch Gleichungen von der Form der Gleichungen 23) mit den rechtwinkligen verknüpft.

Wir nennen den aus diesen bei Konstanthaltung aller p_k folgenden Differentialquotienten von x_k nach t den partiellen nach t und bezeichnen ihn mit $\partial x_k/\partial t$; eine analoge Bedeutung hat $\partial x_k/\partial p_h$, so daß man also hat:

167) $$\frac{\partial x_k}{\partial t} = \Pi^k, \quad \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \Pi_h^k.$$

Aus denselben Gleichungen folgt:

168) $$x'_k = \Pi^k + \sum_1^s{}_h \Pi_h^k p'_h.$$

Dagegen ist bei Bildung der δx_k die Zeit konstant zu erhalten, so daß man hat:

169) $$\delta x_k = \sum_1^s{}_h \Pi_h^k \delta p_h.$$

Versteht man daher unter einem partiellen Differentialquotienten der x'_k einen solchen, wobei von den Variabeln t, p_h und p'_h alle konstant erhalten werden, bis auf die eine, nach welcher differenziert wird, so ist:

170) $$\frac{\partial x'_k}{\partial p_h} = \frac{\partial \Pi^k}{\partial p_h} + \sum_1^s{}_i \frac{\partial \Pi_i^k}{\partial p_h} p'_i,$$

171) $$\frac{\partial x'_k}{\partial p'_h} = \Pi_h^k = \frac{\partial x_k}{\partial p_h},$$

letzteres gemäß den Gleichungen 167). Durch Differentiation derselben Gleichungen folgt:

172) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \frac{\partial \Pi_h^k}{\partial t} + \sum_1^s{}_i \frac{\partial \Pi_h^k}{\partial p_i} p'_i.$$

Es ist also:

$$\frac{\partial x'_k}{\partial p_h} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \frac{\partial \Pi^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \Pi_h^k}{\partial t} + \sum_1^s{}_i p'_i \left(\frac{\partial \Pi_i^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \Pi_h^k}{\partial p_i}\right).$$

Wir setzen nun kürzehalber

173) $$\frac{\partial \Pi^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \Pi_h^k}{\partial t} = \mathfrak{X}_h^k, \quad \frac{\partial \Pi_i^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \Pi_h^k}{\partial p_i} = \mathfrak{X}_{hi}^k,$$

so daß wir schreiben können:

$$174)\qquad \frac{\partial x'_k}{\partial p_h} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \mathfrak{g}^k_h + \sum_1^s{}^i \mathfrak{g}^k_{hi} p'_i .$$

Die geometrische Bedeutung der hier neu eingeführten Größen ergibt sich durch folgende Betrachtungen.

Läßt man zuerst p_h um dp_h und hernach p_i um dp_i wachsen, so nimmt die Größe x_k zuerst um $\Pi^k_h dp_h$, hernach um $\left(\Pi^k_i + \frac{\partial \Pi^k_i}{\partial p_h} dp_h\right) dp_i$ zu. Diejenige Stelle des Raumes, wohin während dieses ganzen Prozesses der materielle Punkt, dessen Masse m_r ist, von seiner Ausgangsstellung aus verschoben wird, heiße B^r_{hi}. Nun soll umgekehrt zuerst p_i und dp_i und dann erst p_h um dp_h wachsen, so daß zuerst x_k um $\Pi^k_i dp_i$ und dann um $\left(\Pi^k_h + \frac{\partial \Pi^k_h}{\partial p_i} dp_i\right) dp_h$ wächst. Dabei gelange derselbe materielle Punkt, dessen Masse m_r ist, von seiner unverschobenen Lage nach A^r_{hi}. Man sieht sofort, daß, wenn $k = r$, $r+1$ oder $r+2$ ist, die Größe

$$\left(\frac{\partial \Pi^k_i}{\partial p_h} - \frac{\partial \Pi^k_h}{\partial p_i}\right) dp_h\, dp_i = \mathfrak{g}^k_{hi} dp_h\, dp_i$$

nichts anderes ist, als die Projektion der geraden Verbindungslinie $A^r_{hi} B^r_{hi}$ der beiden Punkte A^r_{hi} und B^r_{hi} des Raumes auf diejenige Koordinatenachse, nach welcher die x_k gezählt werden. Bezeichnet man diese Projektion mit $C^k_{hi} D^k_{hi}$, so ist also:

$$\mathfrak{g}^k_{hi} = \lim \frac{C^k_{hi} D^k_{hi}}{dp_h\, dp_i} .$$

Ähnlich seien E^r_h und F^r_h die beiden Punkte des Raumes, wohin sich das Massenteilchen m_r verschiebt, wenn einmal zuerst t um dt und dann p_h um dp_h, das andere Mal zuerst p_h um dp_h, dann erst t um dt wächst. Ferner sei $G^k_h H^k_h$ die Projektion von $E^r_h F^r_h$ auf diejenige Koordinatenachse, nach welcher die x_k gezählt werden. In derselben Weise, in der sich früher die geometrische Bedeutung von $\mathfrak{g}^k_{hi}$ ergab, findet man jetzt, daß

$$\xi^k_h = \lim \frac{G^k_h H^k_h}{dt\,dp_h}$$

ist.

Bezeichnet man die Faktoren, mit denen **Lagrange** die Bedingungsgleichungen 6) multipliziert, mit $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_r$, so folgt aus 6) und 4) in der bekannten Weise:

175) $$X_k = m_k x_k'' + \sum_1^r {}^l \mu_l \xi^l_k, \quad k = 1, 2, 3 \ldots 3n.$$

Führt man in dem Ausdrucke $\sum_1^{3n} {}^i X_k \delta x_k$ statt der δx_k die δp_h vermöge der Gleichungen 23) ein, welche in unserem Falle liefern: $\delta x_k = \sum_1^s {}^h \Pi^k_h \delta p_h$, so erhält man:

176) $$\sum_1^{3n} {}^k X_k \delta x_k = \sum_1^s {}^h \sum_1^{3n} {}^k X_k \Pi^k_h \delta p_h.$$

Der Koeffizient von δp_h in dem Ausdrucke rechts soll, wie bei holonomen generalisierten Koordinaten die nach der Koordinate p_h wirkende Kraft genannt und mit P_h bezeichnet werden, so daß man also hat

177) $$P_h = \sum_1^{3n} {}^k X_k \Pi^k_h = \sum_1^{3n} {}^k \left(m_k x_k'' + \sum_1^r {}^l \mu_l \xi^l_k\right) \Pi^k_h;$$

letzteres gemäß der Gleichung 175).

Wir wollen nun, wie wir es bei Ableitung der **Lagrange**schen Gleichungen im vorigen Paragraphen taten, den Ausdruck $x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}$ nach der Zeit differenzieren. Es folgt:

178) $$\frac{d}{dt}\left(x_k' \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = x_k'' \frac{\partial x_k}{\partial p_h} + x_k' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right).$$

Bei holonomen Koordinaten kann man offenbar ohne weiteres

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \frac{\partial x'_k}{\partial p_h}$$

setzen. Allein bei nichtholonomen ist dies nicht mehr gestattet. Denn es ist:

$$x_k' = \Pi^k + \sum_1^s {}^i \Pi^k_i p_i',$$

daher:

$$\frac{\partial x'_k}{\partial p_h} = \frac{\partial \Pi^k_h}{\partial p_h} + \sum_1^s {}^i \frac{\partial \Pi^k_i}{\partial p_i} p'_i,$$

wogegen:

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \Pi^k_h,$$

daher:

179) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \frac{d\,\Pi^k_h}{\partial t} + \sum_1^s {}^i \frac{\partial \Pi^k_h}{\partial p_i} p'_i$$

ist. Man hat daher:

$$\frac{d}{dt}\left(x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = x''_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h} + x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p_h} + x'_k \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial p_h} - \frac{\partial x'_k}{\partial p_h}\right),$$

oder nach Gleichung 174):

180) $$\frac{d}{dt}\left(x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = x''_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h} + x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p_h} - x'_k\left(\mathfrak{x}^k_h + \sum_1^s {}^i \mathfrak{x}^k_{hi} p'_i\right).$$

Wir multiplizieren nun diese Gleichung mit m_k, addieren beiderseits $\sum_1^r {}^l \mu_l \xi^l_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}$ und summieren schließlich bezüglich k von 1 bis $3n$.

Beginnen wir ganz links und schreiten zu immer mehr rechtsstehenden Gliedern der Gleichung 180) vor, so ist

1. nach Gleichung 171):

181) $$\sum_1^{3n} {}^k m_k \frac{d}{dt}\left(x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}\right) = \frac{d}{dt}\sum_1^{3n} {}^k m_k x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p'_h} = \frac{d q_h}{dt}.$$

q_h hat die bekannte Bedeutung. Es ist das Moment bezüglich der h-ten Koordinate und wird gebildet, indem man die lebendige Kraft

182) $$T = \sum_1^{3n} {}^k m_k x'^2_k$$

als Funktion der p_h und p'_h ausdrückt und dann nach p'_h partiell differenziert.

2. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die p_h die Bedingungsgleichungen identisch erfüllen. Dann ist bei konstanter Zeit für jedes l $(1, 2 \ldots \sigma)$:

$$183)\qquad \sum_{1}^{3n}{}^{k}\, \xi_k^l\, \delta x_k = 0,$$

wenn sich die p_h beliebig ändern, daher auch, wenn alle anderen bis auf eines, das wir wieder p_h nennen wollen, sowie die Zeit konstant bleiben. Mit anderen Worten, es ist für jeden Wert von l und h:

$$184)\qquad \sum_{1}^{3n}{}^{k}\, \xi_k^l \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = 0, \quad l = 1, 2, 3 \ldots \tau. \quad h = 1, 2, 3 \ldots s.$$

3. Nach Gleichung 177) ist:

$$185)\qquad \sum_{1}^{3n}{}^{k}\left(m_k x_k'' + \sum_{1}^{\tau}{}^{l}\, \mu_l\, \xi_k^l\right)\frac{\partial x_k}{\partial p_h} = P_h.$$

4. Aus Gleichung 182) folgt:

$$186)\qquad \sum_{1}^{3n}{}^{k}\, m_k\, x'_k \frac{\partial x'_k}{\partial p_h} = \frac{\partial T}{\partial p_h}.$$

Es ergibt sich also:

$$187)\qquad \frac{d q_h}{d t} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_{1}^{3n}{}^{k}\, m_k\, x'_h \left(\mathfrak{c}_h^k + \sum_{1}^{s}{}^{k}\, \mathfrak{c}_{hi}^k\, p'_i\right).$$

Es sei nun $\mathfrak{v}_r$ sowohl die Größe als auch die Richtung der Geschwindigkeit des r-ten materiellen Punktes, welcher die Masse $m_r = m_{r+1} = m_{r+2}$ hat, so daß x'_r, x'_{r+1}, x'_{r+2} die Komponenten von $\mathfrak{v}_r$ in den drei Koordinatenrichtungen sind. Ferner seien $\mathfrak{u}_h^r$ und $\mathfrak{u}_{hi}^r$ die Richtungen und die durch $dt\,dp_h$ resp. $dp_h\,dp_i$ dividierten Größender Geraden, welche früher mit $E_h^r F_h^r$ und $A_{hi}^r B_{hi}^r$ bezeichnet wurden. Dann kann man die Gleichung 187) auch in der Form schreiben:

[1]) Wenn auch die Zeit δt wachsen würde, so würden die x zudem etwas andere Funktionen der p werden und man hätte jetzt für jedes l:

$$\xi^l \delta t + \sum_{1}^{3n}{}^{k}\, \xi_k^l\, \delta x_k = 0.$$

Diese Gleichung gilt jedoch für unsere jetzigen Betrachtungen nicht, da mit allen bisher durch das Zeichen δ bezeichneten Variationen keine Veränderung der Zeit verknüpft ist.

$$188)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d q_h}{d t} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \Sigma_r m_r \mathfrak{v}_r \Big[\mathfrak{u}_r^h \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_r^h) + \\ + \sum_1^s {}^\iota\, \mathfrak{u}_{h\iota}^r \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_{h\iota}^r) \Big], \end{aligned} \right.$$

wobei in der ersten Summe r bloß die Werte $1, 4, 7 \ldots 3n-2$ zu durchlaufen hat.

Hiermit ist also 1. erwiesen, dass die Lagrangeschen Gleichungen in unveränderter Form bei Anwendung nichtholonomer Koordinaten ungültig sind, und 2. jedesmal das Korrektionsglied berechnet, welches man ihnen beifügen muss, damit sie wieder gültig werden.

Der Beweis erleidet nur eine unwesentliche Modifikation, wenn die Anzahl s der generalisierten Coordinaten größer ist als die Anzahl $i = 3n - \tau$ der Freiheitsgrade des Systems. Dann bleiben zwischen den generalisierten Koordinaten noch $s - i = \sigma$ Bedingungsgleichungen bestehen, von denen einige holonom, andere nichtholonom sein können. Von den τ zwischen den rechtwinkligen Koordinaten bestehenden Bedingungsgleichungen werden dann also bloß $\tau - \sigma$ durch die generalisierten Koordinaten identisch erfüllt.

Die Variationen δx_k der rechtwinkligen Koordinaten bei konstanter Zeit müssen nach wie vor die τ Gleichungen 6) erfüllen. Wir können alle diese Gleichungen in eine einzige zusammenfassen, indem wir jede mit einem willkürlichen Faktor μ_l multiplizieren und nachher alle addieren. Dadurch erhalten wir die resultierende Gleichung:

$$189)\quad \sum_1^\tau {}^l \sum_1^{3n} {}^k \mu_l \xi_k^l \,\delta x_k = 0.$$

Die Festsetzung, daß diese Gleichung für beliebige Werte der μ bestehen soll, vertritt vollkommen die τ Gleichungen 6).

Wenn wir nun in der Gleichung 189) die δx durch die δp ersetzen, so muß sich die Anzahl der willkürlichen Faktoren λ von τ auf σ reduzieren, da ja zwischen den δp nur σ Gleichungen bestehen, welche wir in der Form schreiben wollen:

190) $$\sum_1^s{}^h \pi_h^l \,\delta p_h = 0\,, \quad l = 1, 2 \ldots \sigma.$$

Die Gleichung 189) muß sich daher nach Einführung der δp auf folgende reduzieren:

$$\sum_1^\sigma{}^l \sum_1^s{}^h \lambda_l \,\pi_h^l \,\delta p_h = 0\,,$$

wobei die λ jedenfalls σ lineare, voneinander unabhängige Funktionen der μ sind.

Die Faktoren $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\tau$ wurden nun nach Lagrange so gewählt, daß der Ausdruck

$$\sum_1^{3n}{}^k \left(X_k - m_k \frac{d^2 x_k}{d t^2} + \sum_1^\tau{}^l \mu_l \,\xi_k^l \right) \delta x_k$$

für alle Werte der δx_k verschwindet. Nach Einführung der generalisierten Koordinaten verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\sum_1^s{}^h \left\{ P_h - \frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_1^{3n}{}^k m_k x'_k \left(\xi_h^k + \sum_1^s{}^l \xi_{hl}^k \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_1^\sigma{}^l \lambda_l \,\pi_k^l \right\} \delta p_h = 0$$

oder

$$\sum_1^\nu{}^h \left\{ P_h - \frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \Sigma_r \, m_r \, \mathfrak{v}_r \left[\mathfrak{u}_h^r \cos(\mathfrak{v}_r \, \mathfrak{u}_h^r) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \sum_1^s{}^l \mathfrak{u}_{hl}^r \cos(\mathfrak{v}_r \, \mathfrak{u}_{hl}^r) \right] + \sum_1^\sigma{}^l \lambda_l \,\pi_h^l \right\} \delta p_h = 0,$$

wobei wieder r die Werte $1, 4, 7 \ldots 3n - 2$ zu durchlaufen hat. Wegen der für die μ getroffenen Wahl, aus welcher analoge Eigenschaften für die λ resultierten, muß die linke Seite der letzten beiden Gleichungen für alle überhaupt möglichen Werte der δp_h verschwinden und man erhält die Bewegungsgleichungen:

$$
191)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d q_h}{d t} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_1^{3n} {}^k m_k x'_k \left(\mathfrak{x}_h^k + \sum_1^{s} {}^i \mathfrak{x}_{hi}^k p'_i \right) + \\ + \sum_1^{\sigma} {}^l \lambda_l \pi_h^l , \end{aligned}\right.
$$

oder

$$
192)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d q_h}{d t} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \Sigma_r m_r \mathfrak{v}_r \Big[\mathfrak{u}_h^r \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_h^r) + \\ + \sum_1^{s} {}^i \mathfrak{u}_{hi}^r \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_{hi}^r) \Big] + \sum_1^{\sigma} {}^l \lambda_l \pi_h^l = 0. \end{aligned}\right.
$$

Die durch den Mangel der Holonomität der Koordinaten bedingten Zusatzglieder zu den Lagrangeschen Gleichungen sind also ganz dieselben geblieben, wie in dem Falle, dass die Anzahl der generalisierten Koordinaten gleich der Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist, so daß zwischen den generalisierten Koordinaten keine Gleichungen mehr übrig bleiben und es ist somit die gestellte Aufgabe in voller Allgemeinheit gelöst.

§ 28. Beispiel zum vorigen Paragraphen.

Wir wollen die gefundenen allgemeinen Gleichungen an folgendem Beispiele[1]) illustrieren. Zwei Riemenscheiben sind durch einen Treibriemen verbunden, welcher parallel der Achse der Scheiben in ähnlicher Weise hin- und hergeschoben werden kann, wie man einen Treibriemen von einer wirkenden Scheibe auf eine Leerscheibe oder umgekehrt verschiebt. Die eine Riemenscheibe verjüngt sich nach einer Seite hin, wogegen sich die andere nach der entgegengesetzten Seite nach einem solchen Gesetze verjüngt, daß ein und derselbe Treibriemen überall paßt, wenn er in der geschilderten Weise verschoben wird. Eine solche Verschiebung des Riemens bewirkt gewissermaßen eine Veränderlichkeit der Radien r_1 und r_2 der beiden Riemenscheiben und daher auch des Übersetzungsverhältnisses $p_2 = r_1 / r_2$.

---

[1]) Borchardts Journ. Bd. 98, Heft 1, S. 87, 1885.

Ist daher p'_1 die Winkelgeschwindigkeit der einen, w' die der anderen Riemenscheibe, so hat man $w' = p_2 p'_1$. Wenn p_2 veränderlich ist, so kann man p_2 und die gesamte Winkeldrehung p_1 der ersten Riemenscheibe während einer gewissen Zeit als Koordinaten eines Punktes A, der entweder der zweiten Riemenscheibe angehört oder mit ihr fest verbunden ist, wählen. Es sind dies nichtholonome Koordinaten, da es zur Bestimmung der Lage des Punktes A nicht gleichgültig ist, ob zuerst p_1 und dann p_2, oder umgekehrt zuerst p_2 und dann p_1 sich um dieselben Beträge ändern.

Der gleiche Effekt würde erzielt, wenn sich zwischen zwei nach entgegengesetzten Seiten konisch sich verjüngenden drehbaren Rotationskörpern eine Scheibe S drehen würde, die auf keinem der Rotationskörper gleiten könnte und die parallel ihrer Drehungsachse verschiebbar wäre.

Man kann vielleicht zweifeln, ob derartige Bedingungen ohne jede Gleitung realisierbar sind. Jedenfalls haben aber die Bedingungen, an welche wir uns das aus den beiden Riemenscheiben bestehende mechanische System gebunden dachten, genau die Eigenschaften, welche Hertz in seiner Mechanik von nichtholonomen Bedingungen fordert (Hertz's Mechanik, 1. Buch, Abschnitt IV). Daß das in diesem Beispiele gebrauchte mechanische System nicht holonom ist, ersieht man auch, wenn man bedenkt, dass die Winkelstellung w der zweiten Riemenscheibe nur durch die Gleichung $dp_2 = a\,dp_1$ bestimmt ist, welche nicht integriert werden kann. Daher ist diese Winkelstellung und die Lage jeder Masse, deren Bewegung davon abhängt, in nicht holonomer Weise durch die Koordinaten p_1 und p_2 bestimmt.

Die Summe der lebendigen Kraft aller mit den beiden Riemenscheiben fest verbundenen Massen kann als Funktion von p_2 und $\frac{dp_1}{dt}$ ausgedrückt werden. Sie ist

$$T = \tfrac{1}{2}(K + Lp_2^2)p'^2_1,$$

wenn t die Zeit ist und K und L die Trägheitsmomente aller mit der ersten, respektive zweiten Riemenscheibe fest verbundenen Massen bezüglich der jeweiligen Drehungsachsen

sind. Alles übrige denken wir uns dabei massenlos, so unter anderen den Riemen, resp. die Scheibe S.

Wir wollen die Bewegungsgleichungen nur in dem speziellen Falle ableiten, daß unser ganzes System aus einem einzigen Massenpunkte von der Masse m besteht, welcher mit der Achse im unveränderlichen Abstande r davon fest verbunden ist, um welche die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit w' geschieht. Dann ist also $K = 0$, $L = mr^2$.

Wir wählen die Ebene, in welcher die Masse m rotiert, als Koordinatenebene, den Mittelpunkt des Kreises, in dem sie sich bewegt, als Koordinatenursprung, und bezeichnen die rechtwinkligen Koordinaten der Masse m zu irgend einer Zeit mit x_1, x_2.

Dann reduzieren sich die Gleichungen 23) auf

193) $$dx_1 = \Pi^1_1\, dp_1 + \Pi^1_2\, dp_2, \quad dx_2 = \Pi^2_1\, dp_1 = \Pi^2_2\, dp_2,$$

wobei

$$\Pi^1_2 = \Pi^2_2 = 0, \quad \Pi^1_1 = -p_2 x_2, \quad \Pi^2_1 = p_2 x_1.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial \Pi^1_1}{\partial p_1} = -p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = -p_2{}^2 x_1$$

$$\frac{\partial \Pi^1_1}{\partial p_2} = -x_2 - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_2} = -x_2$$

$$\frac{\partial \Pi^2_1}{\partial p_1} = p_2 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = p_2{}^2 x_1, \quad \frac{\partial \Pi^2_1}{\partial p_2} = x_1 + p_2 \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = x_1.$$

194) $$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{x}^1_{12} &= -\mathfrak{x}^1_{21} = \frac{\partial \Pi^1_2}{\partial p_1} - \frac{\partial \Pi^1_1}{\partial p_2} = x_2 \\ \mathfrak{x}^2_{12} &= -\mathfrak{x}^2_{21} = \frac{\partial \Pi^2_2}{\partial p_1} - \frac{\partial \Pi^2_1}{\partial p_2} = -x_1. \end{aligned} \right.$$

$$\mathfrak{x}^1_{11} = \mathfrak{x}^1_{22} = \mathfrak{x}^2_{11} = \mathfrak{x}^2_{22} = 0, \quad x'_1 = -x_2 p_2 p'_1, \quad x'_2 = x_1 p_2 p'_1.$$

Das Gleichungssystem 187) reduziert sich auf die beiden Gleichungen:

195) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= P_1 + \frac{\partial T}{\partial p_1} - m[x'_1(\mathfrak{x}^1_{11} p'_1 + \mathfrak{x}^1_{12} p'_2) + \\ &\qquad + x'_2(\mathfrak{x}^2_{11} p'_1 + \mathfrak{x}^2_{12} p'_2)] \\ \frac{dq_2}{dt} &= P_2 + \frac{\partial T}{\partial p_2} - m[x'_1(\mathfrak{x}^1_{21} p'_1 + \mathfrak{x}^1_{22} p'_2) + \\ &\qquad + x'_2(\mathfrak{x}^2_{21} p'_1 + \mathfrak{x}^2_{22} p'_2)], \end{aligned} \right.$$

und die Substitution der gefundenen Werthe liefert:

196) $$\frac{d(p_2^2 p'_1)}{dt} = \frac{1}{m r^2} P_1 + p_2 p'_1 p'_2, \quad P_2 = 0.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen in ihrer gewöhnlichen Form aber würden falsche Bewegungsgleichungen liefern. So würde z. B. die gewöhnliche Lagrangesche Gleichung auf die Koordinate p_2 angewandt lauten:

$$\frac{d q_2}{dt} = P_2 + \frac{\partial T}{\partial p_2}.$$

Nun enthält der Ausdruck für T das p'_2 gar nicht, es ist also $q_2 = 0$, dagegen enthält er das ungestrichene p_2 und es ist $\partial T / \partial p_2 = m r^2 p_2 p'^2_1$. Aus der gewöhnlichen Form der Lagrangeschen Gleichung würde also folgen

$$P_2 = - m r^2 p_2 p'^2_1,$$

was, wie man leicht einsieht, eine Ungereimtheit wäre, wogegen das von uns gefundene Resultat $P_2 = 0$ physikalisch vollkommen evident ist.

Dieselben Gleichungen passen auf folgenden Fall. Mit einer horizontalen Achse sei eine vertikale ebene Scheibe fest verbunden. p_1 sei deren Drehung zu irgend einer Zeit. Daneben steht eine vertikale Achse von quadratischem Querschnitt, welche Massen trägt und deren Drehungswinkel w sei. Auf ihr gleite eine Röhre von gut passender Höhlung mit quadratischem Querschnitte. Mit der Röhre ist eine kreisförmige horizontale Scheibe vom Radius eins fest verbunden, welche auf der vertikalen Scheibe rollt und darauf zwar radial aber nicht tangential gleiten kann. Der veränderlich gedachte Abstand des Mittelpunktes der horizontalen Scheibe vom Punkte, wo die Verlängerung der horizontalen Achse die vertikale Achse trifft, ist p_2. Dem Übelstand, daß eine einzige in einem fixen Kreise bewegliche Masse durch zwei Koordinaten bestimmt erscheint, können wir abhelfen, indem wir die Gleichungen für den Fall ableiten, daß die Masse m oder eine zweite Masse mit der horizontalen Scheibe fest verbunden ist.

§ 29. Variation der Integrationsgrenzen.

Wir wollen nun wieder zu den Formeln des § 6 und speziell zur Gleichung 41) zurückkehren.

Für jede unter dem Einflusse gegebener Kräfte gegebenen Bedingungen gemäß erfolgende (natürliche) Bewegung gilt, wie dort bewiesen wurde, die Gleichung 42), aus welcher die Bewegungsgleichungen 43), resp. 49) folgen. Umgekehrt folgt aus den Bewegungsgleichungen die Gleichung 42); denn, wenn wir die allgemeinste Form der Bewegungsgleichungen, nämlich die Gleichung 49) mit δp_h multiplizieren und bezüglich aller h summieren, so erhalten wir

$$\sum_1^s{}^h \left(-\frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h\right) \delta p_h = \sum_1^r{}^l \sum_1^s{}^h \lambda^l \pi_h^l \, \delta p_h,$$

was infolge der Bedingungsgleichungen des Systems verschwindet. Multipliziert man die linke Seite mit dt und integriert von t_0 bis t_1, so ergibt sich in der Tat die Gleichung 42).

Mit Rücksicht auf diese Gleichung reduziert sich die Gleichung 41) auf:

$$197)\qquad \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_1^s{}^h P_h \, \delta p_h\right) d t = \sum_1^s{}^h \Big| \, q_h \, \delta p_h \, \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Diese Gleichung gilt jedesmal, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die unvariierte Bewegung muß eine „natürliche“ sein, d. h. sie muß mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sein und ihr zeitlicher Verlauf muß die Bewegungsgleichungen des Systems erfüllen.

2. Die Variation muß ebenfalls mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sein, d. h. für ein holonomes System muß jeder Zustand der variierten Bewegung, für ein nicht holonomes aber jeder Übergang von irgend einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sein.

Besonders wichtig ist der Fall, daß eine Kraftfunktion V existiert, daß also

$$\sum_1^s{}^h P_h \delta p_h = -\delta'' V$$

die vollständige Variation einer Funktion $-V$ der verallgemeinerten Koordinaten darstellt und daher mit $-\delta V$ zu bezeichnen ist. Die Funktion V kann auch die Zeit explizit enthalten; allein dann darf die Zeit nicht variiert werden.

Da es für das Folgende von besonderer Wichtigkeit ist, so heben wir nochmals hervor, daß V lediglich die für die unvariierte Bewegung geltende Kraftfunktion bedeutet, und daß daher unter δV nur die Variation des V zu verstehen ist, welche dadurch bewirkt wird, daß bei der variierten Bewegung die Koordinaten statt p_h die Werthe $p_h + \delta p_h$ haben. Eine etwaige Kraftfunktion der Zusatzkräfte, welche den Übergang der unvariierten in die variierte Bewegung bewirken, ist niemals in δV einzubegreifen.

Wir setzen, wenn eine Kraftfunktion existiert, ein für allemal:

198) $$T - V = H, \quad T + V = E.$$

Die Gleichung 197) reduziert sich dann auf

199) $$\int_{t_0}^{t_1} \delta H dt = \sum_1^s{}^h \left| q_h \delta p_h \right|_{t_0}^{t_1}.$$

Es seien nun, wie bisher immer, p_h, p'_h und q_h die Werte einer beliebigen (der h-ten) Koordinate, der entsprechenden Geschwindigkeit und des entsprechenden Momentes zu irgend einer Zeit t für die unvariierte Bewegung; $\mathfrak{p}_h = p_h + \delta p_h$, $\mathfrak{p}' = p'_h + \delta p'_h$, $\mathfrak{q}_h = q_h + \delta q_h$ aber seien die Werte derselben Koordinate, Geschwindigkeit und desselben Momentes zur selben Zeit bei der variierten Bewegung.

Ferner seien T und V die Werte, welche die lebendige Kraft und die Kraftfunktion annehmen, wenn man darin für die Zeit, die Koordinaten und in T auch für die Geschwindigkeiten oder Momente die Werte t, p_h, p'_h, q_h substituiert, $\mathfrak{T} = T + \delta T$, $\mathfrak{V} = V + \delta V$ aber die Werte, welche diese Größen für dieselbe Zeit t annehmen, wenn man für die Koordinaten, Geschwindigkeiten und Momente die Werte $\mathfrak{p}_h$,

$\mathfrak{p}'_h$, $\mathfrak{q}_h$ substituiert. Da V und T dieselben Funktionen der Zeit, der Koordinaten und der Geschwindigkeiten oder Momente geblieben sind, so ist

$$200)\qquad \delta V = \sum_1^s {}_h \frac{\partial V}{\partial p_h}\delta p_h = -\sum_1^s {}_h P_h \delta p_h .$$

$$201)\qquad \delta T = \sum_1^s {}_h \left(\frac{\partial T}{\partial p'_h}\delta p'_h + \frac{\partial T}{\partial p_h}\delta p_h\right).$$

Wir bezeichnen weiter mit p_h^0, p'^0_h, q_h^0, V_0, T_0, H_0 und E_0 die Werte dieser Größen für die untere Grenze t_0 der Integrale 197) und 199). $\mathfrak{p}_h^0 = p_h^0 + \overline{\delta p_h^0}$, $\mathfrak{p}'^0_h = p'^0_h + \overline{\delta p'^0_h}$, $\mathfrak{q}_h^0 = q_h^0 + \overline{\delta q'^0_h}$ aber seien die Werte der h-ten Koordinate, Geschwindigkeit und des h-ten Momentes bei der variierten Bewegung zur gleichen Zeit t_0. Ebenso seien p_h^1, p'^1_h, q_h^1, V_1, T_1, H_1 und E_1 die Werte der entsprechenden Größen für die unvariierte Bewegung zur Zeit t_1, und $\mathfrak{p}_h^1 = p_h^1 + \overline{\delta p_h^1}$, $\mathfrak{p}'^1_h = p'^1_h + \overline{\delta p'^1_h}$ und $\mathfrak{q}_h^1 = q_h^1 + \overline{\delta q_h^1}$ die Werte für den der Zeit t_1 entsprechenden Zustand der variierten Bewegung.

Wir setzen nun

$$202)\qquad W = \int_{t_0}^{t_1} H\,dt$$

und bilden auch das diesem Integrale entsprechende Integral $\mathfrak{W} = W + \delta W$ für die variierte Bewegung. In diesem letzteren Integrale braucht aber die untere Grenze für die Zeit nicht mit der unteren Grenze t_0 der Zeit in dem für die unvariierte Bewegung geltenden Integrale W zusammenzufallen, sondern die erstere untere Grenze kann eine unendlich wenig von t_0 verschiedene Zeit $\mathfrak{t}_0 = t_0 + \delta t_0$ sein. Ebenso kann die obere Grenze des Integrales $\mathfrak{W}$ eine unendlich wenig von t_1 verschiedene Zeit $\mathfrak{t}_1 = t_1 + \delta t_1$ sein, so daß wir erhalten

$$203)\qquad \mathfrak{W} = W + \delta W = \int_{\mathfrak{t}_0}^{\mathfrak{t}_1} (\mathfrak{T} - \mathfrak{V})\,dt = \int_{\mathfrak{t}_0}^{\mathfrak{t}_1} \mathfrak{H}\,dt,$$

in welcher Gleichung auch die unendlich kleinen Glieder erster Ordnung gleich sein müssen.

Nach den Regeln der Variationsrechnung hat man unendlich Kleines zweiter und höherer Ordnung zu vernachlässigen und findet somit:

$$204)\quad \begin{cases} \delta W = (T_1 - V_1)\,\delta t_1 - (T_0 - V_0)\,\delta t_0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta V)\,dt = \\ = H_1\,\delta t_1 - H_0\,\delta t_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta H\,dt. \end{cases}$$

Wenn V und die π die Zeit nicht explizit enthalten, also für skleronome durch skleronome Koordinaten bestimmte Systeme kann man übrigens ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\delta t_0 = 0$ setzen. Man denkt sich dann die variierte Bewegung zur selben Zeit beginnend, wie die unvariierte, was in diesem Falle ihren Verlauf in keiner Weise ändert. Die Variation der oberen Grenze δt_1 muß dann gleich dem Betrage gemacht werden, um wieviel die ganze Integrationszeit in dem durch Formel 203) bestimmten Integrale $\mathfrak{W}$ größer ist, als in dem durch Formel 202) gegebenen Integrale W.

Das Integral $\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta H\,dt$ in Gleichung 204) hat nun genau dieselbe Bedeutung wie in Gleichung 199). Wie dort kann man in $\delta H = \delta T - \delta V$ die Werte 200) und 201) substituieren, die mit $\delta p'$ behafteten Glieder partiell integrieren und schließlich die infolge der Bewegungsgleichungen des Systems und den Bedingungen sich auf Null reduzierenden Glieder weglassen. Man erhält dann wieder die Gleichung 199), nämlich

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta H\,dt = \sum_{h=1}^{h=s} \Big| q_h\,\overline{\delta p_h} \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Die Substitution dieses Wertes in die Gleichung 204) aber liefert:

$$205)\quad \delta W = H_1\,\delta t_1 - H_0\,\delta t_0 + \sum_1^s h\,(q^1_h\,\overline{\delta p^1_h} - q^0_h\,\overline{\delta p^0_h}).$$

Man kann auch umgekehrt sagen, wenn man von irgend einem Übergange gewisser Anfangswerte zu gewissen Endwerten als der unvariierten Bewegung ausgeht und die

Gleichung 205) für alle variierten Übergänge gilt, welche den Bedingungen 45) entsprechen, so ist der unvariierte Übergang, von dem man ausging, immer eine den für die gegebenen Werte von V und π geltenden mechanischen Gleichungen entsprechende (eine „natürliche") Bewegung des Systems, da dann nach partieller Integration der $\delta p'$ enthaltenden Glieder in dem von t_0 bis t_1 erstreckten Integrale der Koeffizient der Variation jeder Koordinate, insofern dieselbe nicht durch die Bedingungsgleichungen bestimmt ist, für jedes t verschwinden muß, woraus man wieder die Bewegungsgleichungen des Systems erhält.

Die Gleichung 205) sagt daher, wenn sie für alle mit den auseinandergesetzten Bedingungen verträglichen Variationen einer gewissen zeitlichen Veränderung der p gilt, aus, daß diese Veränderung der p den Bewegungsgleichungen der Mechanik entspricht also die entsprechende Bewegung des Systems eine natürliche ist.

§ 30. Ableitung der Gleichung, welche die Grundlage für das Folgende bildet.

In Formel 205) sind $\overline{\delta p^1}_h$ und $\overline{\delta p^0}_h$ die Zuwächse, welche die h-te Koordinate erfährt, wenn man von den Zuständen der unvariierten Bewegung, welche zu den Zeiten t_0 und t_1, also den beiden Integrationsgrenzen des durch Formel 202) gegebenen Integrales W eintreten, zu denjenigen Zuständen übergeht, welche bei der variierten Bewegung zu denselben Zeiten t_0 und t_1 eintreten. Es ist besser, diejenigen Zuwächse einzuführen, welche eintreten, wenn man zu den Zuständen übergeht, welche bei der variierten Bewegung zu den Zeiten $\mathfrak{t}_0 = t_0 + \delta t_0$ und $\mathfrak{t}_1 = t_1 + \delta t_1$ eintreten, welche letztere Zeiten wieder die beiden Integrationsgrenzen des durch Formel 203) definierten Integrales $\mathfrak{W}$ bilden. Wir wollen die in letzterer Weise erhaltenen Koordinatenzuwächse durch Weglassung des darübergesetzten Querstriches bezeichnen. Beim Übergange von dem zur Zeit t_0 stattfindenden Zustande der unvariierten Bewegung zu dem zur gleichen Zeit t_0 stattfindenden Zustande der variierten Bewegung

wächst die Koordinate p_h und $\overline{\delta p^0_h}$. Da bis auf unendlich Kleines sich auch bei der variierten Bewegung die Koordinate p_h zur Zeit t_0 mit der Geschwindigkeit p'^0_h ändert, so wächst beim Übergange von dem zur Zeit t_0 stattfindenden Zustande der variierten Bewegung zu dem zur Zeit $t_0 + \delta t_0$ stattfindenden Zustande derselben Bewegung p_h um $p'^0_h\, \delta t_0$. Die Summe dieser beiden Zuwächse ist die Größe, die wir soeben δp^0_h ohne Querstrich darüber nannten.

Es ist also $\delta p^0_h = \overline{\delta p^0_h} + p'^0_h\, \delta t_0$ und ebenso findet man $\delta p^1_h = \overline{\delta p^1_h} + p'^1_h\, \delta t_1$. Da zudem nach Gleichung 57) und 198) allgemein

$$\sum_1^s {}^h p'_h q_h = 2T \quad \text{und} \quad E = 2T - H$$

ist (ersterer aber nur für skleronome generalisierte Koordinaten), so erhält man:

$$206) \left\{ \begin{aligned} \sum_1^s {}^h (q^1_h \overline{\delta p^1_h} - q^0_h \overline{\delta p^0_h}) &= \sum_1^s {}^h (q^1_h\, \delta p^1_h - q^0_h\, \delta p^0_h) - \\ &\quad - 2(T_1\, \delta t_1 - T_0\, \delta t_0). \end{aligned} \right.$$

Die Substitution dieses Werthes in die Gleichung 205) aber liefert:

$$207) \quad \delta W = - E_1\, \delta t_1 + E_0\, \delta t_0 + \sum_1^s {}^h (q^1_h\, \delta p^1_h - q^0_h\, \delta p^0_h).$$

Diese Gleichung ist die Fundamentalgleichung, aus welcher wir nun eine Reihe allgemeiner Relationen ableiten wollen. Sie erfordert nicht, daß das System skleronom sei, aber die generalisierten Koordinaten müssen skleronom sein, d. h. die Lage des Systems muß durch sie zu allen Zeiten in gleicher Weise bestimmt sein. Es muß eine Kraftfunktion existieren, welche aber die Zeit explizit enthalten kann. Falls diese die Zeit nicht explizit enthält, ist natürlich $E_0 = E_1$.

Die Gleichung 207) zeigt, daß die Größe W, wenn die Zeit, die Anfangs- und die Endlagen nicht variiert werden, für natürliche Bewegungen ein Grenzwert ist. Wenn die Integrationsgrenzen nicht über ein gewisses Maß ausgedehnt werden[1])

---

[1]) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 64.

und die Kraftfunktion V konstant ist, also keine expliziten Kräfte wirken, so ist dieser Grenzwert stets ein absolutes Minimum. Man sieht dies am besten, wenn man rechtwinklige Koordinaten einführt. Es ist dann die zweite Variation von W gleich der Summe der mit den Massen multiplizierten Quadrate der Variationen der Geschwindigkeitskomponenten, also eine wesentlich positive Größe. Wenn dagegen explizite Kräfte wirken, so wären darüber noch besondere Untersuchungen notwendig, und es wäre vielleicht der Zusammenhang zwischen den Bedingungen der Existenz eines absoluten Minimums und der kinetischen Stabilität der betreffenden Bewegung von Interesse.

Man legte der Funktion W, weil sie in so vielen Fällen ein absolutes Minimum ist, eine metaphysische Bedeutung bei und nannte sie die Wirkung, besser hätte man sie freilich den „Kraftaufwand“ genannt; denn man könnte sich metaphysische Gründe denken, weshalb die Natur alles mit dem kleinsten Kraftaufwande erreicht, kaum aber dafür, daß sie immer eine möglichst kleine Wirkung erzielt. Es machte übrigens schon Jacobi darauf aufmerksam, daß, wo Differentialgleichungen existieren, im allgemeinen immer auch ein bestimmtes Integral existieren wird, welches durch die den Differentialgleichungen entsprechenden Veränderungen zu einem Grenzwerte gemacht wird, daß es daher gar keine metaphysische Bedeutung hat, wenn es ein solches Integral auch für die Differentialgleichungen der Mechanik gibt.

Ohne irgend welche metaphysische Nebengedanken wollen wir trotzdem kürzehalber alle aus Gleichung 207) fließenden Relationen unter dem Namen „Wirkungsprinzipe“ zusammenfassen. Das einfachste derselben war schon lange bekannt, aber erst durch Hamilton und noch vollkommener durch Jacobi erhielten wir eine allgemeine Übersicht über alle diese Relationen und ihren Zusammenhang, weshalb man wohl auch ihren Inbegriff, aber keineswegs bloß den im ersten Abschnitte behandelten Satz als das Hamiltonsche oder Hamilton-Jacobische Prinzip bezeichnen darf.

§ 31. Allgemeine Gleichungen Jacobis.

Ehe wir jedoch hierzu übergehen, wollen wir, Jacobi folgend, unsere Gleichungen noch verallgemeinern. Wir werden zwar in den folgenden Paragraphen dieses Buches nur Fälle betrachten, wo T eine homogene quadratische Funktion der p' ist. Man stößt aber manchmal auf Gleichungen, die sonst denen ganz analog sind, mit denen wir es hier zu tun haben; nur daß die p' in anderer Weise in T enthalten sind. Es ist daher nützlich, uns für einen Augenblick von jeder speziellen Annahme über das Vorkommen der p' in T unabhängig zu machen.

Sei H eine ganz beliebige Größe, welche in beliebiger Weise 1. eine independente Variable, welche wir behufs Vereinfachung der Sprechweise die Zeit nennen, 2. beliebige Funktionen $p_1, p_2 \ldots p_s$ der Zeit und 3. deren Differentialquotienten $p'_1, p'_2 \ldots p'_s$ nach der Zeit enthalte. Die partiellen Ableitungen des H nach den p', welche natürlich so zu bilden sind, als ob die p, p' und t independent wären, bezeichnen wir mit q. Wir setzen also:

208) $$q_h = \frac{\partial H}{\partial p'_h}, \quad h = 1, 2 \ldots s.$$

Durch diese s Gleichungen sind die q als Funktionen der p, p' und der Zeit gegeben. Wir nehmen an, daß sich daraus umgekehrt die p' als Funktionen der p, q und der Zeit finden lassen und daß sie dann in der Form erscheinen:

209) $$p'_h = \psi_h(p, q, t).$$

Alle diese Ausdrücke können entwickelt werden, wenn H als Funktion der p, p' und der Zeit gegeben ist. Wir setzen weiter:

210) $$E = \sum_{h=1}^{h=s} q_h p'_h - H.$$

Ferner nehmen wir an, daß von der Zeit t_0 bis zur Zeit t_1 die p, p' und q bestimmt sind durch ihre Anfangswerte und folgende Differentialgleichungen

211) $$\frac{d q_h}{d t} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_h} + \sum_{l=1}^{l=\sigma} \lambda_l \pi_h^{(l)},$$

wo der Index q des ∂ ausdrückt, daß die partiellen Diffe-

rentialquotienten so zu verstehen sind, daß E als Funktion der p, q und der Zeit auszudrücken, also die p' darin durch die Werte 209) zu ersetzen sind. Außerdem sollen die Zuwächse der p noch σ Bedingungsgleichungen von der Form

$$212) \qquad \tau\, dt + \sum_{h=1}^{h=s} \pi_h^{(l)}\, dp_h = 0, \quad l = 1, 2 \ldots \sigma$$

erfüllen, wodurch die λ bestimmt erscheinen. Sobald H gegeben ist, können die p' als Funktionen der q ausgedrückt werden, es sind also durch die Gleichungen 211) und 212) die Gesetze der Veränderung der p, p' und q bestimmt. Den Inbegriff der mittels dieser Gleichungen aus gewissen Anfangswerten für alle Zeiten von t_0 bis t_1 folgenden Werte nennen wir die unvariierten Werte oder auch symbolisch die unvariierte Bewegung der Werte der p, p' und q.

Wir wollen nun den zu jeder Zeit hierbei eintretenden Werten der p unendlich kleine Zuwächse erteilen. Die dadurch entstehenden Werte der p nennen wir deren variierte Werte. p_h soll dabei zur Zeit t den Zuwachs δp_h erfahren. Sämtliche δp sollen sonst ganz willkürlich sein, nur sollen sie gleich endlichen kontinuierlichen differenzierbaren Funktionen der Zeit multipliziert mit einer unendlich kleinen Konstanten sein, und den Bedingungen

$$213) \qquad \sum_{h=1}^{h=s} \pi_h^{(l)}\, \delta p_h = 0, \quad l = 1, 2 \ldots \sigma$$

genügen. Der Inbegriff aller variierten Werte der p bildet wieder ein kontinuierlich mit der Zeit sich änderndes Wertsystem, das variierte oder die variierte Wertebewegung, bei welcher der Differentialquotient des p_h zur Zeit t gleich

$$\frac{dp_h}{dt} + \frac{d\,\delta p_h}{dt}$$

ist. Der zweite Addend ist also der Zuwachs $\delta p'_h$, den der Wert der Größe p'_h zur Zeit t beim Übergang von einem Wertsystem der ursprünglichen zum korrespondierenden (d. h. in unseren gegenwärtigen Betrachtungen zur gleichen Zeit gehörenden) der variierten Bewegung erfährt. Die entsprechenden Zuwächse der q findet man durch Variierung der Gleichungen 208).

Wir wollen nun das Integral $\int_{t_0}^{t_1} H dt$ zunächst für die ursprüngliche Wertebewegung berechnen und dann den Zuwachs $\delta \int_{t_0}^{t_1} H dt$ suchen, welchen dieses Integral beim Übergang von der ursprünglichen zur variierten Bewegung erfährt. Nach den Regeln der Variationsrechnung ist, da wir in diesem Paragraphen die Zeitgrenzen nicht variieren:

$$214) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} H dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{h=s} \left(q_h \delta p'_h + \frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h} \delta p_h \right),$$

und man erhält durch partielle Integration:

$$215) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} H dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{h=s} \left(- \frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h} \right) \delta p_h + \sum_{h=1}^{h=s} \Big| q_h \delta p_h \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Wir denken uns nun in die Größe E einmal die Variabeln t, p, p', dann die Variabeln t, p, q eingeführt, indem wir die p' durch die Werte 209) ersetzen. Wenn dann sämtliche der Größen t, p, p' ganz willkürliche unendlich kleine Zuwächse $\delta_1 t$, $\delta_1 p_h$ und $\delta_1 p'_h$ erfahren, so wird das so oder so ausgedrückte E denselben Zuwachs $\delta_1 E$ erfahren müssen. Die aus den Gleichungen 208) hierbei folgenden Zuwächse der q bezeichnen wir mit $\delta_1 q$.

Aus Gleichung 210) folgt:

$$\delta_1 E = \sum_{h=1}^{h=s} p'_h \delta_1 q_h - \frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h} \delta_1 p_h - \frac{\partial H}{\partial t} \delta_1 t.$$

Denkt man sich dagegen in E die Variabeln p, q und t eingeführt, so folgt:

$$\delta_1 E = \sum_{h=1}^{h=s} \left(\frac{\partial_q E}{\partial p_h} \delta_1 p + \frac{\partial_q E}{\partial q_h} \delta_1 q_h \right) + \frac{\partial E}{\partial t} \delta_1 t.$$

Da diese beiden Werte von $\delta_1 E$ für alle $\delta_1 p$, $\delta_1 q$ und $\delta_1 t$ identisch gleich sein müssen, so folgt:

$$216) \quad \frac{\partial_q E}{\partial p_h} = - \frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h}, \qquad \frac{\partial_q E}{\partial q_h} = \frac{d p_h}{d t}, \qquad \frac{\partial E}{d t} = - \frac{\partial H}{d t}.$$

Genügt daher das System der unvariierten Werte (die unvariierte Wertebewegung) den Gleichungen 211), so folgt

$$\sum_{h=1}^{h=s}\left(-\frac{d q_h}{d t}+\frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h}\right)\delta p_h=\sum_{h=1}^{h=s}\left(-\frac{d q_h}{d t}-\frac{\partial_q E}{\partial q_h}\right)\delta p_h=$$

$$=-\sum_{l=1}^{l=\sigma}\sum_{h=1}^{h=s}\lambda_l\,\pi_h^{(l)}\,\delta p_h,$$

was vermöge der Bedingungen 213) verschwindet. Man erhält also aus 215):

217) $$\delta\int_{t_0}^{t_1} H\,d t=\sum_{h=1}^{h=s}\Big|q_h\,\delta p'_h\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Man sieht sofort, daß diese Gleichung eine Verallgemeinerung der Gleichung 207) ist, welche man wieder erhält, wenn man speziell unter den p die generalisierten Koordinaten des dort betrachteten materiellen Systems und unter H den Ausdruck $T-V$ versteht, dagegen ist Gleichung 207) insofern weit allgemeiner, als in derselben auch die Integrationsgrenzen für die Zeit variiert werden, während in 217) die Zeit nicht variiert. Da T unter den für die Gleichung 207) geltenden Voraussetzungen der Gleichung 57) genügt, so geht unter ebendiesen Voraussetzungen die Gleichung 210) über in $E=2T-H$, was dann liefert: $E=T+V$.

Diese allgemeineren Gleichungen fallen jedoch nicht zusammen mit den mechanischen Bewegungsgleichungen, welche für den Fall gelten, daß die Koeffizienten der Quadrate und Produkte der verallgemeinerten Geschwindigkeiten im Ausdruck für die lebendige Kraft die Zeit explizit enthalten Im letzteren Falle ist 207) und selbst die Lagrangeschen Gleichungen im allgemeinen nicht mehr richtig. So würde für rechtwinklige Koordinaten bei variabler Masse die Gleichung 207) nur gültig bleiben, wenn die Bewegungsgleichungen so lauten würden:

$$\frac{d q_h}{d t}=\frac{d}{d t}\left(m\,\frac{d x}{d t}\right)=-\frac{\partial H}{\partial p_h}=-\frac{\partial V}{\partial x}=X,$$

während man annimmt, daß auch bei veränderlicher Masse $m \frac{d^2 x}{d t^2} = X$ ist.

Hamel (Karlsruhe) hat die Lagrangeschen Gleichungen nach einer anderen Seite hin verallgemeinert, indem er statt der Momente lineare Funktionen derselben (Momentoide) einführte, nachdem schon Lagrange und Poisson gewisse allgemeine Formeln aufgestellt hatten, in denen statt der Koordinaten und Momente irgend welche Funktionen derselben eingefügt erscheinen.

§ 32. Nochmals das Prinzip der stationären Wirkung.

Wir gelangen in folgender Weise zunächst wieder zum Prinzipe der stationären Wirkung. Wir lassen sowohl die untere Grenze t_0 als auch die obere Grenze t_1 in Formel 207) oder, wenn keine Kraftfunktion existiert, in Formel 199) unvariiert, so daß $\delta t_0 = \delta t_1 = 0$ ist, was, sobald die Kraftfunktion und die Bedingungsgleichungen die Zeit nicht explizit enthalten, darauf hinauskommt, daß wir die Zeitdauer der Bewegung, über welche das Integral 202) erstreckt ist, unvariiert lassen. Ferner lassen wir zur Zeit t_0, welche die untere Grenze des Integrals 202) bildet, sämtliche materiellen Punkte für die unvariierte und variierte Bewegung die gleiche Lage haben, so daß also δp^0_h, welches in diesem Falle mit $\overline{\delta p^0_h}$ identisch ist, für jedes h verschwindet. Endlich lassen wir die Variationen der Geschwindigkeit für die Zeit t_0 und die Zusatzkräfte, welche die unvariierte Bewegung in die variierte verwandeln, sonst zwar ganz willkürlich sein, binden sie aber an die eine Beschränkung, daß sie bewirken sollen, daß auch zur Zeit t_1 die Lage sämtlicher materieller Punkte für die unvariierte und variierte Bewegung dieselbe sein soll, so daß also auch $\delta p^1_h = \overline{\delta p^1_h}$ für jedes h verschwindet. Dann folgt also aus Gleichung 207):

218) $$\delta W = 0.$$

W ist ein sogenannter Grenzwert. Sein Zuwachs ist ein unendlich Kleines höherer Ordnung bezüglich der Zuwächse δp_h, $\delta p'_h$ und δq_h, welche die Werte der Koordi-

naten, Geschwindigkeiten und Momente zu irgend einer Zeit im allgemeinen erfahren.

Dieses Prinzip gilt, wie wir schon im I. Abschnitt sahen, und wie sich sofort ergibt, wenn man in Gleichung 199) statt in Gleichung 207) die Zeit und die Anfangs- und Endkoordinaten unvariiert läßt, auch wenn keine Kraftfunktion existiert. Nur darf dann das Variationszeichen nicht im gewöhnlichen Sinne vor das Integralzeichen gesetzt werden, sondern

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, dt$$

muß bloß als ein symbolischer Ausdruck für

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta' V)\, dt$$

betrachtet werden. Um dies sinnfällig zu machen, könnte man wieder dafür $\delta' W$ schreiben, und sobald unentschieden ist, mit welchem Falle man es zu tun hat, $\delta'' W$, so daß also die allgemeinste Gleichung so lautet:

218a) $$\delta'' W = 0.$$

Das Prinzip der stationären Wirkung gestattet, jede bestimmte mechanische Aufgabe auf eine rein phoronomische zu reduzieren, d. h. die Integrale der Bewegungsgleichungen jedes mechanischen Problems sind allgemein mit der zur Befriedigung der Grenzbedingungen nötigen Zahl von Integrationskonstanten gefunden, wenn die Lösung folgender Aufgabe gelungen ist: Die gegebene Zahl materieller Punkte ist im Verlaufe der zwischen zwei gegebenen Zeitmomenten t_0 und t_1 liegenden Zeit in solcher Weise kontinuierlich im Raume von einer bestimmten willkürlich gegebenen Anfangslage zu einer ebenso willkürlich gegebenen Endlage überzuführen, daß $W = \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, dt$, was wir die Wirkung während dieser Zeit nannten, ein Grenzwert wird, wobei T eine durch die Natur des Systems gegebene Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten, V eine ebenfalls gegebene

Funktion der Koordinaten und der Zeit ist, welche beide Funktionen nebst den etwa vorhandenen Bedingungsgleichungen, die für holonome Systeme bei der unvariierten und variierten Überführung eingehalten werden müssen, die Natur des Problems bestimmt. Für nicht holonome Systeme muß jeder Übergang von den unvariierten zu den korrespondierenden variierten Werten die Bedingungen erfüllen.

Löst man die Bewegungsgleichungen der Mechanik für irgend eine mechanische Aufgabe in der geschilderten Weise mittels des Prinzipes der stationären Wirkung, so ist natürlich die Berechnung der Integrationskonstanten am einfachsten, wenn diese nicht dadurch bestimmt sind, daß die Werte der Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten für irgend eine Zeit ($t = t_0$, den Zeitanfang), sondern dadurch, daß die Werte der Koordinaten allein aber für zwei verschiedene Zeiten (t_0 und t_1, z. B. den Anfang und das Ende der Bewegung) gegeben sind. Sind sie in anderer Weise gegeben, so verfährt man folgendermaßen: Man denkt sich zuerst die Koordinatenwerte für $t = t_0$ und $t = t_1$ gegeben und findet so Integrale der Bewegungsgleichungen mit der nötigen Zahl von Integrationskonstanten. Hat man einmal so die Form der Integralgleichungen gefunden, so ist dann die Bestimmung der darin enthaltenen Integrationskonstanten aus irgend welchen anderen Grenzbedingungen bloß eine Aufgabe der gewöhnlichen Algebra und macht meist keine Schwierigkeit mehr.

Daß unter Einhaltung der Bedingungsgleichungen des Systems und der Grenzbedingungen $\delta t_0 = \delta t_1 = \delta p^0_h = \delta p^1_h = 0$ die Gleichung $\delta W = 0$ besteht, ist die Bedingung, daß die betreffende zeitliche Veränderung der p mit den Bewegungsgleichungen verträglich ist, also eine natürliche Bewegung darstellt. Ein spezieller Fall zeitlicher Veränderung ist es, wenn alle p sich gar nicht mit der Zeit ändern. Für diese Bewegung, welche für skleronome Systeme jedenfalls eine natürliche ist, ist dann $T = 0$, V konstant, $\delta W = -\delta[(t_1 - t_0) V] = -(t_1 - t_0)\delta V$. Die Bedingung, daß unter dem Einfluß gewisser Kräfte und Bedingungen vollkommene Ruhe des Systems möglich, d. h. wie man sich

ausdrückt, daß sich die Kräfte am ruhenden Systeme unter der gegebenen Einschränkung der Bewegungsfreiheit das Gleichgewicht halten, ist also $\delta V = 0$ oder in rechtwinkligen Koordinaten $\sum_1^{3n} h X_h \delta x_h = 0$. Dieses Prinzip, dessen Beweis Lagrange an die Spitze seiner Statik stellt, ist also ein einfacher spezieller Fall des Prinzipes der stationären Wirkung. Für rheonome Systeme gilt derselbe Beweis, wenn man $t_1 - t_0$ als sehr klein annimmt.

Wir nannten V die Kräftefunktion oder auch das Potential. Helmholtz nennt es das statische Potential. Weil sich für bewegte Systeme in gewissem Sinne der Ausdruck $H = T - V$ damit analog verhält, nennt Helmholtz die letztere Größe das kinetische Potential, den Ausdruck

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} H\,d\,t = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1}(T - V)\,d\,t$$

nennt er das mittlere kinetische Potential und bezeichnet ihn mit $\overline{H}$. Es ist $W = (t_1 - t_0)\,\overline{H}$, und da beim Prinzip der stationären Wirkung $t_1 - t_0$ unvariiert bleiben muß, kann man dasselbe auch dahin aussprechen, daß das mittlere kinetische Potential $\overline{H}$ ein Grenzwert sein muß.

§ 33. Beispiele.

Erstes Beispiel über die Anwendung des Prinzipes der stationären Wirkung. Es sei ein einziger materieller Punkt gegeben, auf den gar keine (expliziten) Kräfte wirken und dessen Bewegung auch an gar keine irgendwie beschaffene Bedingungen geknüpft sei. Dann ist V konstant und man sieht sofort, daß man es ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich Null setzen kann. Die Wirkung während der Zeit $t_1 - t_0$ ist also, abgesehen von einem konstanten Faktor:

219) $$2\,W = \int_{t_0}^{t_1} c^2\,d\,t = \int_{t_0}^{t_1}(u^2 + v^2 + w^2)\,d\,t\,.$$

An Stelle des Problems, in diesem Falle die Gesetze der Bewegung zu finden, tritt das geometrische Problem,

den Punkt aus irgend einer gegebenen Anfangslage in irgend eine gegebene Endlage kontinuierlich mit der Zeit so überzuführen, daß der Ausdruck 219) bei konstantem t_0 und t_1 ein Grenzwert wird, wobei c die Geschwindigkeit, u, v, w deren Komponenten in den Koordinatenrichtungen sind. Da in diesem Integrale die Koordinaten nicht vorkommen, so ist es gar nicht notwendig, dieselben als Variable einzuführen; man kann gleich die Variabeln u, v und w beibehalten; nur hat man wegen der Unveränderlichkeit des Ausgangspunktes und Endpunktes der Bewegung die Bedingung beizufügen, daß die drei Integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} u\,dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} v\,dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} w\,dt$$

unveränderlich sein müssen. Um den Grenzwert des Integrals 219) unter der Nebenbedingung, daß die letzteren drei Integrale unveränderlich sein müssen, zu finden, hat man nach den Regeln der Variationsrechnung zur Variation des ersten Integrals die der drei letzten mit willkürlichen aber konstanten Faktoren λ, μ, ν multipliziert, hinzuzuaddieren, wodurch man erhält:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,[(u+\lambda)\,\delta u + (v+\mu)\,\delta v + (w+\nu)\,\delta w] = 0\,.$$

In dieser letzteren Gleichung sind jetzt $\delta u, \delta v, \delta w$ ganz willkürlich. Daher müssen für den Grenzwert ihre Koeffizienten gleich Null, also $u = -\lambda$, $v = -\mu$, $w = -\nu$, also alle drei Geschwindigkeitskomponenten konstant sein (Galileis Trägheitsgesetz).

Die Aufgabe, daß ein einziger materieller Punkt gegeben ist, auf den keine expliziten Kräfte wirken, der aber gezwungen ist, sich entweder auf einer vorgeschriebenen Fläche oder auf einer vorgeschriebenen Kurve zu bewegen, wollen wir nicht weiter behandeln, da er nach dem Gesagten dem der Variationsrechnung Kundigen keine Schwierigkeit bereiten dürfte.

Zweites Beispiel. Wenn die Bewegung eines freien materiellen Punktes mit den Koordinaten x, y, z unter dem

Einfluß der Schwere zu suchen ist, so kann man die z Achse vertikal nach abwärts ziehen. Dann ist V gleich $-mgz$ und das Problem, die Bewegung des materiellen Punktes zu finden, reduziert sich auf die Aufgabe, einen Punkt so kontinuierlich während der gegebenen Zeit $t_1 - t_0$ von einer beliebig gegebenen Anfangslage in eine beliebig gegebene Endlage zu überführen, daß dabei das Integral

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] + mgz \right\} dt,$$

welches jetzt die Wirkung während der Zeit $t_1 - t_0$ darstellt, ein Grenzwert wird. Sucht man nach den bekannten Regeln der Variationsrechnung die Bedingung hierfür, wobei man am besten tut t_0, t_1 und dt unvariiert zu lassen, so folgt:

$$m \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\delta z}{dt} + g\delta z \right) dt = 0.$$

Die partielle Integration und separate Nullsetzung der Koeffizienten von δx, δy und δz liefert dann die bekannten Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} - g = 0.$$

Die sechs Integrationskonstanten bestimmen sich dadurch, daß für $t = t_0$ und $t = t_1$ die Werte der Koordinaten gegeben sind.

Auch bei dieser zweiten Aufgabe wollen wir den Fall, daß der materielle Punkt nicht frei, sondern gezwungen ist, entweder auf einer vorgeschriebenen Fläche oder auf einer Kurve zu bleiben, so daß der Grenzwert desselben Ausdrucks aber jetzt unter der Nebenbedingung zu suchen ist, daß die Koordinaten die Gleichung der Fläche oder die beiden Gleichungen der Kurve erfüllen müssen, dem Leser überlassen.

§ 34. Helmholtz' Kräfte $\mathfrak{P}$ und Definition der p' durch $\delta\Omega = 0$.

In der Physik kommt häufig der Fall vor, daß die Gesamtkraft aus zwei Summanden besteht, von denen der eine eine Kraftfunktion F hat, der andere bloß als Funktion

der Zeit gegeben ist, so daß die nach irgend einer Koordinate p_h wirkende Kraft P_h die Form hat $-\frac{\partial F}{\partial p_h}+\mathfrak{P}_h$, wobei $\mathfrak{P}_h$ eine gegebene Funktion der Zeit ist. Dann hat man einfach den Fall einer die Zeit enthaltenden Kraftfunktion und in den entwickelten Gleichungen ist zu setzen:

220) $$V = F - \sum_1^s {}^h \mathfrak{P}_h p_h .$$

Es kann dann das betreffende System, seine Bewegung und auch die Kraftfunktion F gegeben sein und von den Gleichungen die Beantwortung der Frage gefordert werden, welche Kräfte $\mathfrak{P}_h$ zu den durch die Kraftfunktion F bestimmten zu jeder Zeit noch hinzugefügt werden müssen, um am gegebenen System die gegebene Bewegung hervorzurufen.

Werden die Kräfte $\mathfrak{P}_h$ von äußern Vorrichtungen auf das System ausgeübt, so sind dagegen $-\mathfrak{P}_h$ die Kräfte, welche umgekehrt das System auf jene Vorrichtungen ausübt.

Helmholtz hat eine Verallgemeinerung des Prinzips der stationären Wirkung gefunden, welche, weil sie in der Elektrodynamik Anwendung findet, hier noch erwähnt werden soll.

Er betrachtet $2s$ vollkommen independente Variabeln $p_1, p_2 \ldots p_s, p'_1, p'_2 \ldots p'_s$, welche im Verlaufe einer gegebenen Zeit (von t_0 bis t_1) beliebige, sich kontinuierlich folgende Werte durchlaufen sollen, so daß also jetzt von vornherein gar nicht vorausgesetzt ist, daß p'_h der Differentialquotient von p_h nach der Zeit ist. T sei eine beliebig gegebene Funktion der $2s$ Variabeln $p_1 p_2 \ldots p_s, p'_1 \ldots p'_s$, jedoch sei es bezüglich der p' eine ganze Funktion zweiten Grades, also durch einen Ausdruck von der Form 35) gegeben. Zwischen den $s+1$ Variabeln $t, p_1, p_2 \ldots p_s$ können noch σ holonome oder nicht holonome Bedingungsgleichungen von der Form $\pi^l dt + \sum_1^s {}^h \pi_h^l dp_h = 0$ bestehen. V und die π seien beliebig gegebene Funktionen dieser $s+1$ Variabeln.

Er stellt nun die Forderung, daß die Größe

221) $$\Omega = \int_{t_0}^{t_1} \left[T - V - \sum_1^s {}^h \left(p'_h - \frac{dp_h}{dt}\right)\frac{\partial T}{\partial p'_h}\right] dt$$

ein Grenzwert sein soll unter folgenden Bedingungen: 1. t_0 und t_1 und die Werte der ungestrichenen p zu diesen Zeiten sollen nicht variiert werden, so daß man auch dt nicht zu variieren braucht, 2. die Variationen der ungestrichenen p sollen die Bedingungen erfüllen $\sum_1^s {}_h\, \pi_h^l\, \delta p_h = 0,\ l = 1, 2 \ldots \sigma$.

Da die gestrichenen p völlig unabhängig sind, so muß die Variation $\delta'_i \Omega$, welche Ω erfährt, wenn man sonst alles unverändert läßt und nur eines der p', z. B. p'_i, um $\delta p'_i$ wachsen läßt, verschwinden. Die im Ausdrucke für Ω in der eckigen Klammer stehende Summe erfährt dann den Zuwachs

$$\delta p'_i \frac{\partial T}{\partial p'_i} + \sum_1^s {}_h \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t}\right) \frac{\partial T}{\partial p'_h\, \partial p'_i}\, \delta p'_i$$

und daher wird:

$$\delta'_i \Omega = \int_{t_0}^{t_1} \delta p'_i\, dt \sum_1^s {}_h \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h\, \partial p'_i};$$

da nun $\delta p'_i$ eine ganz willkürliche kontinuierliche Funktion von t ist, die nur die Bedingung zu erfüllen hat, daß sie für jeden Wert des t unendlich klein sein muß, so muß der Faktor von $\delta p'_i$ in dem zuletzt für $\delta'_i \Omega$ gefundenen Ausdrucke für jedes t verschwinden und man hat daher für jedes t und $i = 1, 2 \ldots s$:

$$222)\qquad \sum_1^s {}_h \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h\, \partial p'_i} = 0.$$

Dies sind für die s Größen $p'_h - \frac{d p_h}{d t}$ im ganzen s lineare homogene Gleichungen. Da nach Gleichung 35) $\frac{\partial T}{\partial p'_h\, \partial p'_i} = a_{hi}$ ist, so sind die Koeffizienten dieser linearen Gleichungen gleich den a_{hi}, und da nach 56) die Determinante dieser Koeffizienten nicht verschwindet, so können die sämtlichen linearen Gleichungen 222) nur erfüllt sein, wenn sämtliche Ausdrücke von der Form $p'_h - \frac{d p_h}{d t}$ verschwinden. Der in § 9 für das Nichtverschwinden dieser Determinante gegebene

Beweis gilt auch für rheonome generalisierte Koordinaten; denn man kann sich immer denken, daß die zwischen den rechtwinkligen und generalisierten Koordinaten zu einer bestimmten Zeit bestehenden Beziehungen unabhängig von der Zeit fortbestehen. Dann werden die generalisierten Koordinaten skleronom, ohne daß die a ihre Werte ändern.

Lediglich aus der Voraussetzung, daß der Ausdruck 221) unter den soeben präzisierten Bedingungen ein Grenzwert wird, folgt also, was früher Definition der p'_h war, daß $p'_h = \frac{d p_h}{d t}$ ist. Sobald aber dies bewiesen ist, wird der Ausdruck Ω der Gleichung 221) mit dem Ausdrucke W der Gleichung 202) identisch, und da auch die Bedingungen, unter denen jetzt Ω ein Grenzwert werden soll, identisch sind mit denen, unter denen früher W ein Grenzwert wurde, so folgt, wie damals so auch jetzt, daß die zeitliche Veränderung der p, für welche Ω ein Grenzwert wird, die Lagrangeschen Gleichungen der analytischen Mechanik erfüllt.

§ 35. Das Wirkungsprinzip als Grundprinzip der gesamten Naturwissenschaft.

Historisch führte natürlich offener oder versteckter die Vorstellung der Zentrikräfte zwischen materiellen Punkten zur allmählichen Entwicklung der Mechanik in ihrer heutigen Gestalt. Daraus allein darf man freilich noch nicht den Schluß ziehen, daß diese Vorstellung deswegen auch immer ihre Basis bleiben müsse. Es kommt ja oft genug vor, daß ein Satz, der zuerst unter gewissen beschränkenden Bedingungen gefunden wurde, sich später auch in allgemeineren Fällen als gültig erweist. So könnten die Prinzipien der Mechanik, wie das der virtuellen Verschiebungen oder das der stationären Wirkung, ebenfalls unter Bedingungen gelten, welche sich nicht durch Zentrikräfte realisieren lassen.

Es wurde in der Tat oft die Ansicht ausgesprochen, daß man die Vorstellung der Zentrikräfte ganz fallen lassen und an ihre Stelle irgend eines der allgemeinen Prinzipe

zur Basis der Mechanik machen solle. Wählt man hierzu das Energieprinzip, so muß man, da dieses viel spezieller ist, als die Gleichungen der Mechanik, noch eine ganze Reihe anderer Sätze hinzunehmen und mit der Ableitung des Gesamtmaterials aus einem einheitlichen Prinzipe ist es wiederum vorbei. Dies wäre nicht notwendig, wenn man das Prinzip der stationären Wirkung wählen würde, da aus diesem in der Tat die Gleichungen der Mechanik in ihrer Gesamtheit folgen.

Es kann hier sogar der Fall ins Auge gefaßt werden, daß der Zustand von Systemen durch andere Koordinaten bestimmt ist, als solche, welche die Lage in einem dreidimensionalen Raume angeben. So haben z. B. Gibbs, Helmholtz u. a. Relationen aufgestellt, in denen die Temperatur, der elektrische Zustand und ähnliche Variabele vorkommen und welche die mechanischen Prinzipe, besonders das Prinzip der stationären Wirkung, als spezielle Fälle enthalten. Allein diese Relationen sind in anderer Hinsicht doch wieder viel weniger allgemein. Sie gelten manchmal ausschließlich für Zustände, die sich nur unendlich wenig vom Gleichgewichtszustande unterscheiden. Sie enthalten ferner der Mechanik fremde Dunkelheiten, wie den Begriff der Entropie, der Irreversibilität und zahlreiche erfahrungsmäßig gegebene Eigenschaften der Temperatur, Elektrizität etc., deren Vorstellung keineswegs so einfach ist, wie die der geometrischen Beziehungen von Punkten.

Es besteht die Möglichkeit, das Auftreten von Gleichungen, welche denen der Mechanik analog sind, in der Theorie der Elektrizität, der Wärme etc., sowie die besonderen Eigenschaften, welche den in diesen Theorien vorkommenden Größen zukommen, daraus zu erklären, daß diese Phänomene durch verborgene mechanische Bewegung verursacht sind und auch die Dunkelheiten im Verhalten der in der übrigen Physik vorkommenden Größen durch mechanische Bilder aufzuhellen, z. B. die des Entropie- und Irreversibilitätsbegriffes durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Verhalten sehr zahlreicher materieller Punkte.

Wenn ich sage, die mechanischen Bilder könnten imstande sein, derartige Dunkelheiten aufzuhellen, so meine ich damit nicht, daß die Lage und Bewegung materieller Punkte im Raume etwas wäre, dessen einfachste Elemente vollständig erklärbar sind. Im Gegenteile, die letzten Elemente unserer Erkenntnis zu erklären ist überhaupt nicht möglich; denn erklären heißt ja, auf Bekannteres, Einfacheres zurückführen und daher muß das, worauf alles zurückgeführt wird, immer unerklärbar bleiben. Wenn daher auch alles aus den einfachsten Grundbegriffen der Mechanik erklärt wäre, so würden diese dafür in aller Ewigkeit geradeso unerklärbar bleiben, wie es heute für uns auch die der Elektrizitätslehre sind.

Auch will ich nicht streiten, ob der Begriff der Lage im Raume, oder der der Temperatur, oder der einer elektrischen Ladung an sich klarer ist: ein solcher Streit wäre gegenstandslos. Nur wäre es sicher klarer, wenn wir nicht nur alle Bewegungserscheinungen an festen, tropfbaren und gasförmigen Körpern, sondern auch Wärme, Licht, Elektrizität, Magnetismus, Gravitation, alles durch die Vorstellung von Bewegungen materieller Punkte im Raume, also durch ein einziges einheitliches Prinzip erklären könnten, als wenn wir für jedes dieser Agentien wieder ein ganzes Inventar vollkommen fremdartiger Begriffe wie Temperatur, elektrische Ladung, Potential etc. brauchen, ob wir diese fremdartigen Begriffe nun als etwas vollkommen Selbständiges oder als lauter disparate für jede Energieform apart zu postulierende Energiefaktoren bezeichnen mögen.

Wenn man sich schon überhaupt um die künftigen Jahrhunderte oder gar Jahrtausende kümmern will, so will ich gerne zugeben, daß es vermessen wäre, zu hoffen, daß das heutige mechanische Weltbild selbst nur in seinen wesentlichsten Zügen sich in alle Ewigkeit erhalten werde.

Daher bin ich auch weit entfernt, von Versuchen, allgemeinere Gleichungen zu suchen, von denen die mechanischen nur spezielle Fälle sind, gering zu denken. Ja ich wäre mit dem Erfolge dieses Buches zufrieden, wenn ich durch

den Nachweis, wie klar ein Weltbild sein kann und muß, dazu beigetragen hätte, daß die Konstruktion eines anderen noch umfassenderen und klareren Weltbildes, sei es auf Grundlage des Energieprinzips oder des Prinzips der stationären Wirkung oder der geradesten Bahn, gelänge. Nur dem Leichtsinne, welcher, bevor ein anderes derartiges Weltbild von der ersten Grundlage bis zur Anwendung auf die wichtigsten Erscheinungen, die schon so lange durch das alte Weltbild erschöpfend dargestellt worden sind, detailliert ausgearbeitet vorliegt, ja ohne von den Schwierigkeiten der Konstruktion desselben eine Ahnung zu haben, das alte Weltbild der Mechanik für einen überwundenen Standpunkt erklärt, möchte ich entgegenarbeiten. Vor allem dürfte man, wenn man das Bild materieller Punkte vermeiden will, nicht doch wieder in der Mechanik später materielle Punkte einführen, sondern man müßte von anders beschaffenen Einzelwesen oder Elementen[1]) ausgehen, deren Eigenschaften so klar wie die der materiellen Punkte zu schildern wären.

Ich schrieb das Vorstehende vor etwa sieben Jahren nieder, der Schlußsatz stellt also die von mir vor sieben Jahren gestellte Forderung dar (so alt ist der Grundstock des Manuskripts für das vorliegende Buch). Ich brachte alles das jetzt absichtlich unverändert zum Abdrucke. Was ich dort nach Jahrhunderten oder gar Jahrtausenden erwartete, ist in sieben Jahren zur Hälfte geschehen.

Aber nicht von der Energetik, nicht von der Phänomenologie ging der Hoffnungsstrahl einer nichtmechanischen Naturerklärung aus, sondern von einer Atomtheorie, die in phantastischen Hypothesen die alte Atomtheorie ebenso übertrifft, wie ihre Elementargebilde an Kleinheit die alten Atome übertreffen. Ich brauche nicht zu sagen, daß ich die moderne Elektronentheorie meine. Diese strebt gewiß nicht die Begriffe der Masse und Kraft, das Trägheitsgesetz etc. aus Einfacherem, leichter Verständlichem zu erklären, ihre einfachsten Grundbegriffe und Gesetze werden sicher ebenso

[1]) Vergl. Wied. Ann. Bd. 60, S. 247, 1897.

unerklärlich bleiben, wie für das mechanische Weltbild die der Mechanik. Aber der Vorteil, die gesamte Mechanik aus anderen, für die Erklärung des Elektromagnetismus ohnehin notwendigen Vorstellungen ableiten zu können, wäre ebenso groß, als wenn umgekehrt die elektromagnetischen Erscheinungen mechanisch erklärt werden könnten. Möge das erstere gelingen und dabei meine vor sieben Jahren gestellte Forderung erfüllt werden!

§ 36. Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Wir wollen nun annehmen, daß weder die Kraftfunktion V noch die Bedingungsgleichungen, die nun alle holonom sein sollen, die Zeit explizit enthalten d. h. daß das System skleronom sei. Dann braucht man t_0 nicht zu variieren, da man ohne Beschränkung der Allgemeinheit der unteren Grenze des auf die unvariierte Bewegung bezüglichen Integrales 202) die untere Grenze des der variierten Bewegung entsprechenden Integrales 203) zuordnen kann. δt_1 ist dann die Variation der ganzen Zeit $t_1 - t_0$, über welche die Integration sich erstreckt. Ferner ist dann in der Gleichung der lebendigen Kraft

$$E = T + V,$$

E eine während der unvariierten Bewegung konstante Größe; daher wird

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (2T - E)\,dt$$

$$\delta W = 2\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \delta E\,dt - E\,\delta t_1,$$

wogegen aus Gleichung 207) folgt:

$$\delta W = -E\,\delta t_1 + \sum_1^s {}_h (q^1_h\,\delta p^1_h - q^0_h\,\delta p^0_h).$$

Die Vergleichung dieser beiden Werte für δW ergibt:

$$2\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E\,dt + \sum_1^s {}_h (q^1_h\,\delta p^1_h - q^0_h\,\delta p^0_h). \tag{223}$$

Wir wollen zunächst das Prinzip der kleinsten Wirkung in seiner alten historischen Form ableiten. Wir setzen dabei voraus, daß das Intervall $t_1 - t_0$, über welches sich das Integral 202) erstreckt, den Zuwachs δt_1 erfährt, und dies ist ein wesentlicher Unterschied von dem früher behandelten Prinzipe der stationären Wirkung, wo dieses Zeitintervall unverändert blieb. Ferner setzen wir voraus, daß die der unteren Grenze t_0 entsprechenden Werte der Koordinaten für die variierte Bewegung dieselbe wie für die unvariierte sind, daß also δp^0_h für jedes h verschwindet. Die Geschwindigkeiten für die Zeit t_0, bei welcher sowohl für die unvariierte als auch für die variierte Bewegung die Integration beginnt, können zwar Variationen erfahren, jedoch nur so, daß die gesamte lebendige Kraft T_0 im Zeitmomente t_0 keine Veränderung erfährt, daß also die Konstante A unverändert bleibt. Ferner sollen alle Zusatzkräfte, welche noch eine weitere Variation der Bewegung bewirken, in keinem Zeitmomente eine Arbeit auf das materielle System übertragen oder ihm entziehen. Es soll daher für die variierte Bewegung $T + V$ zu Anfang denselben Wert E wie für die unvariierte Bewegung haben und auch zu allen späteren Zeiten soll die gesamte Energie $T + V$ für die variierte Bewegung denselben Wert E wie zu Anfang haben. Da aber auch für die unvariierte Bewegung $T + V = E$ ist, so ist allgemein $\delta E = 0$.

Dies wäre z. B. erfüllt, wenn die Zusatzkräfte dadurch bewirkt würden, daß jeder materielle Punkt in eine starre glatte Röhre eingeschlossen würde, deren Mittellinie unendlich wenig von der unvariierten Bahn des betreffenden materiellen Punktes abwiche und durch die Punkte ginge, wo sich der Punkt zu den Zeiten t_0 und t_1 bei der unvariierten Bewegung befand. Außerdem soll die Variation der für die Zeit t_0 geltenden Geschwindigkeiten und sollen die Zusatzkräfte noch so beschaffen sein, daß zu irgend einer Zeit $t_1 + \delta t_1$, welche gleich t_1 oder unendlich wenig verschieden von t_1 ist, sämtliche materielle Punkte genau in die Lage kommen, die sie für die unvariierte Bewegung zur Zeit t_1 hatten. Dann ist auch $\delta p^1_h = 0$ für jedes h und es folgt aus Gleichung 223)

$$224)\qquad \delta\int\limits_{t_0}^{t_1} T\,d\,t = 0.$$

Es wird also das Integral $\int\limits_{t_0}^{t_1} T\,d\,t$ ein Grenzwert, welche Aussage das alte Prinzip der kleinsten Wirkung, wie es schon lange vor Hamilton ausgesprochen wurde, bildet. Dasselbe ist nur für den Fall, daß man die Zeit $t_1 - t_0$ also nach unserer Methode neben t_0 auch t_1 unvariiert läßt, ein spezieller Fall des Prinzips der stationären Wirkung.

§ 37. Variationsmethode, wobei auch die Independente, resp. die Zeit variiert wird.

Die alte Ableitungsweise des Prinzipes der kleinsten Wirkung, welcher auch wir im vorigen Paragraph gefolgt sind, setzt voraus, daß eine Kraftfunktion existiert, welche die Zeit nicht explizit enthält. Diese Voraussetzung war bei Ableitung der Gleichung 30) resp. 218a), welche den allgemeinsten Ausdruck des Prinzipes der stationären Wirkung darstellt, nicht notwendig. Es hat Helmholtz gezeigt, daß sie auch bei Ableitung des Prinzipes der kleinsten Wirkung nicht notwendig ist und daß daher aus letzterem Prinzipe die allgemeinen Grundgleichungen der Mechanik für skleronome Koordinaten in allen Fällen abgeleitet werden können, in denen sie aus Gleichung 4), 30) resp. 218a) (der allgemeinsten Form des Prinzipes der stationären Wirkung) abgeleitet werden können.

Ehe ich aber hierzu übergehe, will ich noch eine ungemein wichtige Verallgemeinerung der Variationsmethode besprechen. Ich habe absichtlich bisher die Variation des Zeitdifferentials unterlassen, um zu zeigen, wie sie durch Variation der Grenzen ersetzt werden kann. Wiewohl wir nun auch in den spätern Paragraphen nirgends mehr das Zeitdifferential variieren werden, so will ich diese Variation doch in diesem Paragraph besprechen, da ohne ihre Kenntnis der ganze Begriff der Variationsrechnung ein ungemein beschränkter bliebe.

Gerade bei Ableitung des Prinzipes der kleinsten Wirkung ist es natürlicher auch dt als variabel zu betrachten, d. h. die Annahme fallen zu lassen, daß zwei Zustände der unvariierten Bewegung jedesmal zeitlich gleich weit abstehen, wie die beiden korrespondierenden Zustände der variierten Bewegung.

Es drückt dann das einer Größe vorgesetzte δ immer den Zuwachs aus, welchen diese Größe erfährt, wenn man von dem irgend einer Zeit t entsprechenden Zustande der unvariierten Bewegung zu dem korrespondierenden Zustande der variierten übergeht, d. h. zu dem, welcher bei der variierten Bewegung einer ein wenig davon verschiedenen Zeit $t + \delta t$ entspricht. Dabei kann man δt ganz beliebig wählen, also z. B. als eine ganz beliebige Funktion von t auffassen, welche nur kontinuierlich und unendlich klein von der Ordnung der δ der übrigen Größen sein muß.

Am einfachsten ist es natürlich allgemein $\delta t = 0$ zu setzen, wie wir es im früheren taten; aber es können Gründe vorhanden sein, weshalb die Einführung eines von Null verschiedenen, irgendwie passend gewählten Wertes von δt rascher zum Ziele führt. Wir bleiben also vorläufig ganz allgemein und legen dem δt weiter gar keine Beschränkung auf, als daß es kontinuierlich und unendlich klein von der Ordnung der δ der übrigen Größen sein soll.

Um den Unterschied zwischen der Variation bei Konstanthaltung der independenten Variabeln und der Variation, bei der auch die independente variiert wird, noch deutlicher hervortreten zu lassen, will ich hier eine kurze Einschaltung über die Grundprinzipien der Variationsrechnung im allgemeinen machen. Dieselbe soll nur unzusammenhängende Bruchstücke ohne jede subtile mathematische Analyse bloß zur Beleuchtung der geometrischen und physikalischen Bedeutung der betreffenden Begriffe geben. Sie soll auch keine Einleitung zum Studium der Variationsrechnung sein, sondern nur etwa zum Nebengebrauche beim Studium eines elementaren Lehrbuches über Variationsrechnung von einigem Nutzen sein. Erst nach Absolvierung dieser Einschaltung

will ich wieder zu unserer mechanischen Aufgabe zurückkehren.

Das einfachste Problem der Variationsrechnung ist das folgende: Man sucht eine Funktion $y = f(x)$ einer independenten Variabeln x so zu bestimmen, daß ein Integral von der Form:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')$$

ein Grenzwert wird. Dabei ist $y' = \frac{dy}{dx}$. x_0 und x_1 sind die konstant gegebenen oder in gegebener oder willkürlicher Weise veränderlichen Grenzen des Integrales.

In der Variationsrechnung denkt man sich nun die Funktion f, für welche der geforderte Grenzwert eintritt, gefunden und durch eine Kurve MN (Fig. 3, 4, 5) dargestellt. Dann denkt man sich die Funktion f unendlich wenig variiert, so daß eine unendlich benachbarte Kurve $M'N'$ entsteht. Man läßt nun jedem Punkte der unvariierten Kurve MN einen Punkt der variierten Kurve $M'N'$ korrespondieren und bezeichnet die Zuwächse, welche Abszisse und Ordinate des betreffenden Punktes erfahren, wenn man von irgend einem Punkte der unvariierten Kurve MN zu dem diesem Punkte korrespondierenden Punkte der variierten Kurve $M'N'$ übergeht, mit δx, δy.

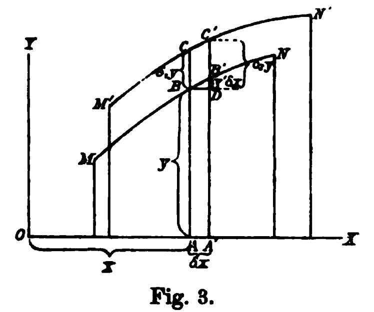


Fig. 3.

Am einfachsten und in den meisten Fällen am besten ist es, wenn man jedem Punkte der unvariierten Kurve denjenigen Punkt der variierten korrespondieren läßt, welcher vertikal darüber liegt, also dieselben Abszisse hat. Dann ist allgemein $\delta x = 0$, weil korrespondierende Punkte immer dieselbe Abszisse haben. δy aber, welches wir in diesem Falle als $\delta_1 y$ bezeichnen wollen, ist gleich der Ordinaten-

differenz der beiden Punkte, in denen eine der Ordinatenachse parallele Gerade die beiden Kurven durchschneidet. BC in Fig. 3 wäre das $\delta_1 y$, wenn B der fragliche Punkt der unvariierten Kurve, C der ihm korrespondierende Punkt der variierten Kurve ist.

Es kann sich aber auch aus gewissen Gründen empfehlen, jedem Punkte der unvariierten Kurve mit der Abszisse x einen Punkt der variierten Kurve korrespondieren zu lassen, welche eine ein wenig verschiedene Abszisse $x + \delta x$ hat, wobei man für δx eine beliebige Funktion von x wählen kann. Das δx des Punktes B in Fig. 3 sei durch das Stück AA' dargestellt. Dann ist das dazu gehörige δy, das in diesem Falle mit $\delta_2 y$ bezeichnet werden soll, der Zuwachs, welchen die Ordinate erfährt, wenn man von dem Punkte B der unvariierten Kurve MN, der die Abszisse x hat, zu dem korrespondierenden Punkte C' der variierten Kurve $M'N'$, also zu demjenigen Punkte dieser Kurve übergeht, welcher die Abszisse $x + \delta x$ hat. In Fig. 3 ist $C'D$ gleich $\delta_2 y$. dy dagegen ist immer der Zuwachs, welchen die Ordinate der unvariierten Kurve erfährt, wenn man bei derselben die Abszisse x um dx wachsen läßt; die variierte Kurve kommt dabei gar nicht in Betracht.

In Fig. 4 sei $AA_1 = dx$, $DB_1 = dy$. Unter $d\delta y = \delta dy$ endlich versteht man den Zuwachs, den das δy erfährt,

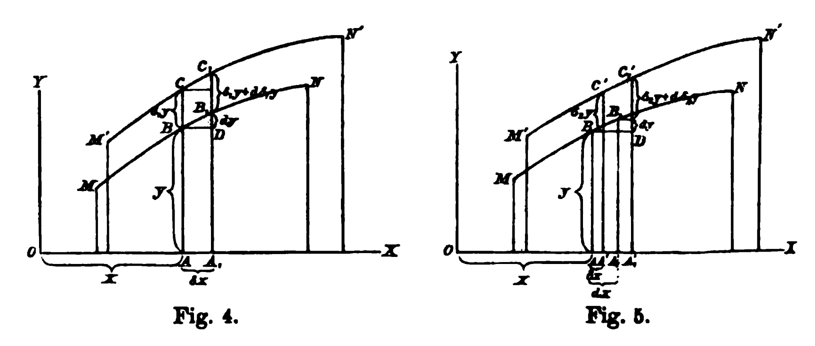


Fig. 4. Fig. 5.

wenn man es als Funktion von x ausdrückt und in dieser Funktion x um dx wachsen läßt oder den dy erfährt, wenn man von den beiden Punkten B und B_1 Fig. 4 u. 5, deren

Ordinatendifferenz gleich dy ist, zu den beiden ihnen korrespondierenden Punkten ($C C_1$ in Fig. 4, $C' C'_1$ in Fig. 5) der variierten Bewegung übergeht. In Fig. 4 sind alle diese Größen für den Fall dargestellt, daß $\delta x = 0$ ist, in Fig. 5 dagegen für den Fall, daß δx von Null verschieden ist. Im ersten Falle soll das $d\delta y$ mit $d\delta_1 y$, im letzteren mit $d\delta_2 y$ bezeichnet werden.

Die Analogie der beiden hier betrachteten Variationsarten mit den soeben in der Mechanik angewandten liegt, wie ich glaube, klar zutage. Nur daß in der Mechanik t statt x die independente Variable und statt der dependenten Variablen y eine ganze Reihe von Variablen vorhanden ist. Man könnte sich bei dem mechanischen Probleme die Verhältnisse in derselben Weise versinnlichen, wenn man die Werte des t als Abszissen und die Werte irgend einer der Koordinaten oder generalisierten Geschwindigkeiten oder Momente als Ordinaten darüber auftragen würde.

Dies ist es, was ich über Variationsrechnung im allgemeinen einschalten wollte und wir kehren nun wieder zur mechanischen Aufgabe zurück.

§ 38. Über die Verallgemeinerungen, welche Helmholtz dem Prinzipe der kleinsten Wirkung erteilte.

Wir wollen also nun auch t der Variation unterwerfen. Sein Zuwachs heiße δt, d. h. wir lassen dem zur Zeit t stattfindenden Zustande der unvariierten Bewegung den zur Zeit $t + \delta t$ gehörenden Zustand der variierten Bewegung korrespondieren. Wir bleiben dabei in diesem Paragraph, wie schon bemerkt, ganz allgemein, d. h. wir legen dem δt sonst gar keine Beschränkung auf, als daß es eine kontinuierliche Funktion von t und unendlich klein von der Ordnung der δ der übrigen Größen sein soll.

Wir verfahren nun in der nachstehenden Weise. Wir bilden uns den Ausdruck

$$225) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left[2T\delta\, dt + \delta T\, dt + \sum_{1}^{s} {}_h P_h\, \delta p_h\, dt\right].$$

Diesen Ausdruck transformieren wir in der folgenden Weise. Wir ersetzen das erste Glied des Ausdrucks in der eckigen Klammer durch

$$\sum_1^s {}_h\, q_h p'_h\, \delta\, d t,$$

(was skleronome Koordinaten voraussetzt), das zweite durch:

$$\sum_1^s {}_h\, q_h\, \delta p'_h\, d t + \sum_1^s {}_h\, \frac{\partial T}{\partial p_h}\, \delta p_h\, d t.$$

Die Summe dieser beiden Glieder reduziert sich dann auf:

226) $$\sum_1^s {}_h\, q_h\, \delta (p'_h\, d t) + \sum_1^s {}_h\, \frac{\partial T}{\partial p_h}\, \delta p_h\, d t.$$

Nun ist aber $p'_h\, d t = d p_h$, daher:

$$\delta (p'_h\, d t) = \delta\, d p_h = d\, \delta p_h.$$

Hieraus folgt:

227) $$\sum q_h\, \delta (p'\, d t) = \sum_1^s {}_h\, q_h\, \frac{d\, \delta p_h}{d t}\, d t.$$

Integriert man jedes Glied der letzteren Summe, wie wir es früher schon öfters taten, per partes, substituiert den so aus 227) erhaltenen Ausdruck in den nach 226) integrierten Ausdruck, dann diesen statt der beiden ersten Glieder des Ausdrucks 225) in diesen Ausdruck, und bedenkt noch, daß kraft der Bewegungsgleichungen, weil die unvariierte Bewegung eine natürliche sein soll,

$$\sum_1^s {}_h \left(- \frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h \right) \delta p_h = 0$$

ist und zwar sowohl, wenn keine, als auch wenn Bedingungsgleichungen vorhanden sind, so findet man:

228) $$\int_{t_0}^{t_1} [2 T \delta d t + (\delta T + \sum_1^s P_h\, \delta p_h)\, d t] = \sum_1^s (q^1_h\, \delta p^1_h - q^0_h\, \delta p^0_h).$$

Diese Gleichung umfaßt das Prinzip der stationären und das der kleinsten Wirkung; es ist vorausgesetzt, daß die generalisierten Koordinaten skleronom sind.[1])

1. Falls $\delta dt = 0$ ist, folgt, da wir die Integrationsgrenzen nicht variierten, wieder das Hamiltonsche Prinzip recte das Prinzip der stationären Wirkung.

2. Wenn die Variationen der Koordinaten für die Integrationsgrenzen verschwinden und außerdem die Variation speziell so ausgeführt wird, daß überall

229) $$\delta T = \sum_1^s P_h \delta p_h,$$

also der Zuwachs der lebendigen Kraft immer gleich der durch Variation der Koordinaten geleisteten Arbeit ist, so daß die die Variation erzeugenden Zusatzkräfte niemals Arbeit leisten, so ist $\int_{t_0}^{t_1} 2\delta(T dt) = 0$, daher auch

230) $$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0;$$

denn die Variation der Grenzen ist hier schon durch Variation des Zeitdifferentiales berücksichtigt.

Falls $\delta T - \sum_1^{s} P_h \delta p_h$ nicht die Variation eines Ausdrucks ist, der für endliche Teile der unvariierten Bewegung konstant ist, kann man sich vorstellen, daß die Bedingung 229) sich bloß darauf bezieht, welche Momente der variierten Bewegung man den verschiedenen Momenten der unvariierten korrespondieren läßt, so daß durch die Bedingung 229) der ganze Verlauf der variierten Bewegung in keiner Weise beschränkt wird, diese Bedingung vielmehr bloß die beiden Punkte bestimmt, welche für die variierte Bewegung als Anfangspunkt und Endpunkt der Integration gewählt werden

[1]) Falls die Zeit variiert wird, folgt aus dem Verschwinden der Variationen der rechtwinkligen Koordinaten an beiden Zeitgrenzen keineswegs auch das Verschwinden der Variationen irgend welcher nicht skleronomer generalisierter Koordinaten an denselben Zeitgrenzen. Ersteres kann dann nichtholonomen Bedingungen widersprechen.

müssen. Für Anfang und Ende der Integration müssen dann noch die Koordinatenvariationen verschwinden. Denn da wir die Grenzen des Integrals nicht variiert haben, so muß der Zustand der unvariierten Bewegung, welche für diese die untere Integrationsgrenze bildet, dem Zustande korrespondieren, welcher für die variierte Bewegung die untere Integrationsgrenze bildet und dasselbe muß für die oberen Integrationsgrenzen gelten.

Dies wird besonders klar, wenn eine Kraftfunktion V existiert, welche aber die Zeit explizit enthält. Setzt man dann $T + V = E$, so ist:

$$\delta T - \sum_{1}^{s} {}^{k} P_k \, \delta p_k = \delta E.$$

Da aber V und folglich auch E die Zeit explizit enthalten, so durchläuft E sowohl für die unvariierte als auch für die variierte Bewegung eine Reihe kontinuierlich sich folgender Werte. Hat dann E nicht gerade für eine der Integrationsgrenzen ein Maximum oder Minimum, so kann die Bedingung 229) dahin ausgesprochen werden, daß der Anfangszustand der variierten Bewegung dort gewählt werden muß, wo für die variierte Bewegung E denselben Wert hat, den es für den Anfangszustand der unvariierten Bewegung hat und daß dasselbe auch für die Endzustände, d. h. für die den oberen Grenzen der Integrale entsprechenden Zustände gelten muß. Eine bestimmte Angabe, wie variiert werden muß, liegt dann noch darin, daß für die beiden Integrationsgrenzen die Variationen sämtlicher Koordinaten verschwinden müssen.

Es genügt dann überhaupt, abgesehen von den Stellen, wo E einen Grenzwert hat und vorausgesetzt, daß die Koordinatenvariation für die Integrationsgrenzen verschwinden, jedem Zustande der unvariierten Bewegung denjenigen der variierten korrespondieren zu lassen, wo E exakt denselben Wert hat, geradeso wie beim Prinzip der stationären Wirkung solche Zustände korrespondierten, für welche t exakt denselben Wert hat. Letztere Vorstellung ist uns so natürlich, da t niemals ein Maximum oder Mini-

mum haben oder gar für eine endliche Strecke konstant sein kann; erstere Vorstellung ist uns unnatürlich, weil gerade für die wichtigsten Fälle E während der ganzen unvariierten und auch während der variierten Bewegung konstant ist. Hat es für beide Bewegungen denselben konstanten Wert, so ist in richtiger Weise variiert, allein dies ist nicht durch die Art und Weise bewirkt, wie sich die Zustände korrespondieren. Hat dagegen E für beide Bewegungen unendlich wenig verschiedene Werte, so kann dies durch keine Art der Zuordnung der Zustände gutgemacht werden.

§ 39. Jacobis Beleuchtung des Sinnes des Prinzipes der kleinsten Wirkung. Einfaches Beispiel für den Unterschied zwischen dem Prinzipe der stationären und dem der kleinsten Wirkung.

Es sei hier noch eines Umstandes erwähnt, auf den namentlich Jacobi großes Gewicht legt. Es soll die Variation der Koordinaten für beide Integrationsgrenzen verschwinden und es soll eine Kraftfunktion existieren, welche für die unvariierte und die variierte Bewegung die gleiche die Zeit nicht enthaltende Funktion der Koordinaten ist. Außerdem sollen die generalisierten Koordinaten skleronom sein. Dann besteht für beide Bewegungen die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$T + V = \text{konst.} = E.$$

Der Wert dieser Größe E, welche jetzt als eine gegebene Konstante zu betrachten ist, soll nun beim Übergange von der unvariierten zur variierten Bewegung auch keine Änderung erfahren.

Da nach Gleichung 35)

$$231) \qquad 2T = \sum_1^s{}_h \sum_1^s{}_k a_{hk} \frac{dp_h}{dt} \frac{dp_k}{dt}$$

ist, so folgt:

232) $$dt = \frac{1}{\sqrt{2(E-V)}}\sqrt{\sum_1^s {}^h \sum_1^s {}^k a_{hk}\, dp_h\, dp_k}\,.$$

Unter den angegebenen Umständen muß nach Gleichung 224)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = 0$$

sein, was nach Gleichung 231) übergeht in

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^s {}^h \sum_1^s {}^k a_{hk} \frac{dp_h}{dt}\, dp_k = 0.$$

Da hier die Zeit, bei welcher die Integration beginnt, und ebenso die, wo sie endet, beliebig variieren können, und außerdem die Zeit in dem Integrale sonst in keiner Weise vorkommt, als daß dt im Nenner von $\frac{dp_h}{dt}$ steht, so kann man für dt seinen Wert aus Gleichung 232) einsetzen und erhält

233) $$\delta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{E-V}} \sqrt{\sum_1^s {}^h \sum_1^s {}^k a_{hk}\, dp_h\, dp_k} = 0\,.$$

Die Grenzen des Integrals bedeuten hier, daß von den gegebenen Anfangswerten der Koordinaten zu den ebenfalls gegebenen Endwerten derselben zu integrieren ist. Die Zeit ist da vollständig eliminiert. Die Gleichung 233) drückt also nur eine geometrische Bedingung für die Bahn des materiellen Systems aus, d. h. sie bestimmt die Bahnform für jeden einzelnen Punkt, und welche Punkte aller Bahnen aller materiellen Punkte zusammengehören, d. h. zu einer und derselben Zeit gehörige Lagen der materiellen Punkte darstellen.

Diese „Bahn des materiellen Systems“ wird dahin bestimmt, daß unter Einhaltung der Bedingungsgleichungen die Variation 233) verschwinden muß. Wie aber diese Bahnen im Verlaufe der Zeit zurückgelegt werden, d. h. welcher Wert des t zu jeder geometrischen Konfiguration der Punkte gehört, wird durch die Gleichung 233) nicht

bestimmt, sondern vielmehr durch Integration der Gleichung 232).

Da im Integrale der Gleichung 233) die Zeit gar nicht enthalten ist, so kann man sie nicht als independente Variable wählen. Wollte man in diesem Integrale durchaus eine bestimmte independente Variable haben, so könnte man eine der Koordinaten, z. B. p_1, als solche wählen und die Gleichung 233) schriebe sich in der Form

$$\delta \int_{p^0_1}^{p^1_1} \frac{d p_1}{\sqrt{E - V}} \sqrt{\sum_1^s{}^h \sum_1^s{}^k a_{hk} \frac{d p_h}{d p_1} \frac{d p_k}{d p_1}} = 0 ,$$

wobei natürlich für $\frac{d p_1}{d p_1}$ der Wert eins zu setzen ist.

Wir wollen nun an einem ganz einfachen Beispiele den Unterschied zwischen dem Prinzipe der stationären und dem der kleinsten Wirkung erörtern.

Es bestehe das System aus einem einzigen materiellen Punkte, der entweder ganz frei oder gezwungen ist, auf einer vorgeschriebenen unveränderlichen Fläche zu bleiben, und auf den keine expliziten Kräfte wirken, d. h. keine als eventuell die Kraft, die ihn zwingt, auf dieser Fläche zu bleiben. Es ist V konstant, und da es für die variierte Bewegung der Koordinaten gleich derselben Funktion der Koordinaten sein muß, so hat es auch für diese denselben konstanten Wert.

Da ferner $V + T$ unserer Verabredung gemäß ebenfalls für die variierte und unvariierte Bewegung denselben konstanten Wert haben muß, so muß T und daher auch die Geschwindigkeit c des materiellen Punktes für beide Bewegungen gleich derselben Konstanten sein. Aus Gleichung 224) folgt daher, daß:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{m c^2}{2} d t = \frac{m c}{2} \int d s$$

ein Grenzwert sein muß. Da ferner m und c invariable Konstante sind, so muß

234) $$\delta \int d s = 0$$

sein, also die Länge $\int ds$ des Weges von einem unveränderlichen Ausgangspunkte zu einem unveränderlichen Endpunkte der Bewegung ein Grenzwert sein, ohne daß die zur Zurücklegung dieses Weges erforderliche Zeit für die variierte und unvariierte Bewegung gleich zu sein braucht.

Wollten wir dagegen das Prinzip der stationären Wirkung auf diesen Fall anwenden, so könnte, wie wir sahen, für die variierte Bewegung die Geschwindigkeit von Stelle zu Stelle ein wenig verschieden sein, müßte aber so variieren, daß die ganze Übergangszeit von einem fixen Ausgangspunkt zu einem fixen Endpunkte nicht variieren würde und das Integral 202), also auch (da V, $t_1 - t_0$ und m konstant sind) das Integral $\int_{t_0}^{t_1} c^2 dt$ ein Grenzwert würde.

§ 40. Verschiedene Fälle, wo die Grenzglieder verschwinden.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung läßt sich noch mehr verallgemeinern. Wir nahmen bisher an, daß der Ausgangspunkt und Endpunkt der Bahnen sämtlicher materieller Punkte nicht variiert, was wir den Fall A nennen wollen. Das letzte Glied der Gleichung 223) verschwindet aber auch noch in vielen anderen Fällen. 1. Im folgenden Falle, den wir den Fall B nennen wollen. Sowohl die variierte als auch die unvariierte Bewegung sollen periodisch sein, so daß bei ersterer nach einer endlichen Zeit i genau dieselben Bewegungszustände, sowohl Positionen als auch Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen, für sämtliche materielle Punkte gleichzeitig wiederkehren. Dasselbe soll gelten, wenn nochmals die Zeit i verläuft und dann wieder nach der Zeit i u. s. f. Für die variierte Bewegung soll analoges gelten; jedoch kann die Zeitdauer einer Periode unendlich wenig verschieden, z. B. gleich $i + \delta i$ sein. Setzt man dann

$$t_1 = t_0 + i, \; \delta t_1 = \delta i,$$

so gelten für jeden Wert des h infolge der Periodizität der Bewegung die Gleichungen:

$p^1_h = p^0_h$, $q^1_h = q^0_h$, $\mathfrak{p}^1_h = \mathfrak{p}^0_h$ oder $p^1_h + \delta p^1_h = p^0_h + \delta p^0_h$,
daher:

$$\delta p^1_h = \delta p^0_h .$$

Es verschwinden also im letzten Gliede der Gleichung 223) zwar nicht die auf die obere und untere Grenze bezüglichen Glieder separat, aber sie werden für beide Grenzen gleich, so daß das ganze letzte Glied der Gleichung 223) doch verschwindet. Wir setzen jetzt immer skleronome skleronom bestimmte Systeme voraus.

Ein dritter Fall, wo dieses Glied verschwindet, ist der folgende, den wir den Fall C nennen. Wir bezeichnen mit L_0 die Stelle des Raumes, wo sich irgend ein materieller Punkt des Systems für die unvariierte Bewegung zur Zeit t_0 befindet, mit M_0 die Stelle, wo er sich für dieselbe Bewegung zur Zeit $t_0 + d t_0$ befindet, mit N_0 die Stelle, wo er sich bei der variierten Bewegung zur Zeit t_0 befindet. Wir wollen ferner die Lage der Punkte des Systems durch gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten bestimmen und es seien:

$$p_h, \; p_{h+1} \quad \text{und} \quad p_{h+2}$$

die rechtwinkligen Koordinaten des eben besprochenen materiellen Punktes. Dann sind die Momente gleich den mit der Masse m multiplizierten Geschwindigkeiten; es sind also

$$\frac{1}{m} q^0_h \, d t_0, \quad \frac{1}{m} q^0_{h+1} \, d t_0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} q^0_{h+2} \, d t_0$$

die Projektionen der Geraden $L_0 M_0$ auf die drei Koordinatenachsen. Dagegen sind:

$$\delta p^0_h, \; \delta p^0_{h+1} \quad \text{und} \quad \delta p^0_{h+2}$$

die Projektionen der Geraden $L_0 N_0$ auf die Koordinatenachsen. Wenn also diese beiden Geraden aufeinander senkrecht stehen, so muß, wie man sofort sieht, wenn man die Kosinusse der Winkel, welche jede der Geraden mit den Koordinatenachsen bildet, einführt

$$q^0_h \, \delta p^0_h + q^0_{h+1} \, \delta p^0_{h+1} + q^0_{h+2} \, \delta p^0_{h+2} = 0$$

sein.

Ebenso wollen wir mit L_1, M_1, N_1 die Stellen bezeichnen, wo sich derselbe materielle Punkt 1. auf der unvariierten Bahn zu den Zeiten t_1, 2. auf derselben Bahn zur Zeit $t_1 + dt_1$, 3. auf der variierten Bahn zur Zeit $t_1 + \delta t_1$ befindet. Dann ist

$$q^1_\lambda \delta p^1_\lambda + q^1_{\lambda+1} \delta p^1_{\lambda+1} + q^1_{\lambda+2} \delta p^1_{\lambda+2} = 0$$

die Bedingung, daß auch die Geraden $L_1 M_1$ und $L_1 N_1$ aufeinander senkrecht stehen. Wenn man daher die Variation der Anfangslage und Endlage so ausführt, daß jeder Punkt in der Ebene verschoben wird, welche senkrecht steht, auf seiner augenblicklichen Bewegungsrichtung in der unvariierten Bahn, was wir die orthogonale Grenzbestimmung oder Grenzbestimmung K nennen wollen, so verschwindet das letzte Glied der Gleichung 223) ebenfalls. Hierbei ist natürlich unter der Variation der Endlage die Verschiebung von der Stelle, wo sich der materielle Punkt in der unvariierten Bahn zur Zeit t_1 befand, welche die obere Grenze des Integrales 202) bildet, nach derjenigen Stelle zu verstehen, wo er sich in der variierten Bahn zur Zeit $t_1 + \delta t_1$ befindet, welche die obere Grenze des auf die variierte Bahn bezughabenden Integrales 203) ist.

Wenn das letzte Glied der Gleichung 223) verschwindet, so folgt aus derselben

235) $$2\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E dt.$$

Wir wollen nun nicht, wie wir es in den letzten vier Paragraphen taten, voraussetzen, daß dem Systeme bei der Variation der Bewegung keine Energie zugeführt wird. Wir wollen vielmehr annehmen, die unvariierte Bewegung geschehe mit der konstanten Energie E, die variierte aber mit der ebenfalls konstanten, aber unendlich wenig davon verschiedenen Energie $E + \delta E$, so daß sich das erste Glied der rechten Seite der Gleichung 223) auf $(t_1 - t_0)\delta E$ reduziert. Die Kraftfunktion V soll die Zeit nicht explizit enthalten.

Wenn wir dann die Größe

$$236)\qquad \bar{T} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} T\,dt$$

als das Zeitmittel der lebendigen Kraft für die unvariierte Bewegung während der Zeit $t_1 - t_0$ bezeichnen, so erhalten wir aus Gleichung 223) jedesmal, wenn das letzte Glied dieser Gleichung verschwindet, also z. B. in jedem der Fälle, welche wir zu Anfang dieses Paragraphen die Fälle A, B und C genannt haben, die Gleichung:

$$237)\qquad \frac{\delta E}{\bar{T}} = \delta l\left[\left(\int_{t_0}^{t_1} T\,dt\right)^2\right] = \delta l\left[\bar{T}^2 (t_1 - t_0)^2\right],$$

wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Wir wollen die Bedeutung dieser Formel durch zwei Beispiele erläutern, deren erstes wir in diesem Paragraph bringen, während wir das zweite dem folgenden Paragraph vorbehalten. *1. Beispiel:* Es soll für irgend ein Wertegebiet der Integrationskonstanten der Fall B eintreten d. h. die Bewegung soll eine periodische sein, die sich nach der Zeit i, deren Länge Funktion der Integrationskonstanten sein kann, genau wiederholt.

Dies trifft zu, wenn das System ein einzelner materieller Punkt ist, der unter dem Einfluß einer der Entfernung vom Zentrum direkt proportionalen Anziehung oder einer das Newtonsche Gravitationsgesetz befolgenden Anziehung eine Zentralbewegung macht. Im letzteren Falle jedoch nur für dasjenige Wertegebiet der Integrationskonstanten, wo die Bahn ganz im Endlichen liegt.

Die Integrationskonstanten sollen anfangs bestimmte Werte haben, welche einer bestimmten Anfangsbewegung mit der Periode i_0 und der mittleren lebendigen Kraft $\bar{T}_0$ entsprechen. Dann soll dem Systeme eine kleine Energiemenge δE_0 zugeführt werden, wobei auch die Flächengeschwindigkeit eine beliebige davon unabhängige Veränderung erfahren kann. Die mit diesen neuen Werten der Integrationskonstanten stattfindende Zentralbewegung nennen wir die zweite; ihr entspreche die Periode i_1 und die mittlere

lebendige Kraft $\bar{T}_1$. Hierauf soll in gleicher Weise unter abermaliger beliebiger unendlich kleiner Änderung der Flächengeschwindigkeit eine zweite Energiemenge δE_1 zugeführt werden, welche eine dritte Bewegungsart mit abermals veränderten Werten der Integrationskonstanten zur Folge hat. So fährt man fort, bis man eine ins Endliche verschiedene Schlußbewegung erhält, für welche die betreffenden Werte den Index m bekommen sollen.

Auf jede Veränderung der Bewegung kann man dann die Formel 237) anwenden, wobei man $t_1 - t_0$ immer gleich der Periode i der betreffenden Bewegung setzt. Summiert man alle in dieser Weise der Reihe nach für die verschiedenen Veränderungen der Bewegung erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$\sum \frac{\delta E}{\bar{T}} = l(\bar{T}^2_m i^2_m) - l(\bar{T}^2_0 i^2_0).$$

Wenn sich die Werte der Integrationskonstanten in der geschilderten Weise um Endliches von ihren Anfangswerten entfernt haben, und dann in anderer Weise schließlich wieder zu ihren Anfangswerten zurückgekehrt sind, so wollen wir dies einen Kreisprozeß nennen. Für einen solchen ist $\bar{T}_m = \bar{T}_0$ und $i_m = i_0$, daher:

$$\sum \frac{\delta E}{\bar{T}} = 0.$$

Natürlich ist aber in diesem Falle auch $\sum \delta E = 0$; da man ja zur alten Bewegung zurückgekehrt ist, der dieselbe Energie innewohnt.

§ 41. Beispiel mit orthogonaler Variation.

Ein einziger materieller Punkt soll sich unter dem Einflusse von Kräften, die eine unveränderliche, die Zeit nicht explizit enthaltende Kraftfunktion haben, bewegen. Wir gehen von der unvariierten, mit der Energie E_0 stattfindenden Bewegung zu einer unendlich wenig verschiedenen mit der Energie $E_0 + \delta E_0$ stattfindenden Bewegung, dann zu einer mit der Energie $E_0 + \delta E_0 + \delta E_1$ etc. statt-

findenden Bewegung über, bis wir endlich zu einer um Endliches verschiedenen Bewegung gelangen. Die Bewegung soll aber jetzt nicht jedesmal in einer geschlossenen Bahn geschehen. Es wird auch jetzt das letzte Glied der Gleichung 223) verschwinden und daher die Gleichung 237) gelten, wenn wir für die erste Bewegung die Grenzen der Integration beliebig wählen, aber für alle folgenden Bewegungen die Grenzen der Integration durch diejenige Konstruktion bestimmen, welche wir orthogonale Grenzbestimmung oder die Konstruktion K genannt haben d. h. als untere Grenze jedes folgenden Integrales soll die Zeit gewählt werden, wann der Punkt in der variierten Bahn die Ebene passiert, welche senkrecht zur augenblicklichen Bewegungsrichtung durch denjenigen Punkt der vorigen Bahn geht, wo er sich daselbst zur Zeit befand, welche damals untere Grenze des Integrales war. Durch die gleiche Konstruktion sollen sukzessive die oberen Grenzen der Zeit gefunden werden. Dann gilt wieder die Gleichung 237).

Wenn man jetzt abermals einen Kreisprozeß durchläuft, d. h. von der ursprünglichen Bahn $M_1 N_1$ durch fortwährende Variationen zu einer ganz anderen Bahn $M_3 N_3$ übergeht und dann wieder in einer anderen Weise (auf einem anderen Wege) zur alten Bahn $M_1 N_1$ mit den alten Integrationskonstanten zurückkehrt, so muß wieder $\sum \delta E = 0$ sein, aber $\sum \frac{\delta E}{T}$ braucht nicht gleich Null zu sein, da man durch fortwährende Anwendung der Konstruktion K bei Rückkehr zur selben Bahn durchaus nicht immer auf dieser Bahn auch zu demselben Ausgangspunkte und Endpunkte der Integration, also zu denselben Grenzen für t zu gelangen braucht, wenn man beim Übergange von der Bahn $M_3 N_3$ zur Bahn $M_1 N_1$ zurück nicht wieder dieselben Bahnen nur in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen hat, wie beim Hingange von der Bahn $M_1 N_1$ zur Bahn $M_3 N_3$, sondern wenn der Rückweg über ganz andere Bahnen, als der Hinweg erfolgt ist.

Wir wollen dies deutlichkeitshalber in einem ganz

speziellen Falle durch Figuren versinnlichen. Sei eine endliche Strecke der ursprünglichen Bahn $M_1 N_1$ gerade (Fig. 6). Wir wählen die beiden Punkte A und B als Integrationsgrenzen. Wir wollen nämlich immer kurz sagen:

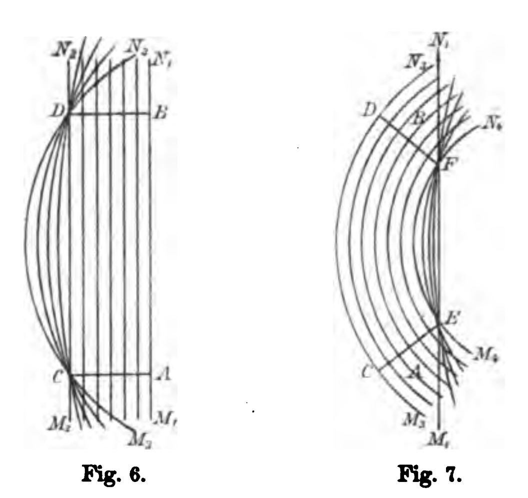


Fig. 6. Fig. 7.

Ein Punkt ist Integrationsgrenze, wenn die Zeit, zu welcher das Bewegliche den betreffenden Punkt passiert, Integrationsgrenze des Integrales 202) ist. Die Variation der Bahn bestehe anfangs darin, daß sich dieses gerade Stück parallel zu sich selbst immer mehr nach links verschiebt, bis es in die Lage $M_2 N_2$ gelangt ist. Wenn wir die Grenzen fort und fort orthogonal variieren, so kommen wir endlich bei der Bahn $M_2 N_2$ zu den Punkten C und D als Integrationsgrenzen.

Während der weiteren Variation soll nun die Bahn sich immer mehr und mehr krümmen, bis wir zur Bahn $M_3 N_3$ gelangt sind. Sie soll aber dabei immer durch die beiden Punkte C und D gehen. Wenn wir daher weiter orthogonal variieren, so hören die Punkte C und D während dieser zweiten Periode der Variation nicht auf die Integrationsgrenzen zu bleiben. Nun soll die Bahn des Beweglichen wieder zur alten Form zurückkehren, aber nicht auf demselben Wege, auf welchem sie sich von $M_1 N_1$ in $M_3 N_3$ verwandelte. Diese weitere Art der Variation ist in Fig. 7 dargestellt. Es soll

die Bahn zunächst ungefähr gleich gekrümmt bleiben, oder ihre Krümmung sogar noch etwas zunehmen. Dabei soll sich die Bahn aber immer mehr nach rechts verschieben (dritter Variationsprozeß). Die Reihe der Formen, welche die Bahn während des dritten Variationsprozesses durchläuft, nennen wir kurz die Kurvenschar S.

Wenn wir jetzt die Grenzen orthogonal transformieren, so kommen wir für die Punkte, welche der oberen und unteren Grenze des Integrales 223) entsprechen, auf die Punkteschar, die die beiden durch die Punkte C und D gehenden orthogonalen Trajektorien zur Kurvenschar S bilden. Diese beiden Trajektorien sollen die Gerade $M_1 N_1$, welche der ursprünglichen unvariierten Bahn angehört, in den beiden Punkten E und F treffen, welche also die Integrationsgrenzen darstellen, sobald die durch die Punkte E und F gehende Bahn von dem Beweglichen erreicht ist. Von da angefangen soll die Bahn in folgender Weise weiter variiert werden (vierter Variationsprozeß). Ihre Krümmung soll sich immer mehr vermindern, sie soll sich daher immer mehr der Geraden nähern, dabei aber nicht aufhören, durch die beiden Punkte E und F zu gehen. Wenn wir immer orthogonal transformieren, so bleiben also jetzt E und F die Integrationsgrenzen. Der vierte Variationsprozeß soll fortgesetzt werden, bis wieder die alte Bahn $M_1 N_1$ erreicht ist und überhaupt wieder der ganze Bewegungsprozeß derselbe geworden ist, der er bei der ursprünglichen unvariierten Bewegung war.

Wir haben also jetzt einen vollständigen Kreisprozeß durchlaufen. Der Bewegungsprozeß wurde fort und fort variiert, bis er schließlich genau wieder der alte geworden ist. Die Bahn ging von der Gestalt $M_1 N_1$ aus, transformierte sich allmählich in die Gestalt $M_2 N_2$ und kehrte dann auf anderem Wege wieder in die ursprüngliche Gestalt $M_1 N_1$ zurück. Obwohl daher das Integral $\int_{t_0}^{t_1} T\,d\,t$ zum Schluß wieder genau über denselben Bewegungszustand zu erstrecken ist, wie zu Anfang, so ist doch jetzt der Wert desselben

ein ganz anderer, weil es zwischen ganz anderen Grenzen zu erstrecken ist. Ursprünglich waren nämlich die Integrationsgrenzen die Zeiten, während welcher das Bewegliche die Punkte A und B passierte. Jetzt sind es die Zeiten, während welcher es die Punkte E und F passiert, welche mit τ_0 und τ_1 bezeichnet werden mögen. Wenn wir daher durch das Integralzeichen jetzt eine Summe aller während des ganzen in Fig. 6 und 7 dargestellten Variationsprozesses eintretenden Zuwächse bezeichnen, so folgt aus Gleichung 237)

238) $$\int \frac{\delta E}{T} = l\left[\int_{t_0}^{t_1} T\,dt\right]^2 - l\left[\int_{\tau_0}^{\tau_1} T\,dt\right]^2,$$

was im allgemeinen keineswegs gleich Null sein wird.

Um die Sätze, welche wir in diesem und dem vorigen Paragraphen behandelt haben noch weiter zu spezialisieren, können wir den schon im ersten Teile § 22 behandelten Fall einer Zentralbewegung benutzen, welche ein materieller Punkt von der Masse m ausführt, wenn er gegen ein festes Zentrum 0 mit der Kraft $\frac{m\lambda}{r^2} - \frac{ma}{r^3}$ gezogen wird.

Hierbei ist r die Entfernung des materiellen Punktes vom Anziehungszentrum, λ und a sind konstant. Aus den dort entwickelten Formeln findet man durch Ausführung einiger überaus einfacher Integrationen[1]) für die Zeit, welche das Bewegliche braucht, um vom Perihel (Perizentrum) zum Aphel (Apozentrum) zu gelangen, den Betrag:

$$\tau = -\frac{\pi\lambda}{h}\sqrt{-\frac{1}{h}}.$$

Ferner ergibt sich das vom Perihel zum Aphel erstreckte Integral

$$\int T\,dt = \pi m\left[-\frac{3\lambda}{2}\sqrt{-\frac{1}{h}} + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{a+k^2}}\right].$$

[1]) Näheres über die Durchführung dieser Integrationen, auf welche ich hier nicht weiter eingehen will, da es bloße Übungsaufgaben zu den einfachsten Sätzen der Integralrechnung sind, findet man Wiener Sitzungsber. Bd. 75, II, Januar 1877.

Die Division dieser beiden Ausdrücke liefert:

238) $$\overline{T} = m\,h\left[\frac{3}{2} - \frac{a}{2\,\lambda}\sqrt{-\frac{h}{a+k^2}}\right].$$

Der gesamte Zuwachs der Energie aber ist $\delta E = \delta h$. Es folgt also:

239) $$\frac{\delta E}{\overline{T}} = \frac{\delta h}{m\,h\left[\frac{3}{2} - \frac{a}{2\,\lambda}\sqrt{-\frac{h}{a+k^2}}\right]}.$$

Für $a = 0$ geschieht die Zentralbewegung nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze. Die Bahn ist, sobald sie überhaupt ganz im Endlichen liegt, eine geschlossene. Und es ist auch $\frac{\delta E}{\overline{T}}$ ein vollständiges Differential. Ist dagegen a von Null verschieden, so sind die Bahnen im allgemeinen nicht geschlossen. Es ist dann auch $\frac{\delta E}{\overline{T}}$ kein vollständiges Differential der beiden als independent betrachteten Variabeln h und k (der durch die Anfangswerte bestimmten Integrationskonstanten der Bewegungsgleichung). Denn es ist allerdings für orthogonale Variation der Grenzen nach Formel 237): $\frac{\delta E}{\overline{T}} = \left| l(\int T\,d\,t)^2 \right|_{\text{Anf.}}^{\text{Ende}}$.

Allein wenn die Bahn nach beliebiger Variation der Größen h und k wieder dieselbe wird, so werden die Grenzen von $\int T\,d\,t$ bei fortwährender orthogonaler Variation keineswegs dieselben und $\left| l(\int T\,d\,t)^2 \right|_{\text{Anf.}}^{\text{Ende}}$ hat einen von Null verschiedenen Wert.

IV. Analogien mit physikalischen, besonders wärmetheoretischen Sätzen.

§ 42. Analogon der zugeführten Wärme.

Die spezielle Eigentümlichkeit der Gleichungen der Thermodynamik ist dadurch bedingt, daß der Zuwachs der zugeführten Wärme kein vollständiger Differentialausdruck ist. Nun ist aber das Differentiale δE der zugeführten Energie immer ein vollständiger Differentialausdruck, solange wir, wie in den Beispielen des vorigen Paragraphen, skleronome Systeme betrachten. Solange wir uns daher auf die Betrachtung solcher Systeme beschränken und das Differential der zugeführten Wärme mit dem Zuwachse δE der Gesamtenergie in Parallele stellen, ist also schon in diesem wichtigsten Stücke keine Analogie vorhanden.

Es hat aus diesem Grunde schon Clausius Systeme betrachtet, in denen Fernkräfte vorkommen, deren Wirkungsgesetz sich mit der Zeit ändert, so daß also an die Stelle gewisser, sonst in der Kraftfunktion V vorkommender Konstanten, mit der Zeit sehr langsam veränderliche Parameter treten und das betrachtete mechanische System rheonom ist.

Wenn man sich z. B. einen ein warmes Gas abschließenden Stempel unter dem Bilde äußerer auf die Gasmoleküle wirkender abstoßender Normalkräfte denkt, die bei großer Annäherung an die Oberfläche des Stempels plötzlich enorm große Werte annehmen, so kann man sich ein langsames Zurückweichen des Stempels unter dem Bilde einer langsamen Änderung der Kraftfunktion dieser Kräfte denken. Analog fingiert Clausius auch Zentralbewegungen, bei denen das Wirkungsgesetz der Zentralkraft mit der Zeit veränderliche Parameter enthält.

Es tritt aber bei dieser Clausiusschen Vorstellung der Veränderlichkeit des Wirkungsgesetzes der Naturkräfte eine Rechnungsschwierigkeit ein. Zur Kraftfunktion V dieser Kräfte tritt immer eine additive willkürliche Konstante hinzu, welche wir dadurch bestimmt denken können, daß für

eine bestimmte Lage sämtlicher materieller Punkte des Systems (Nullniveau des Potentiales) $V = 0$ wird. Für skleronome Systeme ist es vollkommen gleichgültig, welche Lage man hierfür wählt. Ändert sich dagegen das Wirkungsgesetz der Kraft mit der Zeit, so ändert sich auch die Arbeit, welche die Überführung von einer Nulllage in eine andere erfordert. Der Absolutwert des V ändert sich daher in verschiedener Weise, je nachdem die eine oder andere Nulllage gewählt wird und um vollständig bestimmt zu sein, muß man angeben, welche besondere Lage man als Nulllage wählt.

Am besten ist es da wohl immer diejenige Lage zu wählen, wobei alle materiellen Punkte so weit voneinander und von allen übrigen auf sie wirkenden Punkten entfernt sind, daß auf keinen derselben mehr eine bemerkbare Kraft wirkt. In physikalischen Fällen wird diese Wahl der Nulllage immer möglich sein. Nur bei Kraftgesetzen, welche durch mathematische Abstraktion konstruiert sind, z. B. wenn die Kraft, welche zwischen zwei materiellen Punkten wirkt, der Entfernung derselben direkt proportional angenommen wird, kann diese Wahl der Nulllage unmöglich werden.

Die Clausiussche Annahme, daß sich das Wirkungsgesetz der zwischen den materiellen Punkten tätigen Kräfte mit der Zeit verändert, gibt zwar eine vollständige Analogie mit den thermodynamischen Gleichungen; allein in der Natur bemerken wir nichts, was darauf hindeuten würde, daß das Wirkungsgesetz gewisser Naturkräfte mit der Zeit veränderlich wäre. Ja es würde sogar die physikalische Forschung überhaupt aufhören, wenn wir nicht wüßten, ob die Naturgesetze, welche wir heute gefunden haben, auch noch für spätere Zeiten richtig sein werden. Es ist daher unter dieser Clausiusschen Annahme die Energiebilanz eine äußerst schwankende, zu einer unzweideutigen Definition derselben kann man nur unter mehr oder minder willkürlichen Annahmen gelangen und es empfiehlt sich, die Annahme der Veränderlichkeit des Wirkungsgesetzes der Kräfte durch die Voraussetzung zu ersetzen, daß mit den

n materiellen Punkten, welche das betrachtete System bilden, noch andere (ν) materielle Punkte in Wechselwirkung stehen. Die letzteren Punkte sollen während der unvariierten Bewegung vollständig unbeweglich sein; während der Variation der Bewegung aber außerordentlich langsam ihren Ort verändern. Dann fällt auch die oben erwähnte Rechnungsschwierigkeit wieder fort.

Es wird dann nicht die gesamte den n Punkten zugeführte Energie mit der zugeführten Wärme in Parallele gesetzt, sondern die Arbeit, welche die n Punkte infolge ihrer Bewegung unter dem Einflusse der von den ν Punkten auf sie ausgeübten Kräfte gewinnen, entspricht der einem Körper zugeführten äußeren Arbeit und bloß die übrige zugeführte Energie der zugeführten Wärme, so daß das Differential desjenigen Energieanteils, welches der zugeführten Wärme entspricht, kein vollständiges Differential ist, während das Differential der totalen zugeführten Energie es doch ist.

Die Lage der n materiellen Punkte soll durch s Koordinaten (die rasch veränderlichen), die der ν Punkte aber durch g Koordinaten (die langsam veränderlichen Parameter) bestimmt sein.

So erhält man z. B. in folgender Weise ein gutes Bild der umkehrbaren Zustandsänderungen eines Gases, welches durch einen Stempel abgeschlossen ist. Die Molekularbewegung und innere Atombewegung der Gasmoleküle läßt man der raschen Bewegung der betrachteten n materiellen Punkte entsprechen. Die Moleküle des Stempels, deren Wärmebewegung wir uns ohne erhebliche Änderung des Problems hinwegdenken können, läßt man den ν materiellen Punkten entsprechen, welche sich nur bei Variation des Zustandes des Gases (und zwar solange dessen Zustandsänderungen umkehrbar sind, außerordentlich langsam) bewegen.

§ 43. Begriff der zyklischen und der damit verwandten Bewegungen.

Es handelt sich nun noch darum, auch der raschen Bewegung der n materiellen Punkte solche Eigenschaften

zuzuschreiben, daß sie sich möglichst zu einem treuen Abbilde der für die Wärmebewegung charakteristischen Eigenschaften eignet.

Die Aufgabe, eine kurze, systematische Zusammenstellung aller Grundtypen mechanischer Systeme zu geben, welche zu diesem Behufe verwendet wurden, wird dadurch erschwert, daß viele derselben einige Merkmale mit andern derselben gemein haben und die verschiedenen Autoren bald die einen, bald die andern Merkmale als die wesentlichsten ansahen, wodurch auch die Terminologie eine schwankende wurde. In der hier versuchten Zusammenstellung wird es mir daher weder gelungen sein Vollständigkeit noch größtmögliche Übersicht in der Klassifizierung zu erreichen und ich war auch gezwungen in der Terminologie bald von der des einen, bald wieder von der des andern Autors ein wenig abzuweichen.

Wenn wir die Grundanschauungen der mechanischen Theorie der Wärme akzeptieren, so besteht eine der hervorstechendsten Eigenschaften der Wärmeenergie darin, daß in einem warmen Körper zwar fortwährend die lebhafteste Bewegung der kleinsten Teilchen stattfindet, daß wir aber trotzdem in dem äußerlich sichtbaren und wahrnehmbaren Zustande desselben keine Veränderung bemerken, während wir sonst, wenn ein Körper sich bewegt, klar wahrnehmen, wie sich der Zustand desselben mit der Zeit fortwährend ändert.

Dieselbe Eigenschaft finden wir auch auf anderen Gebieten der Physik. Auch an einem ruhenden elektrischen Strome von unveränderlicher Intensität, in dessen Nachbarschaft sich ruhende Magnete oder Eisenmassen befinden, sehen wir außer in der treibenden Batterie nirgends die mindeste zeitliche Veränderung und trotzdem erklärt Maxwell die Eigenschaften desselben durch die Hypothese, daß das Wesen des elektrischen Stromes in einer heftigen Bewegung bestehe, deren Schauplatz teils das Innere des Stromleiters, teis auch der umgebende Äther ist.

Wir müssen uns also nach mechanischen Modellen umsehen, denen ähnliche Eigenschaften zukommen. Ein Beispiel eines solchen Modelles liefert ein starrer, rund um

seine Achse herum absolut symmetrischer Rotationskörper, der keine andere Bewegung macht, als eine rapide Drehung um diese Achse. Ein anderes Beispiel liefert ein wirbelloser Strom einer absolut homogenen, inkompressibeln reibungslosen Flüssigkeit in einem in sich selbst zurücklaufenden Kanale mit absolut starren Wänden. Wir bezeichnen derartige Bewegungen als zyklische.

Spezielle zyklische Systeme wurden schon früher mehrfach in der Mechanik und Wärmetheorie besonders von Rankine verwendet. Maxwell behandelte zuerst allgemeine cyklische Systeme und verwendete sie zur Erklärung der elektromagnetischen und elektrodynamischen Erscheinungen. Ihre Anwendung auf die Wärmetheorie in allgemeinerer Form als es durch Rankine geschah, die Weiterentwicklung der schon von Maxwell aufgestellten Grundgleichungen für dieselben, sowie auch die Grundzüge der jetzt üblichen Terminologie dafür ist Helmholtz zu verdanken.

Zyklische Systeme im strengsten Sinne (wir wollen sie im folgenden echte Zykeln nennen) sind solche, in denen zwar beliebige Bewegungen stattfinden, jedoch so, daß, wenn irgend ein Massenteilchen eine Stelle des Raumes verläßt, immer sofort ein vollkommen gleich beschaffenes an dessen Stelle tritt, welches die gleiche gleichgerichtete Geschwindigkeit hat, die auch das erstere Teilchen an dieser Stelle des Raumes hatte. Eine Koordinate heißt eine echt zyklische, wenn das System eine solche Bewegung ausführt, sobald sich diese Koordinate unter Konstanthaltung der übrigen Koordinaten verändert.

Die Molekularbewegungen, welche nach der mechanischen Wärmetheorie die Wärme darstellen, sind nach den Vorstellungen dieser Theorie keine streng zyklischen. Nur wegen der großen Zahl der bewegten Moleküle erreicht immer, sobald ein Molekül aus einem gewissen Bewegungszustande austritt, bald in der Nachbarschaft ein anderes Molekül einen sehr ähnlichen Bewegungszustand, so daß wir äußerlich keine Veränderung wahrnehmen. Deshalb hat man den Begriff der echt zyklischen Systeme erweitert; das Charakteristikum der echt zyklischen Systeme

besteht darin, daß ihre sämtlichen Eigenschaften nicht von dem Absolutwerte der echt zyklischen Koordinaten, sondern bloß von deren Änderungsgeschwindigkeiten abhängen. Der nach der Zeit nicht differenzierte Wert einer zyklischen Koordinate kann daher weder im Ausdrucke für die lebendige Kraft, noch in den Ausdrücken für die auf das System wirkenden Kräfte noch in den die Bedingungen ausdrückenden Funktionen vorkommen. In Verallgemeinerung des Begriffs der echt zyklischen Koordinaten wollen wir nach dem Vorgange Hertz' jede beliebige Koordinate, deren nach der Zeit nicht differenzierter Wert in allen diesen Ausdrücken nicht vorkommt, als eine zyklische Koordinate schlechtweg bezeichnen.

Wenn in einem Systeme weder innere noch äußere Kräfte tätig sind, wie dies Hertz von allen Systemen annimmt, so sind, falls auch keine Bedingungsgleichungen vorhanden sind, selbst die rechtwinkligen Koordinaten zyklische.

Eine gewisse Verwandtschaft mit den zyklischen Systemen haben solche Systeme, deren Bewegung eine periodische ist, bei denen also nach Verlauf einer gewissen Zeit immer wieder genau dieselben Bewegungszustände in derselben Reihenfolge wiederkehren, und welche wir kurz periodische Systeme nennen wollen. Dieselben können, wenn den periodisch bewegten Massen nur eine untergeordnete Rolle zufällt, fast alle Eigenschaften der zyklischen haben, wenn sie sich z. B. nur dadurch von echt zyklischen unterscheiden, daß sie rotierende Zahnräder, hin- und hergehende Kolben oder sonstige oszillierend sich bewegende Massen enthalten.

Helmholtz geht noch weiter und betrachtet Systeme, welche bloß der Bedingung unterworfen sind, daß nicht nur die Summe der kinetischen und potentiellen Energie, sondern jede dieser Energien für sich immer konstant bleibt. Er nennt diese Systeme isokinetische. Einen noch allgemeineren Begriff bildet Clausius, indem er eine Bewegung, wobei niemals der Wert irgend einer der rechtwinkligen Koordinaten oder irgend einer der Geschwindigkeitskomponenten

eines materiellen Punktes nach den Koordinatenrichtungen über alle Grenzen wächst, wenn die Bewegung beliebig lang fortgesetzt wird, als eine stationäre bezeichnet, wofür ich aber lieber das Wort „finit“ gebrauchen will. Wenn außerdem noch die Bewegung zwar nicht in dem Sinne periodisch ist, daß nach Verlauf einer endlichen Zeit alle materiellen Punkte gleichzeitig exakt zu ihrer alten Lage, Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung zurückkehren und dann wieder die gleiche Bewegung von vorne beginnen, aber doch eine solche Regelmäßigkeit in der Bewegung herrscht, daß das Zeitmittel der lebendigen Kraft, einer Geschwindigkeitskomponente, oder des Wertes irgend einer rechtwinkligen Koordinate irgend eines materiellen Punktes oder der gesamten Kraftfunktion V etc. je einer festbestimmten Grenze zueilt, wenn man die Zeit, während welcher dieses Mittel genommen wird, ohne die Bewegung zu variieren, in beliebiger Weise über alle Grenzen wachsen läßt, so wollen wir eine solche Bewegung eine mesische nennen.

§ 44. Spezielle Beispiele.

Wir wollen, ehe wir an die Ausführung der Rechnung gehen, das Gesagte durch einige Beispiele erläutern.

Das *erste Beispiel* ist das schon mehrfach erwähnte, aus der kinetischen Theorie der Gase oder tropfbaren Flüssigkeiten. Das System wird gebildet durch n materielle Punkte, die sich ganz wie nach den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie die Moleküle eines dem van der Waalsschen Gesetze folgenden Gases oder einer tropfbaren Flüssigkeit in einem zylindrischen Gefäße mit starren Wänden bewegen, das oben durch einen vollkommen dichten, reibungslosen Stempel abgeschlossen ist. Die Erhöhung der lebendigen Kraft etwa durch von außen irgend woher kommende Molekularstöße korrespondiert der zur Temperaturerhöhung verwendeten zugeführten Wärme, wogegen die gegen die zwischen den n materiellen Punkten tätigen Innenkräfte geleistete Arbeit der inneren Arbeit korrespondiert. Die s Variabeln sind die zur Bestimmung der Lage der n materiellen Punkte notwendigen Größen.

Der Stempel bewegt sich immer nur langsam, so daß sein Druck immer nahe gleich dem Gegendrucke der materiellen Punkte ist, zwischen denen immer auch nahezu Gleichgewicht der lebendigen Kraft bestehen soll. Die g Variabeln bestimmen die Lage des Stempels. Die Arbeit der Kraft, welche der Stempel auf die materiellen Punkte ausübt, ist die äußere Arbeit. Sie ist gleich der Arbeit, welche die von außen auf den Stempel wirkenden Kräfte leisten. Dieses System ist bei genügend großer Zahl der Moleküle ein unechtes Zykel, isokinetisch, finit und mesisch, doch nicht periodisch.

Zweites Beispiel: Zentralbewegungsmodell. Wir betrachten ähnlich, wie wir es schon am Schlusse des Paragraphen 41 taten, die Zentralbewegung eines einzigen materiellen Punktes. Aber es sei Vorsorge getroffen, daß sich während der Zentralbewegung die beiden Konstanten λ und a langsam verändern können, welche das Gesetz bestimmen, nach dem die Zentralkraft wirkt.

An Stelle der Clausiusschen Annahme einer direkten Veränderlichkeit der Naturgesetze wollen wir uns die Veränderlichkeit von λ und a durch gewöhnliche mechanische Hilfsmittel bewirkt denken. Handelt es sich zunächst um die Zentralbewegung eines Planeten um die Sonne, so können wir uns etwa vorstellen, daß von außen stets Massen (Meteorsteine) in die Sonne stürzen, so daß deren Masse und daher auch deren Anziehungskraft gegen den Planeten mit der Zeit wächst. Wollte man einen geschlossenen Prozeß analog dem Carnotschen Kreisprozesse konstruieren, so müßten z. B. zuerst Massen in die Sonne stürzen. Hierbei würde äußere Arbeit gewonnen. Dann müßte die lebendige Kraft der Zentralbewegung, welcher die Wärmeenergie des warmen Körpers entspricht, vermindert werden. Dann müßten dieselben Massen wieder von der Sonne fort bis in unendliche Entfernung gebracht werden. Hierbei wäre weniger Arbeit zu leisten als früher beim Hineinstürzen gewonnen wurde, da ja der Planet jetzt entfernter ist und weniger Anziehung ausübt. Endlich müßte wieder die Energie der Umlaufsbewegung des Planeten durch eine ent-

sprechende Energiezufuhr auf den alten Stand gebracht werden und wir nehmen an, daß Gestalt, Lage und Bewegungsgeschwindigkeiten zum Schlusse wieder dieselben wie zu Anfang des Prozesses sind. Da hier die Bahn stets eine geschlossene ist, so wäre bereits vollständige Analogie mit dem zweiten Hauptsatze vorhanden. Wenn $\bar{T}$ die mittlere lebendige Kraft des Planeten in seiner Umlaufsbewegung und δQ die Energie ist, die man ihm behufs Erhöhung der lebendigen Kraft seiner Umlaufsbewegung während eines unendlich kleinen Teiles des Prozesses zuführen muß, so ist nicht δQ, wohl aber $\delta Q/\bar{T}$ ein vollständiges Differential, sobald die Masse der Sonne stets so langsam zu- und abnimmt, daß die Zu- oder Abnahme während eines Planetenumlaufs als klein und gleichförmig mit der Zeit erfolgend betrachtet werden kann. Man kann dies durch Ausführung der Rechnung im Detail verifizieren, doch ist das Hineinstürzen von Massen in die Sonne immerhin ein für die Rechnung noch etwas unbequemer Vorgang.

Eine physikalisch zwar etwas abstrakte, aber mechanisch noch weit klarere Vorrichtung, welche in größter Allgemeinheit alle denkbaren Fälle illustriert, ist die folgende: eine sehr kleine vollkommen glatte Kugel von der Masse m bewege sich auf einer glatten horizontalen Ebene. Daran sei ein biegsamer massenloser Faden von unveränderlicher Länge befestigt, der durch ein Loch der Ebene geht, dann vertikal herabhängt und am Ende einen massenlosen, in einer vertikalen Röhre reibungslos beweglichen Magnetpol A trägt. Vertikal unter diesem befinde sich ein außerordentlich kurzer, um eine horizontale Achse drehbarer Magnet, dessen sehr nahe Pole B und C heißen sollen.

Man kann nun dem Kügelchen m während der Zentralbewegung durch kleine Stöße langsam lebendige Kraft zuführen (dies entspricht der Wärmezufuhr) und auch den Magneten langsam drehen (entsprechend der Bewegung des Stempels). So kann man den Zustand langsam variieren und auch wieder auf anderem Wege zum alten Bewegungszustande zurückkehren, indem man z. B. zuerst bei weniger lebhafter Bewegung des Kügelchens m den kurzen Magnet

dreht, dann lebendige Kraft zuführt, dann bei heftiger Bewegung den kurzen Magnet langsam in die alte Lage zurückdreht und dann wieder gerade so viel lebendige Kraft entzieht, bis die lebendige Kraft den alten Wert erlangt hat und dabei auch die Bewegungsrichtung gerade so ändert, daß schließlich wieder dieselbe Bahn bei gleicher Lage des Magnets eintritt. Die Variabeln, welche die Position der Masse m in der Ebene bestimmen, sind die, welche wir früher die s Variabeln nannten, die g Variabeln reduzieren sich auf eine einzige, nämlich den Drehungswinkel des Magnets.

Man kann in zweifacher Weise bewirken, daß die von außen auf den Magneten wirksame Kraft nicht während der unvariierten Bewegung periodisch veränderlich, sondern nur, falls die Bewegung variiert wird, langsam mit der Zeit veränderlich zu sein braucht: erstens wenn man annimmt, daß die Umlaufszeit der Masse m sehr kurz und das Trägheitsmoment des Magneten bezüglich seiner Drehungsachse enorm groß ist, so daß er während der Wanderung der Masse m vom Perihel bis zum Aphel nur eine verschwindend kleine Drehung macht, zweitens wenn man auf der horizontalen Ebene statt einer einzigen unendlich viele vollkommen gleich beschaffene Massen m fingiert, welche alle möglichen Phasen derselben Zentralbewegung gleichzeitig haben, und sich, ohne sich gegenseitig zu stören, unabhängig voneinander bewegen und alle vom Magneten in gleicher Weise und durch Vermittlung der gleichen beschriebenen Vorrichtungen affiziert werden. Dadurch kann man das System in ein isokinetisches im Sinne Helmholtz' und zugleich auch in ein echt zyklisches verwandeln, wenn nämlich alle diese Massen die ganze Fläche, welche sie bei der Zentralbewegung im Verlauf der Zeit bestreichen, schon zu Anfang der Zeit in passender Weise kontinuierlich bedecken. Doch ist dann zur Bestimmung der Lage irgend eines der in Zentralbewegung begriffenen Massenteilchen nebst den langsam veränderlichen Koordinaten, welche die Position des oder der Magnete bestimmen, keineswegs die Kenntnis einer einzigen zyklischen Variabeln ausreichend, sondern es sind dazu noch zwei Variabeln (zwei rechtwinklige Koordinaten in der Ebene,

oder die Bahnlänge und die Bewegungsrichtung in gegebener Entfernung vom Kraftzentrum) erforderlich.

Will man bewirken, daß die Zentralbewegung jeder Masse nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze erfolgt, so darf man keinen gewöhnlichen Magneten anwenden, sondern der Pol A muß von dem näheren Pole B mit einer der ersten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft angezogen, von dem entfernten Pole C aber mit einer gleichen Kraft abgestoßen werden. Dann wird wieder nicht δQ, wohl aber $\delta Q/\overline{T}$ ein vollständiges Differential sein. Hat man gleichzeitig zwei Magnete, von denen der eine von der eben geschilderten Beschaffenheit ist, der andere aber nach demselben Gesetze wirkt, wie ein gewöhnlicher Magnet, und von denen jeder unabhängig von dem andern drehbar ist, so erhält man eine Zentralbewegung, bei welcher die Zentralkraft das am Ende des Paragraphen 41 erwähnte Gesetz befolgt und die beiden Konstanten λ und a unabhängig voneinander langsam verändert werden können.

Es ist dann auch $\delta Q/\overline{T}$ kein vollständiges Differential und man sieht, daß nicht für alle isokinetischen und auch nicht alle rein zyklischen Systeme $\delta Q/\overline{T}$ ein vollständiges Differential ist. Bezüglich der ausführlichen Berechnung aller Beispiele verweise ich auf Wien. Sitz. Ber. II, 92, S. 853 Okt. 1885, Exn. Rep. d. Physik 22, S. 135.

Drittes Beispiel. Eine Masse rotiert rasch um eine Achse und ihre Entfernung von der Achse ist der langsam veränderliche Parameter. Es ist dies ein lehrreiches Beispiel für ein zyklisches System im weiteren Sinne nach der Bezeichnungsweise Hertz', welches kein echtes Zykel ist. Es soll Kürze halber im folgenden immer als das Zentrifugalmodell bezeichnet werden. Über die schöne Analogie, welche diese einfache mechanische Vorrichtung mit dem Carnotschen Satze und dem Verhalten vollkommener Gase zeigt, vergl. meine Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes 1. Band, 2. Vorlesung. Im selben Buche, 4. und 6. Vorlesung, ist auch eine Vorrichtung beschrieben, an welcher zwei voneinander unabhängige zyklische Bewegungen möglich sind.

Viertes Beispiel: Das Flüssigkeitsstrommodell. Eine reibungslose, inkompressible Flüssigkeit strömt wirbellos in einem in sich zurücklaufenden Kanale. Die Gestalt des Kanales und auch dessen Querschnitt an verschiedenen Stellen kann langsam veränderlich sein, ohne daß jedoch der gesamte Hohlraum des Kanales variiert. Dieses System ist ein echtes Zykel.

§ 45. Es wird weder Periodizität noch zyklischer Charakter der Bewegung vorausgesetzt.

Wir wollen nun zunächst die Rechnung möglichst allgemein durchführen. Wir denken uns n materielle Punkte (das Kügelchen m des Zentralbewegungsmodells), deren Lage durch s generalisierte Koordinaten bestimmt ist. Zwischen den letzteren können möglicherweise noch σ mit der Zeit vollkommen unveränderliche Bedingungen bestehen, die also auch für alle variierten Bewegungen dieselben bleiben müssen.

Später werden wir annehmen, daß die Bewegung dieser n materiellen Punkte eine zyklische oder eine damit verwandte ist. Vorläufig aber wollen wir sie noch ganz allgemein lassen.

Diese n Punkte bilden das betrachtete mechanische System. Außerdem sollen noch dreierlei materielle Punkte wirksam sein.

1. Mit den n materiellen Punkten sollen zunächst andere (n') in Wechselwirkung stehen, welche letztere ihre Lage im Raume immer unverändert beibehalten und daher ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auch zu den n Punkten hinzugerechnet werden können. Es könnte sich z. B. beim Zentralbewegungsmodelle an der Stelle, wo der Faden durch das Loch geht, eine fixe unveränderliche Masse befinden, welche eine beliebige Zentralkraft auf das Kügelchen m ausübt. Solche Massen könnten auch anderswo in der Bahnebene des Kügelchen fix verteilt sein.

2. Außerdem sollen mit den n materiellen Punkten andere ν in Wechselwirkung stehen, deren durch g generalisierte Koordinaten (die langsam veränderlichen Variabeln

oder Parameter) bestimmte Lage manches Mal ganz unverändert, manches Mal wieder außerordentlich langsam veränderlich ist. Die ν Punkte werden bezüglich des betrachteten Systems als äußere angesehen. Sie entsprechen dem Magnete des Zentralbewegungsmodells.

3. Es sind noch andere (N) materielle Punkte vorhanden, welche bloß auf die ν Punkte, also gar nicht auf die n Punkte wirken sollen und daher ganz außerhalb des betrachteten Systems stehen. Die Kräfte, welche sie auf die ersteren Punkte ausüben, müssen den Kräften, welche die n Punkte auf die ν Punkte ausüben, vollständig das Gleichgewicht halten, solange die letzteren vollständig ruhen, der Zustand muß von dem des Gleichgewichtes sehr wenig verschieden sein, wenn sich die ν Punkte langsam bewegen. Es sind dies am Zentralbewegungsmodelle die Kräfte, welche am Magnete den Kräften, die der Pol A auf ihn ausübt, das Gleichgewicht halten müssen.

T sei die lebendige Kraft der n Punkte, F die Kraftfunktion aller von ihrer Wechselwirkung untereinander und der Wirkung der n' Punkte auf sie herstammenden Kräfte. Die Arbeit aller dieser Kräfte nennen wir die innere Arbeit, die der Kräfte, welche von den ν Punkten auf die n Punkte ausgeübt werden (der äußeren Kräften), nennen wir die äußere Arbeit. Die äußere Kraft nach einer Koordinate p_h der n Punkte, d. h. diejenige, welche vermöge der Wechselwirkung der n und der ν Punkte darauf wirkt, soll mit $\mathfrak{P}_h$ bezeichnet werden. Die zwischen den n und den ν Punkten wirkenden Kräfte sollen ebenfalls eine Kraftfunktion haben, welche mit Ω bezeichnet werden soll; dagegen soll die Gesamtkraftfunktion $F+\Omega$ aller zwischen den n, n' und ν Punkten wirkenden Kräfte V heißen. Sobald man es vorzieht von den ν Punkten gar nicht zu sprechen, ist die äußere Einwirkung auf die n Punkte einfach durch die Kräfte $\mathfrak{P}_h$ bestimmt, welche die Kraftfunktion Ω haben, die aber dann mit der Zeit langsam veränderliche Parameter enthält.

Es sollen sich zuerst die n materiellen Punkte bei unveränderlicher Lage der ν Punkte während der Zeit $t_1 - t_0$

bewegen, was wir als deren unvariierte Bewegung bezeichnen wollen. Die analog der Formel 236) berechneten Mittelwerte von T, V etc. während dieser Zeit sollen mit $\overline{T}$, $\overline{V}$ etc. bezeichnet werden.

Wir vergleichen mit der unvariierten Bewegung zunächst eine andere Bewegung, welche in unendlich wenig verschiedener Weise geschieht, zur selben Zeit t_0, wie die unvariierte Bewegung beginnt, und zu einer von t_1 unendlich wenig verschiedenen Zeit $t_1 + \delta t_1$ endet.

Irgend einem Zustande A der unvariierten Bewegung, welcher zu irgend einer Zeit t stattfindet, korrespondiert immer derjenige Zustand B der variierten Bewegung, welcher zur selben Zeit t stattfindet. Im Zustande B soll die lebendige Kraft T der n Punkte um δT größer sein als im Zustande A.

Die Werte der s Koordinaten sämtlicher n Punkte werden ebenfalls im Zustande B etwas andere sein als im Zustande A. Die durch diesen Umstand allein bewirkten Zuwächse von F, Ω und V bezeichnen wir mit δF, $\delta \Omega$ und δV. Ist ferner

240) $$P_h = -\frac{\partial F}{\partial p_h} + \mathfrak{P}_h$$

die gesamte, nach einer Koordinate p_h des Systems der n Punkte wirkende generalisierte Kraft, so ist also:

241) $$\delta F + \delta \Omega = \delta V = -\sum_1^s {}^h P_h \delta p_h .$$

Es ist also δV genau die auch im Vorhergehenden immer so bezeichnete Größe und stellt den Gesamtbetrag der dem Systeme der n Punkte zugeführten Energie dar, welcher auf Arbeitsleistung gegen alle auf die n Punkte wirkenden Kräfte verwendet wird. Da ferner δT den Zuwachs der lebendigen Kraft dieser Punkte darstellt, so müßte den n Punkten irgendwie die Gesamtenergie

242) $$\delta E = \delta T + \delta V = \delta J_n + \delta \Omega = \delta J_{n,\nu} - \delta_\nu \Omega$$

zugeführt werden, um den Zustand A des Systems in den Zustand B überzuführen. Die Kräfte, welche diese Energie

Zufuhr bewirken und auf welche wir jetzt allein den Namen Zusatzkräfte beschränken wollen, sind ganz neue Kräfte, welche von allen während der unvariierten Bewegung wirkenden völlig verschieden sind. Diese Energie δE stellen wir mit der einem Körper zugeführten Wärme δQ in Parallele, $J_n = T + F$ dagegen, oder auch, wenn wir lieber wollen, $J_{\nu, n} = T + V$, setzen wir mit der gesamten inneren Energie eines warmen Körpers, der lebendigen Kraft der Molekularbewegung und der auf innere Arbeitsleistung verwendeten Wärme in Parallele.

§ 46. Das erweiterte System.

Die Zuwächse der Kraftfunktionen Ω und V, welche daher rühren, daß im Zustande B auch die ν materiellen Punkte etwas andere Lagen haben als im Zustande A, sollen mit $\delta_\nu \Omega$ und $\delta_\nu V$ bezeichnet werden, so daß der totale Zuwachs, den die Größen V und Ω beim Übergang vom Zustande A in den Zustand B erfahren,

243) $$\delta_{\text{tot.}} V = \delta V + \delta_\nu V, \qquad \delta_{\text{tot.}} \Omega = \delta \Omega + \delta_\nu \Omega$$

ist, und der Ausdruck

244) $$\delta J_{n,\nu} = \delta T + \delta V + \delta_\nu V$$

den totalen Zuwachs der Gesamtenergie $J_{n,\nu} = T + V$ des erweiterten Systems der $n + \nu$ Punkte darstellt.

Man kann daher sagen: Wenn die Überführung aus dem unvariierten in den variierten Zustand gerade zur Zeit t stattfände, so daß gerade der Zustand A in den Zustand B übergeführt würde, so würde dem System der n Punkte von den Zusatzkräften die Energie δE, durch die Einwirkung der ν Punkte die Energie $-\delta \Omega$ zugeführt, so daß seine innere Energie um $\delta J_n = \delta T + \delta F$ wächst oder es wird von der ganzen, durch Zusatzkräfte zugeführten Energie δE der Teil $\delta T + \delta F$ auf Vermehrung der Eigenenergie, der Anteil $\delta \Omega$ aber auf äußere Arbeitsleistung verwendet.

Ω ist die Kraftfunktion der Wechselwirkung der n und der ν Punkte. Da es sich hier bloß um ein mechanisches

Bild gewisser Naturerscheinungen handelt, so ist es vollkommen willkürlich, welche Punkte man dem betrachteten Systeme zuzählt und welche man als äußere ansieht. Es kann in dem einen Falle die eine, in dem anderen wieder eine andere Analogie mit den Eigenschaften warmer Körper besonders hervortreten. Man kann daher auch die ν Punkte noch zum betrachteten Systeme rechnen, so daß dann

$$V = F + \Omega$$

die potentielle, und

$$J_{n,\nu} = T + V = T + F + \Omega$$

die totale Energie des gesamten betrachteten Systems ist. Dann wäre wieder $\delta T + \delta V$ mit der zugeführten Wärme aber jetzt $\delta_\nu V = \delta_\nu \Omega$ mit der in Form von äußerer Arbeit dem Systeme zugeführten Energie in Parallele zu setzen, $-\delta_\nu \Omega$ der auf äußere Arbeitsleistung aufgewendeten Wärme,

Wenn die Kräfte, welche die Kraftfunktion Ω haben. keine gewöhnlichen Fernkräfte sind, sondern den Wert Null haben, bei einer gewissen Entfernung der Punkte, zwischen denen sie wirken, bei etwas größerer oder kleinerer Entfernung aber sofort ins Unendliche anwachsen, so ist ohnedies Ω konstant, daher

$$\delta \Omega + \delta_\nu \Omega = 0$$

und es kommen beide Auffassungen auf dasselbe hinaus. Bei dem Zentrifugalmodell ist diese Bedingung ohne weiteres erfüllt; beim Bilde eines von einem Stempel abgeschlossenen Gases kann man sich dieselbe jedenfalls ohne wesentliche Modifikation des Problems erfüllt denken, da ja auch in diesem Falle nur ein verschwindender Energiebetrag auf Veränderung der Kraftfunktion derjenigen Kräfte verwendet wird, die zwischen den Gasmolekülen und denjenigen des Stempels tätig sind, also die Variationen von Ω nicht in Betracht kommen.

Mit $\mathfrak{P}_k$ haben wir die Kräfte bezeichnet, welche die ν Punkte auf die n Punkte ausüben (der Stempel auf das Gas). Gleiche und gleich bezeichnete Kräfte üben für den Fall der Ruhe der ν Punkte die N Punkte auf die ν Punkte

aus (die Hand oder belastende Gewichte von der Außenseite auf einen leicht beweglichen, das Gas abschließenden Stempel). Gleiche entgegengesetzt bezeichnete Kräfte üben die n auf die ν oder die ν auf die N Punkte aus. Für eine außerordentlich langsame Bewegung der ν Punkte, wobei der ganze Prozeß nahezu umkehrbar ausfällt (umkehrbare Ausdehnung des Gases), gilt das eben Gesagte wenigstens mit sehr großer Annäherung.

Es ist daher $-\delta_\nu V$ auch die Arbeit, welche vermöge der Bewegung der ν Punkte gegen die Kräfte geleistet wird, die von dem N auf die ν Punkte ausgeübt werden und bewirken, daß letztere bei der unvariierten Bewegung in Ruhe bleiben, bei der variierten aber sich nur überaus langsam bewegen. Letztere Kräfte sind nämlich den Kräften $\mathfrak{P}_k$ vollständig gleich.

§ 47. Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung.

Es hat nun δE, δT und δV dieselbe Bedeutung wie in Formel 223 § 36. V enthält allerdings außer den Koordinaten der n auch noch die der ν Punkte und die die letzteren enthaltenden Ausdrücke spielen im Ausdrucke für die Kraftfunktion der n Punkte die Rolle langsam veränderlicher Parameter, sobald die ν Punkte sich langsam bewegen; allein dies geschieht niemals, solange die Bewegung unvariiert bleibt. Während der unvariierten Bewegung ist daher V eine die Zeit nicht explizit enthaltende Funktion der Koordinaten der n materiellen Punkte und das allein ist zu Anfang des § 36 vorausgesetzt. Die durch unendlich kleine Bewegung der ν Punkte eintretenden Wirkungen werden dort zu den Zusatzkräften gerechnet. Es gilt daher hier wieder die Gleichung 223), nämlich:

$$2\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\delta E\,dt + \sum_1^s {}_h(q_h^1\,\delta p_h^1 - q_h^0\,\delta p_h^0).$$

Wir haben bisher die unvariierte Bewegung während der Zeit $t_1 - t_0$ und daneben ganz davon unabhängig die variierte während der Zeit $t_1 + \delta t_1 - t_0$ betrachtet.

Wir wollen uns jetzt mit der Betrachtung des Überganges von der einen zur anderen beschäftigen. Da ist es zunächst vollkommen gleichgültig, zu welchem oder zu welchen im Verlauf der ganzen Zeit $t_1 - t_0$ liegenden Zeitmomenten die Zusatzkräfte den n Punkten Energie zugeführt haben. Dagegen ist es nicht gleichgültig, ob die gesamte Verrückung der ν Punkte in einem einzigen zwischen t_0 und t_1 liegenden Momente geschah oder sich aus mehreren Verrückungen zusammensetzte und wann im Verlauf der Zeit $t_1 - t_0$ diese eine resp. jede der Partialverrückungen stattfand. Der Wert, den der Zuwachs $\delta E - \delta \Omega = \delta(T + F) = \delta J_n$ der Gesamtenergie der n Punkte und ebenso der Wert, den der Zuwachs $\delta J_{n,\nu} = \delta T + \delta F + \delta_{\text{tot.}} \Omega = \delta T + \delta_{\text{tot.}} V$ der gesamten lebendigen Kraft und Kraftfunktion der $n + \nu$ Punkte am Ende der Bewegung, also zur Zeit $t_1 + \delta t_1$ hat, ist, wenn die Gesamtverschiebung der ν Punkte dieselbe ist, natürlich davon unabhängig, wann diese Verschiebung stattfand. Dagegen ist die gesamte äußere Arbeit, sei es, daß wir dieselbe als $\delta \Omega$ oder als $-\delta_\nu \Omega$ definieren, davon abhängig, wann die Verschiebung der ν Punkte stattfand, ebenso die Energie $\delta T + \delta V$, welche die Zusatzkräfte den n Punkten während der Zeit $t_1 - t_0$ im ganzen zuführen müssen. Denn letztere ist gleich $\delta T + \delta_{\text{tot.}} V - \delta_\nu \Omega = \delta T + \delta F + \delta \Omega$.

Es sollen nun speziell die ν Punkte während der ganzen Zeit $t_1 - t_0$ der Bewegung sich gleichförmig aus der Lage, die sie für die unvariierte Bewegung haben, in die Lage hinüberbewegen, welche sie für die variierte Bewegung haben, so daß sie erstere Lage noch zur Zeit t_0 haben, letztere aber gerade zur Zeit t_1 erreichen. Während also die Bewegung der n Punkte mit großer oder kleiner Geschwindigkeit geschehen kann, sollen sich die ν Punkte unendlich langsam, aber vollkommen gleichförmig bewegen, so daß sie während der endlichen Zeit $t_1 - t_0$ nur sehr kleine Wege zurücklegen, weshalb wir die ihren Einfluß ausdrückenden Größen die langsam veränderlichen Parameter genannt haben.

Bezeichnen wir dann mit $\delta_\nu \Omega$ die Arbeit, welche von den ν Punkten gegen die von der Kraftfunktion Ω her-

stammenden Kräfte geleistet werden müßte, wenn die ganze Verschiebung der ν Punkte im Zeitmomente t vor sich ginge, so ist die bei der jetzt betrachteten allmählichen Verschiebung der ν Punkte während der Zeit dt geleisteten Arbeit gleich

$$\frac{\delta_\nu \Omega\, dt}{(t_1 - t_0)},$$

wobei $\delta_\nu \Omega$ für die verschiedenen Phasen der Bewegung verschieden, daher eine Funktion von t ist. Die ganze von den ν Punkten gegen die der Kraftfunktion Ω entstammenden Kräfte während der Zeit $t_1 - t_0$ geleistete Arbeit ist also im Falle der allmählichen Verschiebung der ν Punkte

245) $$\delta_\nu \Omega_1 = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \delta_\nu \Omega\, dt.$$

Wenn dabei auch passende Zusatzkräfte wirken, welche mit der Verschiebung der ν Punkte zusammen die unvariierte Bewegung in die variierte überführen, so daß sich die materiellen Punkte zur Zeit t_0 noch in der Weise bewegten, welche der unvariierten Bewegung zu dieser Zeit entspricht, wogegen sie sich zur Zeit $t_1 + \delta t_1$ genau in der Weise bewegen, welche ihnen in der variierten Bewegung zur Zeit $t_1 + \delta t_1$ (der der Endzeit t_1 der unvariierten Bewegung korrespondierenden Zeit) zukommt, so müssen die Zusatzkräfte den n materiellen Punkten die Energie

246) $$\delta Q = \delta T + \delta_{\text{tot.}} V - \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \delta_\nu \Omega\, dt = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta V)\, dt$$

zuführen. Wann während der Zeit $t_1 - t_0$ und in welcher Weise die Zusatzkräfte wirken, ist hierbei gleichgültig, sobald nur der Effekt der ist, daß schließlich genau die variierte Bewegung erzeugt wurde. Denn wenn der ganze Energiezuwachs der n Punkte und die Gesamtverschiebung der ν Punkte, also dadurch auch die nach außen abgegebene Energie dieselben sind, so ist dadurch die von den Zusatzkräften zugeführte Energie bestimmt.[1])

[1]) Falls das System ein echt zyklisches ist, d. h. falls in der unvariierten Bewegung an die Stelle jeder Masse, die ihren Platz

Nun ist aber $\delta T + \delta V$ dieselbe Größe, die in Formel 223 § 36 mit δE bezeichnet wurde und man erhält daher aus Gleichung 246

$$247)\qquad (t_1 - t_0)\,\delta Q = 2\delta\int_{t_1}^{t_0} T\,dt - \sum_1^s{}_h (q_h^1\,\delta p_h^1 - q_h^0\,\delta p_h^0).$$

§ 48. Betrachtung periodischer Bewegungen.

Falls sowohl die unvariierte als auch die variierte Bewegung periodisch sind, kann man sich die drei im vorigen Paragraphen behandelten Bewegungsarten, die unvariierte, die variierte und den allmählichen Übergang von der einen zur andern leicht zeitlich nacheinander realisiert denken. Ist i die Periode der unvariierten, $i + \delta i$ die der variierten Bewegung, so kann man setzen $t_1 = t_0 + i$, $\delta t_1 = \delta i$. Man kann sich dann zunächst mehrere Male während der Zeit i die unvariierte Bewegung vor sich gehend, dann während der Zeit i (auch $2i$, $3i$) die ν Punkte langsam verschoben und auch die Zusatzkräfte wirkend und endlich mehrere Male während der Zeit $i + \delta i$ die variierte Bewegung ablaufend denken. Man denkt sich dann alle diese Vorgänge nacheinander im Verlaufe der Zeit sich abspielend und kann, wenn man will, die Unterscheidung zwischen zeitlichen Änderungen und Variationen ganz fallen lassen.

---

verläßt, sogleich eine andere gleich beschaffene, mit einer gleichen gleichgerichteten Geschwindigkeit begabte Masse tritt, so daß die ν Punkte auf die letztere genau so wie auf die erstere wirken und falls dasselbe auch für die variierte Bewegung stattfindet, so hat $\delta_\nu \Omega$ für alle t den gleichen Wert und die obige Formel gilt auch, wenn die ν Punkte sich nicht gleichförmig aus der unvariierten in die variierte Lage bewegen, die äußere Arbeit ist dann ganz davon unabhängig, wann die Verschiebung der ν Punkte erfolgt. Doch wird noch immer vorausgesetzt, daß die Gesamtbewegung der ν Punkte während der Zeit $t_1 - t_0$ sehr klein ist. Selbst wenn sie ruckweise erfolgt, so darf immer nach endlicher Zeit wieder ein nur unendlich kleiner Ruck geschehen. Unter dieser Bedingung kann man dann die Größen, welche den Einfluß der ν Punkte ausdrücken, noch immer als die langsam veränderlichen Parameter betrachten.

In diesem Falle, daß sowohl die unvariierte Bewegung als auch die variierte periodisch sind, werden auch, wie wir gesehen haben, die Variationen an beiden Grenzen gleich und es ist:

$$\delta Q = \frac{2}{t_1 - t_0}\,\delta\left(\int_{t_0}^{t_1} T\,d\,t\right) = \frac{2}{i}\,\delta(i\,\overline{T}),$$

daher

248) $$\frac{\delta Q}{\overline{T}} = 2\frac{\delta(i\,\overline{T})}{i\,\overline{T}} = \delta\,l(i\,\overline{T})^2,$$

wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Nun herrscht eine nahezu vollständige Analogie mit dem zweiten Hauptsatze.

Man gehe zu immer anderen und anderen variierten Bahnen über, wobei auch die ν Punkte immer andere und andere Lagen annehmen, sich aber unendlich langsam gegenüber den n Punkten bewegen oder bei zyklischer Bewegung der n Punkte vielleicht auch immer nach einer endlichen Zeit einen unendlich kleinen Ruck machen sollen. In dieser Weise variiere man die Bewegung fortwährend, bis man endliche Änderungen aller Größen erhält, und durchlaufe schließlich einen vollständigen Kreisprozeß, d. h. man kehre endlich wieder zur selben Bewegung der n Punkte, verbunden mit gleicher Lage der ν Punkte, zurück, ohne daß man jedoch genau dieselben Bewegungen der n und Lagen der ν Punkte einfach in umgekehrter Reihenfolge wiederkehren ließ.

Dann wird die Summe aller hierbei durch die Zusatzkräfte den n Punkten zugeführten Energie, welche wir einfach mit $\int \delta Q$ bezeichnen wollen, für alle diese Variationen der Zustände im allgemeinen nicht verschwinden, obwohl man zum Schluß wieder zum Anfangszustande zurückgekehrt ist. Dagegen wird

$$\int \frac{\delta Q}{\overline{T}}$$

immer gleich Null sein. Denn $\delta Q/\overline{T}$ ist nach 248) der Zuwachs von $l(i\,\overline{T})^2$, $\int \frac{\delta Q}{\overline{T}}$ ist also die Differenz der Werte

von $l(i\bar{T})^2$ im Anfangs- und Endzustande. Da im betrachteten Falle aber der Anfangs- und Endzustand identisch sind, so muß diese Differenz Null sein.

Wenn man z. B., was wir den Prozeß A nennen wollen, zuerst die ν Punkte verschiebt, dann die Bewegung der n Punkte beschleunigt, dann die ν Punkte wieder in ihre alte Lage bringt und schließlich den n Punkten wieder so viel Energie entzieht und auch ihre Geschwindigkeitsrichtungen gerade so ändert, daß ihre Bewegung genau wieder die alte wird, so wird $\int \delta Q/\bar{T}$ immer verschwinden. Dagegen wird $\int \delta Q$ im allgemeinen nicht Null sein. Letzterer Ausdruck wird natürlich von gleichem Absolutwerte, aber entgegengesetzt bezeichnet sein, wenn man irgend eine Reihe von Bewegungszuständen der n und Lage der ν Punkte gerade in der entgegengesetzten Weise durchläuft. (Prozeß B.)

Dem Prozesse A entspricht der folgende Vorgang: man läßt ein Gas sich zuerst ausdehnen, dann erwärmt man es, drückt es dann bei der höheren Temperatur auf das alte Volumen zusammen und kühlt es schließlich wieder ab, bis es den alten Zustand angenommen hat, alles in umkehrbarer Weise. Die direkte Umkehr eines solchen Vorganges entspricht dann dem Prozesse B.

Die von uns betrachteten Systeme unterscheiden sich insofern von warmen Körpern, als ihr Zustand durch ihre Energie und die Lage der ν Punkte (die äußere Umgebung) noch keineswegs bestimmt ist. So kann sich z. B. der materielle Punkt m des Beispiels 2 des § 44 bei gleicher Energie und gleicher äußerer Umgebung im Kreise oder in einer ellipsenartigen Bahn etc. bewegen.

Da $\int \frac{dQ}{\bar{T}}$ (die Entropie) $= 2l(i\bar{T})$ ist und jede Funktion derselben mit dem integrierenden Faktor multipliziert wieder integrierender Faktor sein muß, so ist auch i integrierender Faktor von dQ. Da i die Zeit ist, innerhalb welcher ein Teilchen einen ganzen Umlauf macht, so ist $1/i$ die (ganz oder echt oder unecht gebrochene) Zahl der zyklischen Umläufe in der Zeiteinheit.

Unter einer periodischen Bewegung verstanden wir in diesem Paragraphen selbstverständlich eine solche, bei welcher nach Ablauf der Periode dieselben Werte der rechtwinkligen Koordinaten aller materiellen Punkte wiederkehren. Während, wie wir sahen, periodische Bewegungen die vollkommenste Analogie mit dem zweiten Hauptsatze zeigen, so gibt uns die am Schlusse des § 41 und in § 44 als Beispiel 2 behandelte Zentralbewegung in einer ungeschlossenen Bahn ein Beispiel einer nicht periodischen Bewegung von folgenden Eigenschaften: sie ist sonst den in diesem Paragraphen behandelten sehr ähnlich und kann sogar durch Betrachtung unendlich vieler in der gleichen Ebene bewegter Massenpunkte in eine echt zyklische (allerdings nicht monozyklische) verwandelt werden; doch verschwindet für dieselbe schon bei fixer Lage der v Punkte (der Magnete, von denen die Werte von λ und a abhängen), daher um so mehr bei variierender Lage der v Punkte, $\int \delta Q / \overline{T}$ über einen vollständigen Kreisprozeß erstreckt nicht, ja δQ hat überhaupt keine integrierende Faktoren.

Nur durch die Annahme des gleichzeitigen Vorhandenseins sehr vieler Systeme mit allen möglichen Flächengeschwindigkeiten, unter denen die Zustände nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verteilt sind, kann in diesem Falle die Analogie mit dem zweiten Hauptsatze der Wärmelehre wiederhergestellt werden.

Durch die gleiche Annahme wird auch der oben erwähnte Mangel an Analogie zwischen warmen Körpern und dem von uns jetzt betrachteten Systeme von n materiellen Punkten beseitigt, daß der Zustand der ersteren zur vollen Bestimmtheit außer der Angabe der äußeren Umstände nur der des Wertes einer Variabeln (der Temperatur) bedarf, während auf die Bewegung der betrachteten Systeme nebst der Lage der v Punkte und dem Energieinhalte noch andere die Anfangsbewegung der n Punkte bestimmende Integrationskonstanten ihrer Bewegungsgleichungen von Einfluß sein können. Hierauf soll jedoch hier nicht näher eingegangen werden.

§ 49. Theorie der Zykeln.

Wir gehen nun speziell zur Entwicklung einiger Lehrsätze aus der Theorie der Zykeln über. Wir verstehen, wie schon erwähnt, unter zyklischen Koordinaten schlechtweg solche, welche undifferenziert weder im Ausdrucke für lebendige Kraft noch auch in dem für die wirkenden Kräfte oder etwa vorhandenen Bedingungsgleichungen vorkommen. Wie ebenfalls bereits erwähnt, sind, falls keine Kräfte im gewöhnlichen Sinne der Mechanik und keine die Bewegungsfreiheit beschränkenden Bedingungen existieren, auch die rechtwinkligen Koordinaten zyklische. Allein sie definieren keine finite, d. h. keine Bewegung, bei welcher für beliebige Zeiten die rechtwinkligen Koordinaten und ihre Differentialquotienten nach der Zeit zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen sind. Dagegen ist die Variable, welche die Winkelstellung des im § 44 als Beispiel 3 beschriebenen Zentrifugalmodells definiert, eine zyklische Koordinate im erweiterten Hertzschen Sinne, welche, obwohl sie selbst mit wachsender Zeit ins Unendliche wachsen kann, doch unter allen Umständen eine finite Bewegung bestimmt.

Eine echt zyklische Koordinate dagegen ist eine solche, welche eine echt zyklische Bewegung bestimmt, d. h. wenn sie unter Konstanthaltung aller anderen Koordinaten veränderlich ist, so muß an die Stelle jeder Masse, welche ihren Ort im Raume verläßt, sogleich wieder eine andere vollkommen gleich beschaffene mit der gleichen Geschwindigkeit in gleicher Richtung bewegte Masse treten, worin das Merkmal der echt zyklischen Bewegung besteht.

Es sei ein System gegeben, welches folgende Bedingungen erfüllt: 1. unter den Variabeln, welche die Position seiner materiellen Punkte bestimmen, seien zyklische. 2. Gegenüber den Änderungsgeschwindigkeiten der zyklischen Variabeln (den zyklischen Geschwindigkeiten) seien die Differentialquotienten nach der Zeit (Änderungsgeschwindigkeiten) der übrigen Variabeln, welche zur Bestimmung dieser Position außerdem noch erforderlich sind, sehr klein; diese letzteren

Variabeln heißen deshalb die langsam Veränderlichen oder die Parameter; endlich 3. seien die zyklischen Beschleunigungen ebenfalls sehr klein gegenüber den zyklischen Geschwindigkeiten, d. h. die Änderungen der zyklischen Geschwindigkeiten, welche innerhalb von Zeiträumen eintreten, während denen sich die Absolutwerte der zyklischen Koordinaten schon sehr bedeutend verändert haben, seien noch immer sehr klein. Dann nennen wir das System ein zyklisches System oder noch kürzer ein Zykel.

Ist seine Bewegung zudem eine finite, so nennen wir es ein finites Zykel. Sind die zyklischen Variabeln lauter echt zyklische, so nennen wir es ein echtes Zykel. Ist nur eine unabhängige zyklische Variable vorhanden, so heißt das System ein Monozykel; sind deren zwei, so heißt es ein Bizykel; sonst im allgemeinen ein Polyzykel; wenn n unabhängige zyklische Variabeln vorhanden sind, ein n-Zykel.

An dem äußerlich wahrnehmbaren Zustande eines echten Zykels ist also, solange die Parameter konstant bleiben, trotz der lebhaften Bewegung innerhalb desselben keine Veränderung bemerkbar. Es zeigt sich dies an warmen Körpern, an Drähten, die von konstanten elektrischen Strömen durchflossen sind, aber auch an einem absolut symmetrischen, um seine Achse rotierenden Kreisel oder einer vollkommen homogenen, in einer in sich zurücklaufenden Röhre strömenden Flüssigkeit. Wenn dagegen die zyklischen Geschwindigkeiten und die Parameter sich langsam ändern, so entspricht dies einem Gase, welches langsam erwärmt oder umkehrbar ausgedehnt oder komprimiert wird. Ein anderes Beispiel ist die langsame Intensitätsänderung oder mechanische Ortsveränderung eines von einem elektrischen Strome durchflossenen Drahtes, oder die langsame Bewegung oder Deformation eines rotierenden Körpers oder eines von ponderabler Flüssigkeit durchströmten Kanales.

Man kann die in den §§ 45—47 entwickelten allgemeinen Formeln auf Zykeln anwenden, dabei aber manche Vereinfachungen anbringen. Das Zykel soll wieder aus n materiellen Punkten bestehen, deren Lage also teils durch zyklische, teils durch langsam veränderliche Koordinaten

bestimmt ist. Erstere wollen wir mit p_b, letztere mit p_a bezeichnen. Zwischen ihnen sollen keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen. Diese n materiellen Punkte entsprechen denjenigen, welche wir auch in den §§ 45—47 die n materiellen Punkte nannten.

Da die p_b nicht undifferenziert in dem Ausdrucke für T vorkommen, so sind die nach den zyklischen Koordinaten p_b wirkenden Kräfte (die zyklischen Kräfte)

249) $$P_b = \frac{d q_b}{d t},$$

wobei

250) $$q_b = \frac{\partial T}{\partial p'_b}.$$

Die Kräfte P_b entsprechen den Zusatzkräften der §§ 45—47; die durch sie dem Zykel zugeführte Energie soll die zyklisch zugeführte heißen; sie entspricht der zugeführten Wärme.

Da ferner die Glieder, welche zweite Ableitungen der p_b oder p_a nach der Zeit enthalten oder welche bezüglich der p'_a von der 1. oder gar 2. Ordnung sind, als verschwindend angesehen werden gegenüber denjenigen, welche bloß p_a und p'_b enthalten, so sind die nach den Parametern p_a wirkenden Kräfte

251) $$P_a = -\frac{\partial T}{\partial p_a}.$$

Da T eine homogene quadratische Funktion der p'_b ist, so können alle p'_b und p_a konstant, daher $p''_b = p'_a = 0$ sein, wenn alle P_b verschwinden. Dagegen müssen, wenn dies stattfinden soll, die P_a im allgemeinen von Null verschiedene Werte haben. Wir unterscheiden nun verschiedene Klassen von nach den Parametern p_a wirkenden Kräften. Dieselben können teils von der Wechselwirkung der n Punkte herstammen, teils auch von der Wirkung anderer materieller Punkte, welche den n' Punkten der §§ 45—47 entsprechen und wie diese ein für allemal fix im Raume sein und die fixen materiellen Punkte heißen sollen. Sie können übrigens hier wie dort auch den n materiellen Punkten zugerechnet werden. Diese, teils von der Wechselwirkung der n Punkte, teils von der Einwirkung etwa vorhandener fixer materieller Punkte auf sie herrührenden Kräfte, welche wir alle als

innere Kräfte bezeichnen, sollen jedenfalls eine skleronome Kraftfunktion haben, welche wir wieder mit F bezeichnen. Der gesamte aus dieser Ursache herstammende Anteil von P_a ist also $-\frac{\partial F}{\partial p_a}$.

Dazu müssen, damit die p_a konstant bleiben, im allgemeinen noch weitere Kräfte hinzukommen, welche wir mit $\mathfrak{P}_a$ bezeichnen und die äußern nach den Parametern wirkenden Kräfte nennen. Die materiellen Punkte, von denen sie ausgehen, entsprechen den ν materiellen Punkten der §§ 45—47 und sollen auch wieder die ν materiellen Punkte heißen. Sie werden für das betrachtete System als äußere angesehen.

Wenn exakt $p_b'' = p'_a = 0$ ist, also die zyklische Bewegung vollkommen stationär ist, so bleibt auch die Lage der ν Punkte vollständig unverändert und muß eine solche sein, daß exakt

252) $$P_a = \mathfrak{P}_a - \frac{\partial F}{\partial p_a} = -\frac{\partial T}{\partial p_a}$$

ist. Dies entspricht dem, was wir in §§ 45—47 die unvariierte Bewegung genannt haben. Setzen wir hier in der Theorie der Zykeln wieder

253) $$T - F = H, \quad T + F = E,$$

wobei die Buchstaben H und E dieselbe Bedeutung wie in §§ 45—47, aber eine etwas andere als in den übrigen Abschnitten dieses Buches haben, so können wir die Gleichungen 249) und 252) auch so schreiben:

254) $$\mathfrak{P}_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad P_b = \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_b}.$$

Wenn die langsam veränderlichen Parameter und die Werte der p'_b sich sehr langsam verändern sollen, so müssen die $\mathfrak{P}_a$ ein wenig von den durch die obigen Gleichungen gegebenen Werten und die P_b ein wenig von Null verschieden sein. Diese letzteren Kräfte entsprechen dann denjenigen, welche wir in §§ 45 bis 47 die Zusatzkräfte genannt haben und sollen auch hier wieder diesen Namen beibehalten. Die von ihnen zugeführte Energie, die zyklisch zugeführte Energie, entspricht in der Wärmetheorie der zugeführten Wärme.

Die langsame Veränderung, welche die zyklische Bewegung durch die Zusatzkräfte sowie vermöge des Umstandes erfährt, daß die von den ν Punkten ausgehenden Kräfte nicht genau die durch die Gleichung 252) bestimmten Werte $\mathfrak{P}_a$ haben, entspricht dem, was wir in den §§ 45—47 die Variation der Bewegung genannt haben; jedoch ist es gegenwärtig nicht notwendig, die durch die langsame Bewegung der ν Punkte und die Wirksamkeit der Zusatzkräfte eintretende allmähliche Änderung der stationären zyklischen Bewegung als ein Problem der Variationsrechnung aufzufassen und die dabei eintretenden Zuwächse durch Verwendung des Zeichens δ besonders hervorzuheben. Man kann vielmehr diese allmähliche Zustandsänderung als eine gewöhnliche unter dem Einfluß der Zusatzkräfte und der Lagenänderung der ν Punkte im Verlaufe der Zeit stattfindende Bewegung auffassen. Es liegt dies besonders nahe bei den echten Zykeln, bei denen die unvariierte Bewegung gar keine sichtbare Zustandsänderung darstellt, so daß erst bei deren langsamer Variation wahrnehmbare zeitliche Veränderungen auftreten.

Die Werte von T, V etc. für einen beliebigen Zeitmoment der unvariierten Bewegung fallen für Zykeln mit den Mittelwerten $\overline{T}$, $\overline{V}$ etc. derselben Größen für die unvariierte Bewegung zusammen. Es ist gleichgültig, in welchem Zeitmomente der unvariierten Bewegung die Variation beginnt, welche ganz den Charakter einer unter dem Einflusse gegebener Kräfte stattfindenden mechanischen Bewegung hat und auch beliebig lange andauern, allmählich zu einer endlichen Variation wachsen und zu einer beliebigen Zeit enden kann. Wenn in irgend einer Phase derselben plötzlich $p_b'' = p_a' = 0$ wird, erhält man sofort die dieser Phase entsprechend zu denkende unvariierte Bewegung.

Es tritt hier deutlich zutage, wie die am Eingange dieses Buches betrachtete Variation ganz allmählich sich dem Charakter einer gewöhnlichen, im Verlaufe der Zeit stattfindenden Bewegung beliebig nähern kann, bei welcher nur einzelne Koordinaten viel rascher, andere viel langsamer veränderlich sind.

Wir wollen für diese allmählich mit der Zeit eintretenden Änderungen der zyklischen Bewegungen noch immer den Namen Variationen beibehalten und auch die Bewegungsgleichungen für die Änderungen der p_a, welche dadurch eintreten, daß die $\mathfrak{P}_a$ nicht genau die durch die Gleichungen 252) und 254) gegebenen Werte haben, erst in § 53 aufschreiben.

§ 50. Der integrierende Faktor des Differentials der zyklisch zugeführten Energie.

Die Arbeit, welche während der Variation der zyklischen Bewegungen in der Zeit dt von der Kraft P_b geleistet wird, ist nach Gleichung 249):

255) $$dQ_b = P_b\,dp_b = P_b p_b'\,dt = p_b'\,dq_b.$$

Die Summe dQ aller dQ_b ist die gesamte von allen Kräften P_b (den zyklischen oder Zusatzkräften) geleistete Arbeit, welche wir die dem Systeme zyklisch zugeführte Energie genannt haben und welche der zugeführten Wärme analog ist.

Falls das System ein Monozykel ist und man die einzige zyklische Variable ohne Index schreibt, so erhält man

$$dQ = p'\,dq$$

und wegen $T = p'q$,

256) $$\frac{dQ}{T} = \frac{dq}{q}.$$

Es ist also $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential und lq die Entropie.

Diese Formel findet Anwendung auf alle echten Monozykeln, innerhalb deren beliebige Massen eine zyklische Bewegung machen, so daß sie alle innerhalb derselben Zeit i gleichzeitig zu ihrer Ausgangslage zurückkehren und dann von neuem dieselbe Bewegung machen. Solche Monozykeln werden von Helmholtz als einfache echte Monozykeln bezeichnet und man sieht leicht, daß sie einen Spezialfall der in § 48 behandelten periodischen Systeme bilden.

Wenn ein Zykel verschiedene Massensysteme besitzt, deren jedes eine in dieser Weise in sich zurücklaufende Bewegung macht, und wenn die Perioden $i, i_1, i_2, \ldots$ für die

verschiedenen Systeme verschieden sind, so heißt das System ein ungefesseltes, oder nur teilweise gefesseltes Polyzykel, sobald die Dauer dieser Perioden außer von den Werten der langsam veränderlichen Parameter auch noch von denen mehrerer unabhängiger zyklischer Geschwindigkeiten abhängt, dagegen ein vollständig gefesseltes Polyzykel, oder ein zusammengesetztes Monozykel, wenn sie außer von den Parametern nur noch von dem Werte einer einzigen zyklischen Geschwindigkeit abhängt. Wenn im letzten Falle die Zahl der Verhältnisse $\frac{\dot{i}_1}{\dot{i}}, \frac{\dot{i}_2}{\dot{i}}, \cdots$ eine endliche ist und die Werte dieser Verhältnisse von denen der Parameter (der langsam veränderlichen Koordinaten) vollkommen unabhängig sind, so kann man sich diese Verhältnisse ohne wesentliche Änderung der mechanischen Bedingungen als rationale, wenn auch mit sehr großem gemeinsamen Nenner denken und daher einen längeren Zeitraum J finden, innerhalb dessen die Bewegung aller Massensysteme gleichzeitig eine periodisch wiederkehrende ist, so daß das gesamte mechanische System ein einfaches echtes Monozykel von der Periode J darstellt und alles von einem solchen Bewiesene darauf anwendbar ist.

Dies wird aber zweifelhaft, wenn die Anzahl der Verhältnisse $\frac{\dot{i}_1}{\dot{i}}, \frac{\dot{i}_2}{\dot{i}}, \cdots$ eine unendlich große ist und gilt jedenfalls nicht mehr, wenn die Werte dieser Verhältnisse kontinuierliche Funktionen der Parameter sind, weil dann die zyklischen Koordinaten im Vereine mit den Parametern im allgemeinen nicht mehr ein System holonomer Koordinaten bilden.[1]) Alle entwickelten Formeln gelten aber nur für holonome Koordinaten; denn wie wir schon in § 4 auf S. 16

---

[1]) Borchards Journal Bd. 98, 1. Heft S. 87, 1885; Wien. Sitz.-Ber. Bd. 111, S. 1603 1902. Wenn z. B. die parallelen Drehungsachsen zweier Körper sich nach entgegengesetzter Seite konisch verjüngen und ein Transmissionsriemen oder eine Friktionsscheibe so dazwischen kontinuierlich verschiebbar ist, daß sie bald einen dickeren Teil der ersten Achse mit einem dünneren der zweiten, bald wieder umgekehrt verbindet und man den Weg s eines nicht in der Drehungsachse liegenden Punktes des ersten Körpers als zyklische, die Verschiebung a des Riemens oder der Friktionsscheibe als langsam ver-

in der Anmerkung erwähnten, werden im ganzen Buche, mit Ausnahme der §§ 27 und 28, unter generalisierten Koordinaten immer nur holonome generalisierte Koordinaten verstanden. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen und nur noch den Beweis für einen sehr allgemeinen, von Helmholtz gefundenen Satz führen.

Sei ein beliebiges, zusammengesetztes monozyklisches (also vollständig gefesseltes polizyklisches) System gegeben, dessen langsam veränderliche Koordinaten mit p_a, dessen rasch veränderliche Koordinate mit p bezeichnet werden sollen. Es wird vorausgesetzt, daß bei passender Änderung der $\mathfrak{P}_a$ die Bewegung in genau ähnlicher Weise vor sich gehen kann, wobei nur sämtliche Geschwindigkeiten mit einer konstanten, für alle Geschwindigkeiten gleichen, aber ganz willkührlichen Zahl n multipliziert, also gewissermaßen die Zeitdauer aller Vorgänge auf den n-ten Teil reduziert erscheint; wenn dann nur ein einziger langsam veränderlicher Parameter p_a vorhanden ist, so ist die gesamte im Systeme enthaltene lebendige Kraft immer integrierender Nenner des Differentials der von außen zugeführten Energie; sind dagegen mehrere p_a vorhanden, so gilt dies ebenfalls jedesmal dann, wenn jenes Differential überhaupt integrierende Faktoren besitzt.

Sei zunächst nur ein langsam veränderlicher Parameter p_a vorhanden, so werden zwei Gattungen von Zustandsänderungen möglich sein. Erstens bei ungeänderten Bahnformen ändert sich bloß die Geschwindigkeit aller beweglichen Teile proportional. Zweitens ändern sich die Bahnformen. Die Gestalt der Bahnen hängt daher nur von einer einzigen unabhängig veränderlichen Größe ab, während die andere

änderliche Koordinate wählt, so gelangt ein nicht in der Rotationsachse liegender Punkt des zweiten Körpers im allgemeinen nicht an dieselbe Stelle, wenn zuerst s um eine endliche Größe σ und dann a um eine ebenfalls endliche Größe α wächst, oder wenn zuerst a um α und dann erst s um σ wächst. Wenn also auch durch a und ds/dt sämtliche Geschwindigkeiten, also falls wir ein echtes Zykel vor uns haben, der ganze erkennbare Zustand desselben gegeben ist, so sind doch nicht durch die Angabe der Werte von a und s die Positionen sämtlicher Punkte des Systems bestimmt, a und s sind also nicht holonome verallgemeinerte Koordinaten.

unabhängig veränderliche Größe bloß die Geschwindigkeit bestimmt, mit welcher die Bahnen durchlaufen werden. Falls man daher die Grenzen immer so variiert, daß das letzte Glied der Gleichung 223) verschwindet, muß man bei der Rückkehr zur alten Bahn auch zu den ursprünglichen Grenzen zurückgelangen, die beiden Glieder in Gleichung 238) rechts werden identisch und dQ/T wird ein vollständiges Differential.

Falls mehr als ein langsam veränderlicher Parameter p_a existiert, ist T im allgemeinen nicht mehr integrierender Nenner von dQ, da man bei Wiederkehr zu genau demselben Zustande des Systems im allgemeinen nicht mehr zu denselben Integrationsgrenzen zurückkommen wird, sobald die Grenzen immer so geändert werden, daß das letzte Glied in Gleichung 223) verschwindet; doch läßt sich auch in diesem Falle beweisen, daß T integrierender Nenner sein muß, falls überhaupt integrierende Faktoren von dQ existieren. Sei allgemein $dQ = M\,dN$ und man wähle T und die p_a als die independenten Variabeln.

Nach dem eben Bewiesenen muß, sobald alle p_a bis auf eines konstant sind, T integrierender Nenner von dQ sein; ist also g irgend einer der Indizes a und $d\sigma_g$ das zum Faktor T hinzutretende Differential, so folgt zunächst:

$$257)\qquad M\left(\frac{\partial N}{\partial T}dT + \frac{\partial N}{\partial p_g}dp_g\right) = T\left(\frac{\partial \sigma_g}{\partial T}dT + \frac{\partial \sigma_g}{\partial p_g}dp_g\right).$$

Diese Gleichung muß für alle Wertekombinationen der dabei als konstant vorausgesetzten Variabeln $p_1, p_2, \ldots p_{g-1}, p_{g+1}\ldots$ gelten. Wenn also M und N gegeben sind, so ist daraus σ_g bis auf einen nur die letzterwähnten Variabeln enthaltenden Ausdruck bestimmt. Dasselbe gilt auch für jeden beliebigen anderen der Indizes a, z. B. h; man hat also ebenso

$$258)\qquad M\left(\frac{\partial N}{\partial T}dT + \frac{\partial N}{\partial p_h}dp_h\right) = T\left(\frac{\partial \sigma_h}{\partial T}dT + \frac{\partial \sigma_h}{\partial p_h}dp_h\right),$$

wobei natürlich die Identität von σ_g und σ_h noch nicht erwiesen ist. Aus dieser und der Gleichung (257) folgt unmittelbar:

$$259)\qquad \frac{\partial \sigma_g}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_h}{\partial T}.$$

Es können sich also σ_g und σ_h nur um Größen unterscheiden, welche kein T, sondern nur die p_a enthalten. Wir wollen setzen: $\sigma_g = \sigma + \Pi_g$, $\sigma_h = \sigma + \Pi_h$, wobei die Π nicht mehr Funktionen von T sind; dann folgt aus der Gleichung 257)

260) $$M\frac{\partial N}{\partial T} = T\frac{\partial \sigma}{\partial T}$$

und

261) $$M\frac{\partial N}{\partial p_g} = T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial p_g} + \frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g}\right)$$

für jeden Wert von g; hieraus ergibt sich weiter

262) $$d\,Q = M\,d\,N = T\left(d\,\sigma + \sum\frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g}d\,p_g\right),$$

die Summe ist über alle möglichen Werte des Index g zu erstrecken. Da laut Übereinkunft $d\,Q$ einen integrierenden Faktor hat, so muß es jedenfalls auch einen besitzen, wenn man alle p_a bis auf zwei derselben, etwa p_g und p_h, konstant setzt. Dividiert man dann noch das Differential $d\,Q$ durch T, so ergibt sich:

263) $$\frac{\partial \sigma}{\partial T}d\,T + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial p_g} + \frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g}\right)d\,p_g + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial p_h} + \frac{\partial \Pi_h}{\partial p_h}\right)d\,p_h = \frac{d\,Q}{T}.$$

Nach dem Gesagten muß auch dieser Differentialausdruck einen integrierenden Faktor haben. Schreibt man die bekannte Bedingung dafür hin, so sieht man, daß aus derselben folgt: entweder

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = 0$$

oder

264) $$\frac{\partial^2 \Pi_g}{\partial p_g\,\partial p_h} = \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial p_g\,\partial p_h}$$

für alle Wertepaare von g und h. Die erste Gleichung kann nie erfüllt sein, da sonst bei Konstanthaltung der p_a zur Erhöhung der lebendigen Kraft gar keine Energiezufuhr notwendig wäre. Es müssen daher die Gleichungen 264) gelten, aus welchen folgt, daß $\sum\frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g}d\,p_g$ das komplette Differential einer Funktion Π der p_a ist, weshalb dann $d\,Q = T\,d(\sigma + \Pi)$ wird.

§ 51. Adiabatische und isozyklische Bewegung.

Wenn für ein beliebiges Zykel alle $P_b = 0$ sind, dagegen die $\mathfrak{P}_a$ von den durch die Gleichungen 252) und 254) gegebenen Werten verschieden sind, so daß die Parameter p_a sich langsam verändern, so nennt man die Bewegung eine adiabatische. Dann folgt aus den Gleichungen 249), daß die Momente q_b bezüglich der zyklischen Koordinaten alle konstant sein müssen. Die zyklischen Geschwindigkeiten p'_b aber werden sich dann infolge der langsamen Änderung der Parameter allmählich ebenfalls langsam ändern. Wenn dagegen die P_b während der langsamen Änderung der Parameter stets solche Werte haben, daß die p'_b exakt unverändert bleiben, so nennt man die Bewegung eine isozyklische.

Ein Beispiel für die adiabatische Bewegung bildet ein um seine Achse rotierender Rotationskörper, oder das im § 44 als Beispiel 3 beschriebene Zentrifugalmodell, wenn niemals ein um die Rotationsachse drehendes Moment wirkt. Dagegen macht das Zentrifugalmodell eine isozyklische Bewegung, wenn durch passende, an der Kurbel wirkende Kräfte $\mathfrak{P}_b$ seine Umdrehungsgeschwindigkeit stets konstant erhalten wird, obwohl sich die verschiebbare Masse m der Drehungsachse bald langsam nähert, bald langsam davon entfernt.

Physikalische Analogien für die adiabatische Bewegung sind warme Körper, bei deren Zustandsänderung Wärme weder zugeführt noch entzogen wird (daher der Name adiabatisch auch für die analogen Bewegungen mechanischer Zykeln), elektrische Stromkreise, in denen unveränderliche elektromotorische Kräfte tätig sind, bewegte, mit konstanten Elektrizitätsmengen statisch geladene Leiter etc. Die entsprechenden physikalischen Vorgänge werden isozyklischen Bewegungen analog, wenn die Temperatur der warmen Körper, die Stromintensität der elektrischen Ströme, das Potential der elektrostatisch geladenen Leiter konstant erhalten wird. Bei einem rotierenden Körper tritt isozyklische Bewegung ein, wenn er in Riemen- oder Zahnrad-

verbindung steht (gekoppelt ist) mit einem rotierenden Schwungrade von unendlicher Masse oder einem zu Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gezwungenen Körper; physikalische Analogien bietet ein warmer Körper, der mit einem unendlichen Wärmereservoir gut leitend verbunden ist, ein elektrischer Leiter, dessen Enden auf konstantem Potentialunterschied erhalten werden (mit den Polklemmen des Elektrizitätswerkes verbunden sind), in der Elektrostatik ein zur Erde abgeleiteter Körper, was Helmholtz auch als Koppelung mit der Erde, dem Wärmereservoir usw. bezeichnet.

In Gleichung 254) sind die partiellen Differentialquotienten so zu verstehen, daß die p'_b konstant zu halten sind, also die Zustandsänderungen isozyklisch zu geschehen haben. Wir wollen, wie es schon in § 9 geschah, partielle Differentialquotienten, bei deren Bildung die p'_b als konstant zu betrachten sind, mit dem Index p', solche dagegen, bei deren Bildung die q_b als konstant zu betrachten sind, mit dem Index q bezeichnen.

Man kann daher sagen: H ist die Kraftfunktion der nach den Parametern p_a wirkenden Kräfte $\mathfrak{P}_a$ für isozyklische Zustandsänderung, ihr entspricht in der Thermodynamik das isotherme thermodynamische Potential; bei jeder isozyklischen Bewegung ist

$$-\sum_a \frac{\partial H}{\partial p_a} d p_a = -d H = d F - d T$$

die von den auf das Cykel wirkenden Kräften $\mathfrak{P}_a$ bei Änderung der p_a dem Zykel zugeführte (d. h. die in Form von äußerer Arbeitsleistung zugeführte) Energie. Da der ganze Energiezuwachs $d E = d F + d T$ ist, so folgt $d Q = 2 d T$, die zyklisch zugeführte Energie ist daher gleich dem doppelten Zuwachs der kinetischen Energie.

Nach Gleichung 63) ist

$$\frac{\partial_q T}{\partial p_a} = -\frac{\partial_{p'} T}{\partial p_a} \quad \text{daher} \quad \frac{\partial_q E}{\partial p_a} = -\frac{\partial_{p'} H}{\partial p_a}.$$

Man kann also die erste der Gleichungen 254) auch so schreiben:

$$\mathfrak{P}_a = \frac{\partial_q E}{\partial p_a}. \tag{265}$$

Die äußeren Kräfte $\mathfrak{P}_a$ können daher auch als die adiabatischen partiellen Differentialquotienten von E nach den Koordinaten p_a und $-E$ als die adiabatische Kraftfunktion bezeichnet werden. Die gesamte, durch äußere Arbeitsleistung dem Systeme zugeführte Energie ist also bei adiabatischer Bewegung gleich dE, also gleich dem gesamten Energiezuwachs, was selbstverständlich ist, da sie in diesem Falle die einzige Energiezufuhr ist.

Durch Anwendung des gefundenen Theorems, daß sowohl bei adiabatischer als auch bei isozyklischer Zustandsänderung die äußeren Kräfte eine Kraftfunktion haben, auf die Wärmetheorie erhalten wir folgenden Satz: Wenn ein warmer fester Körper durch beliebige äußere Kräfte adiabatisch oder isotherm beliebig deformiert wird, so ist die Deformationsarbeit immer ein vollständiges Differential, als ob die äußeren Kräfte solchen, die von ruhenden Massenteilchen herrühren, das Gleichgewicht hielten, wenn auch die Massenteilchen des Körpers in lebhaftester Wärmebewegung begriffen sind.

§ 52. Hertz' reziproke Beziehungen.

1. Es möge sich der Zustand eines Zykels langsam adiabatisch einmal so verändern, daß nur der Parameter p_a und dp_a wächst, das andere Mal so, daß nur der Parameter $p_{a'}$ um $dp_{a'}$ wächst. Im ersten Falle möge die nach $p_{a'}$ wirkende äußere Kraft $\mathfrak{P}_{a'}$ um $d\mathfrak{P}_{a'}$, im zweiten Falle die nach p_a wirkende äußere Kraft $\mathfrak{P}_a$ um $d\mathfrak{P}_a$ wachsen, dann ist immer

$$\frac{d\mathfrak{P}_{a'}}{dp_a} = \frac{d\mathfrak{P}_a}{dp_{a'}},$$

dasselbe gilt auch, wenn alle Bewegungen isozyklisch erfolgen, wir können diese beiden Relationen ausführlicher so schreiben:

$$\frac{\partial_q \mathfrak{P}_{a'}}{\partial p_a} = \frac{\partial_q \mathfrak{P}_a}{\partial p_{a'}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial_{p'} \mathfrak{P}_{a'}}{\partial p_a} = \frac{\partial_{p'} \mathfrak{P}_a}{\partial p_{a'}},$$

der Beweis folgt unmittelbar aus den Gleichungen 254) und 265), d. h. aus dem Umstande, daß die äußeren Kräfte sowohl für die adiabatische als auch für die isozyklische Zustandsänderung eine Kraftfunktion haben.

2. Wegen

$$\mathfrak{P}_a = -\frac{\partial F}{\partial p_a} - \frac{\partial_q T}{\partial p_a}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_b} = 0 \quad \text{und} \quad p'_b = \frac{\partial T}{\partial q_b}$$

(letzteres nach 60)), findet man

266) $$\frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial q_b} = -\frac{\partial_q p'_b}{\partial p_a}.$$

Wenn daher ein bei Konstanz aller übrigen q und aller Parameter erfolgender Zuwachs eines zyklischen Momentes q_b um $d q_b$ einen Zuwachs der nach einem Parameter p_a wirkenden Kraft $\mathfrak{P}_a$ um $d\mathfrak{P}_a$ bewirkt, so bewirkt ein adiabatischer und bei Konstanz der übrigen Parameter erfolgende Zuwachs von p_a um dp_a einen entgegengesetzt wie $d\mathfrak{P}_a$ bezeichneten Zuwachs (eine Abnahme) der zyklischen Geschwindigkeit p'_b um dp'_b und zwar ist das Verhältnis der als Ursachen angenommenen Zuwächse $d q_b$ und dp_a zu den als Wirkungen betrachteten Änderungen ($d\mathfrak{P}_a$ und dp'_b) gleich (wie Hertz sagt, das Verhältnis zwischen Ursachen und Wirkung ist in beiden Fällen gleich). Es ist unter diesen speziellen Umständen

267) $$\frac{d\mathfrak{P}_a}{d q_b} = -\frac{d p'_b}{d p_a}.$$

Da für ein Monozykel dp_b' und $d q_b$ gleich bezeichnet sein muß, so gilt für ein solches auch folgender Satz: Wenn eine Vermehrung der zyklischen Geschwindigkeit p' bei Konstanz der Parameter die Kraft nach irgend einem Parameter p_a erhöht, so muß ein adiabatischer Zuwachs dieses Parameters bei Konstanz der anderen die zyklische Geschwindigkeit p' vermindern.

3. Es möge die Kraft P_b den in Gleichung 267) vorkommenden Zuwachs $d q_b$ in der Zeit $d t$ erzeugen, so ist $d q_b = P_b\, d t$, andererseits ist $\mathfrak{P}'_a = \frac{d\mathfrak{P}_a}{d t}$ die Geschwindigkeit, mit welcher dann die Kraft $\mathfrak{P}_a$ unter den Umständen wächst, unter denen die Gleichung 267) gilt. Die linke Seite der Gleichung 267) ist daher gleich $\mathfrak{P}'_a/P_b$ und wenn man für die rechte Seite wieder deutlichkeitshalber zur Schreibweise der Gleichung 266) zurückkehrt, so folgt aus 267)

268) $$\frac{\mathfrak{P}'_a}{P_b} = -\frac{\partial_q p'_b}{\partial p_a},$$

in Worten: Wenn alle Parameter konstant und alle nach den zyklischen Koordinaten wirkenden Kräfte bis auf eine (P_b) gleich Null sind, so soll während der Zeit dt die nach dem Parameter p_a wirkende Kraft $\mathfrak{P}_a$ um $\mathfrak{P}'_a dt$ wachsen, dann bewirkt eine adiabatische Zunahme von p_a unter Konstanz der übrigen Parameter eine Abnahme von p'_b und es ist wieder das Verhältnis von Ursache und Wirkung in beiden Fällen gleich, wenn wir die Kraft P_b als Ursache, die Änderungsgeschwindigkeit $\mathfrak{P}'_a$ der Kraft $\mathfrak{P}_a$ als ihre Wirkung, und andererseits den Koordinatenzuwachs dp_a als Ursache und die Abnahme $-dp'_b$ der zyklischen Geschwindigkeit p'_b als deren Wirkung betrachten.

4. Wegen

$$\mathfrak{P}_a = -\frac{\partial F}{\partial p_a} + \frac{\partial_{p'} T}{\partial p_a} \text{ und } q_b = \frac{\partial_{p'} T}{\partial p'_b}$$

hat man

269) $$\frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial p'} = \frac{\partial_{p'} q_b}{\partial p_a},$$

d. h. wenn bei Konstanz der übrigen zyklischen Geschwindigkeiten und der Parameter ein Zuwachs einer zyklischen Geschwindigkeit p'_b einen Zuwachs der nach einem Parameter p_a wirkenden äußeren Kraft $\mathfrak{P}_a$ bewirkt, so bewirkt auch ein isozyklischer Zuwachs von p_a bei Konstanz der übrigen Parameter einen Zuwachs des zu p'_b gehörigen zyklischen Momentes q_b und zwar ist, wie Hertz abgekürzt sagt, wieder für unendlich kleine Zuwächse das Verhältnis von Ursache und Wirkung in beiden Fällen gleich. Auch hat für Monozykeln wieder der Zuwachs der zyklischen Geschwindigkeit dasselbe Vorzeichen, wie der des zyklischen Momentes.

5. Genau so, wie aus Gleichung 266) die Gleichung 268) gewonnen wurde, so können wir auch aus Gleichung 269) eine neue bilden. Bei Bildung des partiellen Differentialquotienten der rechten Seite der letzteren Gleichung ist angenommen, daß die $\mathfrak{P}_a$ und P_b solche Werte haben, daß alle p'_b und alle Parameter mit Ausnahme eines einzigen p_a konstant bleiben. Die dabei nach der zyklischen Koordinate p_b wirkende Kraft soll P_b, die Zuwächse von p_a und q_b während

der Zeit dt aber sollen dp_a und dq_b heißen. Dann ist der Quotient $\frac{dq_b}{dp_a}$ gleich der in Formel 269) mit $\frac{\partial_{p'} q_b}{\partial p_a}$ bezeichneten Größe, es ist aber auch $dp_a = p'_a dt$ und $dq_b = P_b dt$: daher

$$\frac{\partial_{p'} q_b}{\partial p_a} = \frac{P_b}{p'_a}$$

und man kann die Gleichung 269) in der Form schreiben

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial p'_b} = \frac{P_b}{p'_a}. \tag{270}$$

In Worten ausgedrückt: Wenn bei Konstanz der übrigen zyklischen Geschwindigkeiten und der Parameter ein Anwachsen einer zyklischen Geschwindigkeit p'_b einen Zuwachs, der nach einem Parameter p_a wirkenden Kraft $\mathfrak{P}_a$ bewirkt, so muß behufs isozyklischen Wachsens von p_a bei Konstanz der übrigen Parameter in der Richtung der zyklischen Koordinate p_b eine positive Kraft P_b wirken und zwar ist wieder das Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen gleich, wenn man den Zuwachs von p'_b als Ursache, den Zuwachs von $\mathfrak{P}_a$ als deren Wirkung, andererseits die Geschwindigkeit p_a', mit welcher sich p_a isozyklisch ändert, als Ursache der Notwendigkeit der Kraft P_b und letztere als deren Wirkung bezeichnet.

Beim Beweise und der mathematischen Formulierung dieses Satzes ist in Hertz' Prinzipien der Mechanik Nr. 577) S. 245 überall das Zeichen ∂ zu viel.

§ 53. Helmholtz' Sätze über gemischte Zykeln.

Helmholtz hat einige Betrachtungen von noch etwas größerer Allgemeinheit angestellt. Es sei wieder ein System von n Punkten gegeben, welches mit n' ein für allemal und für immer fixen Punkten in Wechselwirkung stehen kann, welch letztere Punkte man auch, wenn man will, zu den n Punkten zählen kann. Die Kraftfunktion aller zwischen diesen Punkten wirksamen Kräfte sei F, die kinetische Energie der n Punkte sei T. Wir setzen diesmal wieder, wie in

§§ 45—52, aber abweichend von unserer sonstigen Bezeichnungsweise

$$T + F = E,$$
$$T - F = H,$$

so daß E die gesamte Energie der $n + n'$ Punkte ist. Unter den Koordinaten, welche die Position der n Punkte bestimmen, können zyklische sein, die wir wieder mit p_b bezeichnen wollen, d. h. ihre nicht nach der Zeit differentierten Werthe sollen weder in T noch in F vorkommen. Bloß die p'_b sollen in T vorkommen. Die Gesamtanzahl dieser zyklischen Koordinaten sei σ. Die Gesamtkraft, $-\partial F / \partial p_b$, welche die $n + n'$ Punkte nach irgend einer zyklischen Koordinate ausüben, muß also gleich Null sein. Die übrigen Koordinaten brauchen nicht gerade langsam veränderliche zu sein, sind also ganz beliebige Koordinaten. Wir nennen sie daher gewöhnliche Koordinaten und bezeichnen sie wieder mit p_k. Ihre Gesamtzahl sei s. Zwischen den p sollen keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen. Ein solches System, welches zwar zyklische Koordinaten enthält, dessen übrige Koordinaten aber nicht oder wenigstens nicht alle als langsam veränderlich betrachtet werden, wollen wir ein gemischtes Zykel nennen und im Gegensatze dazu ein solches, welches nur zyklische und langsam veränderliche Koordinaten enthält, ein reines Zykel.

Am leichtesten wird das Verständnis der nun zu entwickelnden Gleichungen, wenn man sich die Beschaffenheit des Systems der $n + n'$ Punkte und die Kraftfunktion F, sowie auch die Bewegung der Punkte, also deren sämtliche Koordinaten als Funktionen der Zeit, gegeben denkt und sich fragt, welche Kräfte P_b und $\mathfrak{P}_k$ nach den zyklischen Koordinaten wirken resp. zu den vermöge der Kraftfunktion F nach den gewöhnlichen Koordinaten wirkenden Kräften noch hinzukommen müssen, um die gegebene zeitliche Veränderung der Koordinaten zu erzeugen. Es müssen dann für die zyklischen Koordinaten die Gleichungen 254) also

271) $$P_b = \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_b}$$

und für die gewöhnlichen Koordinaten die gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen

$$\mathfrak{P}_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_h} - \frac{\partial H}{\partial p_h} \tag{272}$$

gelten. Für jeden Index b und h sei

$$\frac{\partial H}{\partial p'} = \frac{\partial T}{\partial p'} = q. \tag{273}$$

Die gesuchten Kräfte P_b und $\mathfrak{P}_h$ sollen wieder von beliebigen äußeren (den v) materiellen Punkten ausgehen, um die wir uns übrigens weiter gar nicht kümmern wollen. Sie können, wenn die Werte der p als Funktionen der Zeit gegeben sind, aus den Gleichungen 271) und 272) ebenfalls als Funktionen der Zeit gefunden werden, d. h. es kann die Frage beantwortet werden, welche äußere Kräfte P_b und $\mathfrak{P}_h$ in jedem Momente zu den durch die Kraftfunktion F bedingten noch hinzukommen müssen, um die gegebene Bewegung zu erzeugen.

Natürlich ist die Gültigkeit der Gleichungen 271) und 272) ganz davon unabhängig, welche Größen man darin als gegeben betrachtet und nach welchen man frägt. Diese Gleichungen sind auch richtig, wenn die P_b und $\mathfrak{P}_h$ als Funktionen der Zeit, ja selbst, wenn sie als Funktionen der Koordinaten, Geschwindigkeiten oder sonst beliebiger Größen gegeben wären und wenn die Aufgabe gestellt wäre, die Bewegung (d. h. die p'' bei gegebenen Anfangswerten der p und p') zu bestimmen. Nur würden im letzten Falle auch die linken Seiten der Gleichungen 271) und 272) die zu suchenden Unbekannten enthalten. Ja es ist eigentlich vollkommen willkürlich, welche Kräfte man zur Kraftfunktion F als innere, welche zu den $\mathfrak{P}_h$ als äußere rechnet, ob man die Körper, von denen gewisse Kräfte ausgehen, noch zum System rechnet oder als außenliegend ansieht, wenn man sich dann nur konsequent bleibt; so rechnet z. B. Helmholtz in der Elektrodynamik den galvanischen Leitungswiderstand bloß deshalb zu den $\mathfrak{P}$, weil er zu irreversibeln Vorgängen Anlaß gibt. Wir wollen aber behufs größerer Anschaulichkeit immer fingieren, daß F und die Bewegung

des Systems gegeben wäre und nach den zu ihrer Herhaltung notwendigen P_b und $\mathfrak{P}_h$ gefragt werde.

Gleichungen von der Form der Gleichung 272) müssen auch an die Stelle der Gleichungen 252) und 254) treten, wenn man die in §§ 49—51 behandelte Theorie der Zykeln ohne jede Vernachlässigung entwickeln will oder überhaupt, wenn man die Frage lösen will, wie sich die langsam veränderlichen Parameter unter dem Einflusse gegebener $\mathfrak{P}_a$ mit der Zeit verändern. Denn wenn man diese Frage beantworten will, so darf man offenbar nicht p_a' und p_a'' vernachlässigen. In der Gleichung 271) und 272) aber findet sich keine Vernachlässigung mehr; denn die Bedingung, daß die zyklischen Koordinaten undifferenziert weder in T noch in F vorkommen, ist nicht bloß annäherungsweise, sondern vollkommen exakt realisiert.

Die Gleichung 272) hat die zu Anfang des § 34 angedeutete Form, welche man erhält, wenn man in der allgemeinen Lagrangeschen Gleichung 50) die $\pi = 0$ setzt und dem V die Form 220) erteilt.

Es sollen zunächst sämtliche $P_b = 0$ sein, so daß die zyklischen Bewegungen adiabatisch verlaufen.

Dann sind nach 271) die Größen

274) $$\frac{\partial H}{\partial p'_b} = q_b$$

zu allen Zeiten konstant. Sind die Werte dieser Konstanten gegeben, so können mittels der σ Gleichungen 274) die σ Größen p'_b aus T und daher auch aus H eliminiert werden. Da aber die Gleichungen 274) Glieder mit den ersten Potenzen der p' und solche die von den p' frei sind, enthalten, so wird nach dieser Elimination T eine Funktion zweiten Grades der übrigen p' (der p'_h) sein, welche nicht mehr homogen ist, sondern auch Glieder, die linear bezüglich der p'_h sind und ein von diesen ganz freies Glied enthält. Dann enthält also auch die Größe $\mathfrak{H}$, welche durch Elimination der p'_b aus H mittels der Gleichungen 274) entsteht, Glieder, die bezüglich der p'_h linear sind.

Ein Beispiel hierfür wäre ein System, welches einen um eine Hauptträgheitsachse reibungslos und widerstands-

los rotierenden Körper enthält, wie das Pendel, das wir in § 22 behandelten. Der Winkel, dessen Differentialquotient nach der Zeit die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers bestimmt, wäre das betreffende p_b und es müßte angenommen werden, daß die Kräfte immer nur auf die beiden Spitzen der Achsen wirken, so daß niemals ein Drehmoment existiert, welches die Drehung beschleunigt oder verzögert. Der gleichen Bedingung unterworfene rotierende Körper denkt sich **Maxwell** zur Erklärung des Magnetismus innerhalb der Volumenelemente des Äthers vorhanden und erklärt dadurch, daß die elektromagnetische Energie des Äthers Glieder enthält, die bezüglich der Stromstärken linear sind, wogegen die rein elektrodynamische Energie eine homogene quadratische Funktion der Stromstärken ist. Er nimmt nämlich an, das die Stromstärken die Änderungsgeschwindigkeiten zyklischer Koordinaten sind.

Da $\mathfrak{H}$ dadurch aus H entstanden ist, daß man darin die p'_b vermöge der Gleichungen 274) als Funktionen der p_h und p'_h ausgedrückt hat, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_h} = \frac{\partial H}{\partial p_h} + \sum_{b=1}^{b=\sigma} \frac{\partial H}{\partial p'_b} \frac{\partial p'_b}{\partial p_h}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_h} = \frac{\partial H}{\partial p'_h} + \sum_{b=1}^{b=\sigma} \frac{\partial H}{\partial p'_b} \frac{\partial p'_b}{\partial p'_h}$$

oder wegen der Gleichungen 274)

$$\frac{\partial H}{\partial p_h} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_h} - \sum_{b=1}^{b=\sigma} q_b \frac{\partial p'_b}{\partial p_h}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p'_h} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_h} - \sum_{b=1}^{b=\sigma} q_b \frac{\partial p'_b}{\partial p'_h}.$$

Setzt man daher

275) $$H' = \mathfrak{H} - \sum_{b=1}^{b=\sigma} q_b p'_b,$$

so wird

$$\frac{\partial H'}{\partial p_h} = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \qquad \frac{\partial H'}{\partial p'_h} = \frac{\partial H}{\partial p'_h}.$$

Hier sind in H' die p'_b durch die Gleichungen 274) eliminiert zu denken, bei Bildung von $\frac{\partial H}{\partial p_h}$ und $\frac{\partial H}{\partial p'_h}$ aber als

konstant zu betrachten. Die allgemeine Bewegungsgleichung 272) nimmt also, wenn man die p'_b mittels der Gleichungen 274) durch p_h und p'_h ausgedrückt denkt, für jedes p_h dieselbe Form

276) $$\mathfrak{P}_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial H'}{\partial p'_h} - \frac{\partial H'}{\partial p_h}$$

an. Nur ist für H nun die Größe H' zu setzen, in der die p'_b durch die Gleichungen 274) als Funktionen von p_h und p'_h ausgedrückt zu denken sind, so daß H' im allgemeinen eine nicht homogene quadratische Funktion der p'_h ist.

Als Beispiel betrachten wir nochmals die schon in § 22 behandelte Aufgabe aus der Theorie der Rotation eines festen Körpers um einen fixen Punkt. Ein starrer Körper sei um einen festen Punkt drehbar. Sein Trägheitsellipsoid bezüglich dieses Punktes sei ein Rotationsellipsoid.

Wir wählen dieselben Bezeichnungen wie dort und es falle wieder die $O\zeta$-Achse mit der Rotationsachse des Trägheitsellipsoides zusammen.

Dann erfüllt die Variable B die Bedingungen, die wir den jetzt mit p_b bezeichneten Koordinaten beilegten. Ist also die nach B wirkende generalisierte Kraft $\mathfrak{B}$ zu allen Zeiten gleich Null, so ist nach 274)

$$\frac{\partial H}{\partial p'_b} = \frac{\partial H}{\partial B'} = \frac{\partial T}{\partial B'} = \text{konst.}$$

Bezeichnen wir den Wert dieser Konstanten mit $-\nu J$, so folgt also aus der dritten der Gleichungen 121)

$$s A' - B' = \nu$$

übereinstimmend mit 124). Eliminiert man mittels dieser Gleichung B' aus dem Ausdrucke 123) für T, so folgt

277) $$H = T = \frac{G}{2}(\gamma^2 A'^2 + C'^2) + \frac{J}{2}\nu^2.$$

F ist in unseren gegenwärtigen Rechnungen die Kraftfunktion der inneren Kräfte des Systems, also, da dieses ein einziger fester Körper ist, gleich Null. Die Schwere oder allgemeiner die Kräfte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ werden als äußere Kräfte

angesehen und sind in den anderen Teil der Kraftfunktion $\sum_{h=1}^{h=s} \mathfrak{P}_h p_h$ (Gleichung 220) eingerechnet. H ist nämlich hier immer gleich $T - F$, nicht wie früher in diesem Buch gleich $T - V$.

Der Ausdruck 277) ist die in Gleichung 275) mit $\mathfrak{H}$ bezeichnete Größe. Aus dieser Gleichung folgt

278) $$H' = \mathfrak{H} + \nu J B' = \frac{G}{2}(\gamma^2 A'^2 + C'^2) + \nu J c A',$$

wobei die eine Konstante $-J\nu^2/2$ als überflüssig weggelassen wurde. Aus dieser Größe H' müssen die nach A und C wirkenden generalisierten Kräfte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ durch Gleichungen ableitbar sein, welche vollkommen die Form der Lagrangeschen haben. Es muß also

279) $$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial A'}\right) - \frac{\partial H'}{\partial A} \\ \mathfrak{C} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial C'}\right) - \frac{\partial H'}{\partial C} \end{aligned}\right.$$

sein. Durch Substitution des Wertes 278) für H' liefern diese Gleichungen tatsächlich in Übereinstimmung mit 125)

280) $$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{d}{dt}(G\gamma^2 A' + \nu J c) \\ \mathfrak{C} &= G(C'' - c\gamma A'^2) + J\nu\gamma A'. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen 279) haben vollkommen die Form der Lagrangeschen Gleichungen, aber H' enthält jetzt auch Glieder, die bezüglich der Geschwindigkeiten linear sind. Die Bewegungen können nicht in genau umgekehrter Weise vor sich gehen. Ein Pendel, mit dem ein rotierender Kreisel verbunden ist, hat, wie wir schon in § 22 sahen, für Schwingungen, bei denen sein Schwerpunkt sich im Kreise bewegt, bei der einen und anderen Umlaufsrichtung eine andere Schwingungsdauer, solange sich der Kreisel im selben Sinne dreht. Ganz analog enthält das Potential elektrischer Ströme bei Gegenwart permanenter Magnete, oder das von dem die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes abhängt, Glieder, die bezüg-

lich der Stromstärken oder Geschwindigkeiten linear sind. Diese frappante Analogie ist natürlich kein Beweis, daß bei den letztgenannten physikalischen Erscheinungen wirklich verborgene Rotationsbewegungen eine Rolle spielen; aber sie würde durch diese Hypothese am ungezwungensten erklärt und weist jedenfalls darauf hin, daß das vergleichende Studium beider Arten von Erscheinungen weitere Aufschlüsse verspricht. Der in dem eben behandelten Beispiele betrachtete feste Körper ist übrigens ein reines Monozykel, wenn die Kräfte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ stets gerade solche Werte haben, daß A und C sich sehr langsam im Vergleiche zu B ändern, sonst ein gemischtes.

Einen Fall, wo H eine noch kompliziertere Funktion der Geschwindigkeiten sein kann, findet Helmholtz in folgender Weise. Es soll der Ausdruck für die lebendige Kraft aus zwei Summanden bestehen, von denen der eine nur gewisse Geschwindigkeiten p'_c, der andere nur die übrigen Geschwindigkeiten p'_d enthalten soll, so daß also

$$\partial^2 T / \partial p'_c \partial p'_d = 0$$

ist. Da F die Geschwindigkeiten gar nicht enthält, so folgt auch

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p'_c \partial p'_d} = 0.$$

Außerdem soll die äußere Kraft, die nach jeder der Koordinaten p_d wirkt, zu allen Zeiten gleich Null, also $\mathfrak{P}_d = 0$ sein. Hier und in allem folgenden ist von keinen zyklischen Bewegungen mehr die Rede.

Es sind nun jedenfalls Bewegungen des Systems möglich, für welche alle p'_d verschwinden, daher alle p_d zu allen Zeiten konstant bleiben. Da H kein bezüglich irgend eines p'_d lineares Glied enthält, so ist dann auch für jeden Index d

281) $$\frac{\partial H}{\partial p'_d} = 0$$

und aus Gleichung 272) folgt für jeden Index d

282) $$\frac{\partial H}{\partial p_d} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen können, von singulären Fällen abgesehen, die Koordinaten p_d als Funktionen von p_e und p'_e gefunden werden. Substituiert man die so gewonnenen Werte der p_d in H, so erhält man eine Funktion der p_c und p'_c, welche mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet werden soll. $\mathfrak{H}$ braucht dann keine quadratische Funktion der p'_e zu sein, sondern kann diese Größen in ganz beliebiger Weise enthalten, jedoch wird es eine gerade Funktion der p'_e sein. Dann ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_e} = \frac{\partial H}{\partial p_e} + \sum_d \frac{\partial H}{\partial p_d} \frac{\partial p_d}{\partial p_e}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_e} = \frac{\partial H}{\partial p'_e} + \sum_d \frac{\partial H}{\partial p_d} \frac{\partial p_d}{\partial p'_e},$$

daher wegen 281) und 282)

283) $$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_e} = \frac{\partial H}{\partial p_e}, \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_e} = \frac{\partial H}{\partial p'_e}$$

und die Langrangeschen Gleichungen für die Koordinaten p_e erfahren keine Veränderung in der Form, wenn man darin $\mathfrak{H}$ für H einsetzt. Wenn aus dem Ausdrucke für H vermöge gewisser Bedingungsgleichungen gewisse Geschwindigkeiten eliminiert sind, so nennt Helmholtz das betreffende Problem ein unvollständiges, da es sich auf Berechnung der an diese Bedingungsgleichungen gebundenen Bewegungen beschränkt.

Wenn man zu physikalischen Vorgängen mechanische Analogien sucht, so kann man von vornherein nicht wissen, welche Variabeln man mit Koordinaten, welche mit Geschwindigkeiten in Parallele stehen soll. So kann man z. B. in der Elektrodynamik die dielektrischen Momente mit Koordinaten, die magnetischen mit Geschwindigkeiten und umgekehrt in Parallele stellen. Nun ist in der Physik in der Regel die Energie als Funktion der Variabeln experimentell gegeben. Ein vollständiges mechanisches Problem kann man daher als Analogie eines physikalischen Vorgangs nur dann benutzen, wenn der experimentell gegebene Ausdruck für die Energie von gewissen Variabeln eine homogene quadratische Funktion ist, welche dann mit Geschwindigkeiten

in Parallele gestellt werden müssen. Wählt man dagegen ein unvollständiges mechanisches Problem als Analogie, so kann es vollkommen zweifelhaft werden, welche physikalische Variabeln man mit Geschwindigkeiten und welche mit Koordinaten in Parallele setzen soll, da beide in beliebiger Form im Ausdrucke für die Energie enthalten sein können.

§ 54. Helmholtz' Reziprozitätssätze.

Diese Reziprozitätssätze beziehen sich nicht wie die Hertzschen auf Zykeln, sondern auf ganz beliebige mechanische Systeme. Jedesmal, wenn eine Gleichung von der Form 272) gilt, folgt daraus

$$284)\qquad \mathfrak{P}_h = -\frac{\partial H}{\partial p_h} + \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p_k} p'_k + \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k} p''_k .$$

Sind nach der im vorigen Paragraphen beschriebenen Methode gewisse Koordinaten eliminiert, so bleibt diese Gleichung unverändert gültig, wenn man unter H diejenige Funktion versteht, für welche eben die Bewegungsgleichungen die Lagrangesche Form annehmen, also die Größe H', wenn die Gleichungen 276) gelten, die Größe $\mathfrak{H}$, wenn die Gleichungen 283) gelten. Wir wollen in folgendem für alle diese Größen denselben Buchstaben H gebrauchen, da die Gleichung 284) und diejenigen, welche wir nun daraus entwickeln wollen, für alle diese Fälle gleichmäßig gelten.

1. Nach Gleichung 284) ist die äußere Kraft $\mathfrak{P}_h$, welche zu den durch die Kraftfunktion F bestimmten Kräften hinzukommen muß, um die gegebene zeitliche Veränderung der Koordinaten hervorzurufen, eine lineare Funktion der Beschleunigungen p''_k und man sieht sofort, daß

$$285)\qquad \frac{\partial \mathfrak{P}_h}{\partial p''_k} = \frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p''_h} = \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k}$$

ist. Wenn also bei Konstanz der Koordinaten, Geschwindigkeiten und übrigen Beschleunigungen ein Zuwachs einer Beschleunigung p''_k einen Zuwachs einer mit anderem Index versehenen äußeren Kraft $\mathfrak{P}_h$ bewirkt, so bewirkt der gleiche

Zuwachs der Beschleunigung p''_h, die derselben Koordinate wie die Kraft $\mathfrak{P}_h$ entspricht, einen gleichen Zuwachs der der anderen Koordinate entsprechenden Kraft $\mathfrak{P}_k$.

Beispiel. Aus der zweiten der Gleichungen 121) ist ersichtlich, daß die Beschleunigung B'' von Einfluß auf die Kraft $\mathfrak{A}$ ist. Daher muß auch A'' von Einfluß auf $\mathfrak{B}$ und $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial B''} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial A''}$ sein. Beide Werte ergeben sich aus 121) in der Tat gleich $- \sigma J$.

2. Aus Gleichung 284) folgt weiter:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p'_k} = - \frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p'_k} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p_k} + \sum_l \frac{\partial^3 H}{\partial p'_h \partial p'_k \partial p_l} p'_l + \sum_l \frac{\partial^3 H}{\partial p'_h \partial p'_k \partial p'_l} p''_l$$

oder wenn man die beiden letzten Summen so zusammenzieht, wie man es auch tun müßte, um von Gleichung 284) zu Gleichung 272) zurückzugelangen:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_h}{\partial p'_k} = - \frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p'_k} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k}\right).$$

Bildet man ebenso $\partial \mathfrak{P}_k / \partial p'_h$, so sieht man, daß in allen Fällen, wo $\partial^2 H / \partial p'_h \partial p'_k$ (was nach 285) gleich $\partial \mathfrak{P}_h / \partial p''_k$ und auch gleich $\partial \mathfrak{P}_k / \partial p''_h$ ist), konstant speziell, wo es gleich Null ist, die Gleichung besteht

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_h}{\partial p'_k} = - \frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p'_h}.$$

In allen diesen Fällen gilt also folgendes: Wenn eine größere Geschwindigkeit p'_k bei Gleichheit aller übrigen Geschwindigkeiten und der Werte aller Koordinaten und Beschleunigungen ein größeres $\mathfrak{P}_h$ bedingt, so bedingt eine größere Geschwindigkeit p'_k natürlich wieder bei Gleichheit der übrigen Geschwindigkeiten und der Koordinaten und Beschleunigungen ein im selben Maße kleineres $\mathfrak{P}_h$.

Beispiel. Wenn ein fester, um einen festen Punkt drehbarer Körper sich so bewegt, daß C, A' und B' konstant sind und B' groß gegenüber A' ist, so macht er eine einfache Präzessionsbewegung. Die nach der Koordinate C wirkende generalisierte Kraft $\mathfrak{C}$ (das Moment der äußeren

Kräfte um die Achse OR) muß dann von Null verschieden sein und zwar muß es für positive A' und B' negativ sein und sein Absolutwert mit wachsendem A' wachsen, sodaß $\partial \mathfrak{C} / \partial A'$ negativ ist. Wenn also $\mathfrak{C}$ durch die Schwere' erzeugt wird und OZ der Richtung derselben entgegengesetzt ist, so muß der Schwerpunkt auf der negativen $O\zeta$-Achse liegen. Ferner ist nach 121)

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial C''} = \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial A''} = 0.$$

Daher muß $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial C'}$ positiv und dem Zahlenwerte nach gleich $\partial \mathfrak{C} / \partial A'$ sein. Damit also ohne anderweitige Änderung der Verhältnisse C' von Null zu einem kleinen positiven Werte ansteige und diesen dann kurze Zeit konstant behalte, d. h. damit die positive $O\zeta$-Achse sinke, der Schwerpunkt also der Richtung der Schwere entgegen steige, ist ein Moment $\mathfrak{A}$ erforderlich, das in der Richtung der wachsenden A wirkt, also die Präzession zu beschleunigen sucht, was mit der Erfahrung stimmt. Natürlich ist dieser Beweis hier nur anwendbar, solange sich durch das Wachsen von C die übrigen Verhältnisse noch nicht geändert haben. Aus den Gleichungen 121) ergibt sich natürlich unmittelbar

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial C'} = -\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial A'}.$$

Ebenso ist

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial C'} = -\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial B'},$$

aber nicht

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial B'} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial A'}$$

wegen

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial B''} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial A''} = -cJ.$$

Bezüglich des Nachweises, daß sich dieser Satz auch auf allen jenen Gebieten der Wärme- und Elektrizitätslehre und Chemie bewährt, wo Gleichungen gelten, die mit den für verborgene Bewegungen geltenden mechanischen Gleichungen analog sind, muß hier auf die zitierte Originalabhandlung Helmholtz' verwiesen werden. Es sei hier

nur noch darauf hingewiesen, daß sich die Beziehung zwischen dem Prinzipe der kleinsten Wirkung und dem zweiten Hauptsatze auch insofern bewährt, als die meisten Relationen die man so erhält, sonst mittelst des zweiten Hauptsatzes bewiesen werden. (Beziehung zwischen Kompressionskoeffizient oder Elastizitätsmodul und Temperaturänderung bei Kompression oder Dehnung, Volumänderung beim Schmelzen und Schmelzpunktsänderung durch Druck, thermoelektromotorische Kraft und Peltierphänomen, Wärmeentwicklung in galvanischen Elementen und Abhängigkeit ihrer elektromotorischen Kraft von der Temperatur etc. etc. Ebenso muß ich bezüglich einer Reihe anderer Lehrsätze und Reziprozitäten sowie bezüglich der weiteren Anwendungen in der Wärmelehre und aller Anwendungen in der Elektrodynamik auf die Originalabhandlung verweisen, da sich dieselben zu weit vom Boden der reinen Mechanik entfernen.

V. Die Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichungen.

§ 55. Das Prinzip der variierenden Wirkung.

Wir kehren nun wieder zu dem ganz allgemeinen im § 30 betrachteten Falle zurück, haben aber die Absicht, die Art und Weise der Variation einer Reihe von neuen beschränkenden Bedingungen zu unterwerfen. Es soll ein holonomes System von n materiellen Punkten durch beliebige generalisierte Koordinaten $p_1, p_2 \ldots p_s$ bestimmt sein. Die lebendige Kraft T soll eine gegebene, die Zeit nicht enthaltende Funktion der Koordinaten und generalisierten Geschwindigkeiten (resp. der Koordinaten und Momente) sein; es soll eine Kraftfunktion V existieren, welche ebenfalls eine gegebene Funktion der Koordinaten sein soll und welche letztere die Zeit auch explizit enthalten kann. Die Zahl s der generalisierten Koordinaten

soll jedoch genau gleich der der Freiheitsgrade des Systems sein, so daß zwischen den generalisierten Koordinaten keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen. Es ist dies erforderlich, damit später die p_h^0 und p_h^1 unabhängig voneinander variiert werden können.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen 50) und 51) lauten dann wie folgt:

286) $$\frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial_{p'}(T-V)}{\partial p_h},$$

wobei

$$q_h = \frac{\partial T}{\partial p'_h} = \frac{\partial (T-V)}{\partial p'_h}.$$

Durch diese Gleichungen und die Werte p_h^0 und q_h^0, welche sämtliche Koordinaten und Momente zu einer bestimmten Zeit t_0, die wir jetzt immer den Zeitanfang nennen wollen, haben, ist eine bestimmte Bewegung eindeutig bestimmt, welche wir die unvariierte Bewegung nennen. Wir können für dieselbe die einer beliebigen Zeit t zugehörigen Werte der Koordinaten und Momente aus den Bewegungsgleichungen als Funktionen von t, p_h^0 und q_h^0 berechnen. Wir können auch die Werte, welche zur Zeit t die Größen T und V und somit auch den Wert, welchen das Integral

287) $$W = \int_{t_0}^{t} (T-V)\, dt$$

hat, als Funktion der $2s$ Anfangswerte p_h^0 und q_h^0 und der Zeit t berechnen. Es ist jetzt bequemer die obere Grenze nicht mit dem Index 1 zu versehen, sondern sie ebenso zu bezeichnen, wie die Variable t unter den Integralzeichen, nach welcher integriert wird, da die letztere bald in unseren Formeln nicht mehr vorkommen wird und es dann lästig wäre, den Index 1 immer mitzuschleppen.

Da wir die Bewegungsgleichungen als gegeben annehmen, so erhalten wir durch Integration derselben s Gleichungen, welche uns die s Werte der Koordinaten p_h als Funktionen der $2s + 1$ Werte von p_h^0, q_h^0 und t ausdrücken. Aus diesen s Gleichungen zwischen den $3s + 1$ Größen p_h^0, p_h, q_h^0 und t können wir die s Größen q_h^0 als Funktionen der $2s + 1$ Werte von p_h^0, p_h und t ausdrücken. Substituieren wir die

so erhaltenen Ausdrücke von q_h^0 in die Größe W, welche wir ja schon oben als Funktion der $2s + 1$ Größen p_h^0, q_h^0 und t ausgedrückt haben, so erhalten wir für W einen Ausdruck, welcher nur die $2s + 1$ Variabeln p_h^0, p_h und t enthält, so daß also W als Funktion dieser Variabeln dargestellt erscheint, was wir die Hamiltonsche Darstellungsweise nennen wollen.

Wir wollen nun wie bisher immer nebst dieser, der unvariierten Bewegung, eine von ihr unendlich wenig abweichende variierte Bewegung betrachten.

Über das Verhältnis der beiden Bewegungen machen wir jetzt die folgenden speziellen Voraussetzungen:

Der Zeitanfang t_0 soll für die variierte Bewegung, genau derselbe sein, d. h. die Funktion V soll, wenn sie die Zeit explizit enthält, zu Anfang der variierten Bewegung dieselbe Funktion der Koordinaten sein, wie zu Anfang der unvariierten. Sie soll auch zu jeder Zeit t der variierten Bewegung dieselbe Funktion der Koordinaten sein, wie zu derjenigen Zeit t der unvariierten Bewegung, welche vom Zeitanfang der unvariierten Bewegung ebensoweit absteht, wie die erstere Zeit t vom Zeitanfang der variierten Bewegung. Wir wollen die solchen Zeiten entsprechenden Zustände wieder korrespondierende nennen und sagen, der eine sei der Zustand der unvariierten, der andere der der variierten Bewegung, welcher zur Zeit t stattfindet.

Da wir vorläufig t_0 als absolut invariabel betrachten, so brauchten wir nirgends hervorzuheben, daß die betreffenden Größen auch Funktionen von t_0 sind.

Es sei hier noch die folgende Bemerkung beigefügt, die übrigens auch auf die in den vorigen Abschnitten behandelten Variationsprobleme Anwendung findet. Würde V die Zeit nicht explizit enthalten, so wäre die absolute Lage des Zeitpunktes t_0 in der Zeitreihe natürlich vollkommen gleichgültig. Diese absolute Lage t_0' in der Zeitreihe könnte für die variierte eine andere als die (t_0) für die unvariierte sein; es käme bloß darauf an, daß die Zeitabstände korrespondierender Zustände immer gleich wären, so daß, wenn irgend ein Zustand A der unvariierten Bewegung zur

Zeit t, und der korrespondierende Zustand B der variierten zur Zeit t' stattfände, $t' - t = t_0' - t_0$ wäre. Es würde dann t' die der Zeit t korrespondierende Zeit heißen. Doch ist die Vorstellung einfacher und nicht wesentlich verschieden, daß t' und t identische Zeiten sind; ebenso t_0' und t_0. Wir wollen uns daher immer dasselbe materielle System zur selben Zeit doppelt in zwei nahe gleichen Zuständen vorhanden denken, ohne daß das eine Exemplar des Systems das andere irgendwie beeinflußt.

Es soll nun gegenwärtig speziell die Variation so ausgeführt werden, daß nicht nur die Form der Funktionen T und V samt allen darin vorkommenden konstanten Parametern vollkommen unvariiert bleiben, sondern daß auch behufs Erzeugung der Variation der Bewegung nicht die mindesten Zusatzkräfte wirken, so daß die zu irgend einer Zeit der variierten Bewegung wirkenden Kräfte wieder genau gleich den partiellen Ableitungen derselben Funktion V nach den Koordinaten sein sollen und nur deshalb andere Werte haben können, weil die in diese partiellen Ableitungen zu substituierenden Werte der Koordinaten bei der variierten Bewegung etwas andere als im korrespondierenden Zustande der unvariierten Bewegung sind.

Die Variation des Integrales W soll also in diesem Paragraphen und im folgenden bloß durch drei Umstände bewirkt sein:

1. Sollen die Anfangswerte der Koordinaten für die variierte Bewegung etwas andere als für die unvariierte sein. Für die erstere soll der Anfangswert der h-ten Koordinate $p_h^0 + \delta p_h^0$, für die letztere p_h^0 sein.

2. Soll die obere Grenze des über die variierte Bewegung erstreckten Integrales W nicht die der oberen Grenze des über die unvariierte Bewegung erstreckten Integrales entsprechende Zeit t sein, sondern sie soll um δt weiter vom Zeitanfange abstehen als bei der unvariierten Bewegung.

3. Sollen die Anfangswerte der Momente für die variierte Bewegung ebenfalls etwas andere sein, als für die unvariierte. Der Anfangswert des h-ten Momentes soll für

die variierte Bewegung $q_h^0 + \delta q_h^0$, für die unvariierte Bewegung q_h^0 sein. Doch wollen wir nicht die Größen δq_h^0 in unsere Formeln einführen, sondern die Variationen δp_h der Endwerte der generalisierten Koordinaten. Unter δp_h verstehen wir die Größe, welche man zum Werte, den die h-te Koordinate bei der unvariierten, von den Anfangswerten p_h^0 und q_h^0 ausgehenden Bewegung zur Zeit t hat, hinzu addieren muß, um den Wert zu erhalten, den dieselbe Koordinate bei der variierten von den Anfangswerten $p_h^0 + \delta p_h^0$ und $q_h^0 + \delta q_h^0$ ausgehenden Bewegung zur Zeit $t + \delta t$ hat. Dagegen soll, wie schon bemerkt, die Beschaffenheit des materiellen Systems vollkommen unverändert bleiben, die Kraftfunktion soll dieselbe Funktion der Koordinaten und eventuell der Zeit bleiben und es sollen zu den durch sie bedingten Kräften keine neuen, noch auch irgendwelche andere äußere Einwirkungen hinzutreten.

Wir bezeichnen nun mit δW den Zuwachs, den W, also das Integral 287) dadurch erfährt, daß

1. die obere Grenze der Integration $t + \delta t$ statt t ist;

2. die Anfangswerte der Koordinaten $p_h^0 + \delta p_h^0$ statt p_h^0 sind, und

3. die Anfangswerte der Momente so gewählt sind, daß bei den neuen Anfangswerten der Koordinaten irgend eine, z. B. die h-te Koordinate zur Zeit $t + \delta t$ den Wert $p_h + \delta p_h$ hat, während sie bei der unvariierten, von den alten Anfangswerten ausgehenden Bewegung zur Zeit t den Wert p_h hatte.

Da die Gleichung 207) für jede beliebige Variation gilt, so muß sie auch für diesen speziellen Fall gelten. Welche Werte also auch immer δp_h^0, δp_h und δt haben mögen, man hat jedesmal

$$288)\qquad \delta W = -(T + V)\delta t + \sum_1^s {}^h (q_h \delta p_h - q_h^0 \delta p_h^0).$$

§ 56. Die beiden Hamiltonschen partiellen Differentialgleichungen.

Wir wollen nun unter den partiellen Differentialquotienten der Größe W, wenn wir nicht ausdrücklich sagen,

daß wir es anders meinen, immer diejenigen verstehen, welche man erhält, wenn man W in der Weise ausdrückt, welche wir die Hamiltonsche genannt haben, also als Funktion der p_h^0, p_h und der Zeit t, wobei wir die Abhängigkeit von t_0, da dieses immer als konstant betrachtet wird, nicht weiter berücksichtigen. Es ist also $\partial W / \partial t$ der durch den Zuwachs δt der Zeit dividierte Zuwachs $\delta_t W$ des W, welcher entsteht, wenn die obere Grenze des Integrales 287) um δt wächst, aber die Koordinatenwerte für die untere und obere Grenze dieselben bleiben, also $\delta p_h = \delta p_h^0 = 0$ ist. Dann erhält man aber aus der Gleichung 288)

289) $$\delta_t W = -(T + V)\delta t,$$

daher ist:

290) $$\frac{\partial W}{\partial t} = - T - V = - E,$$

was man als die erste Hamiltonsche partielle Differentialgleichung bezeichnet.[1])

Ebenso ist $\partial W / \partial p_h$ der durch den Zuwachs δp_h des für die obere Grenze des Integrales 287) geltenden Wertes der h-ten Koordinate dividierte Zuwachs $\delta_h W$ des W, welcher entsteht, wenn die beiden Grenzen des Integrales 287) sowie die Anfangswerte aller Koordinaten unverändert bleiben, die Anfangswerte der Momente aber sich so ändern, daß auch die für die obere Grenze des Integrales 287) geltenden Werte der Koordinaten alle bis auf p_h konstant bleiben. Dadurch erhält man aber aus Formel 288)

$$\delta_h W = q_h \delta p_h.$$

Es ist also

291) $$\frac{\partial W}{\partial p_h} = q_h.$$

Endlich findet man in gleicher Weise, indem man in Formel 288) alle Variationen gleich Null setzt, bis auf $d p_h^0$

292) $$\frac{\partial W}{\partial p_h^0} = - q_h^0.$$

---

[1]) Bei konstanten p_h^0 und q_h^0 wäre natürlich $\partial W / \partial t = T - V$.

Es mag hier nur beiläufig bemerkt werden, daß wir gerade so, wie wir bisher t_0 unverändert ließen und nur die obere Grenze t des Integrales 287) änderten, auch umgekehrt die obere Grenze konstant halten und t_0 verändern können, dann haben wir in W, das ja Funktion von t_0 und t ist, letzteres konstant zu lassen, so daß also bei konstantem t die Größe W als Funktion von t_0, p_h und p_h^0 auszudrücken ist. Dann folgt aus 207)

$$\frac{\partial W}{\partial t_0} = E_0, \tag{293}$$

was man die zweite Hamiltonsche partielle Differentialgleichung nennt. Die beiden Gleichungen $\partial W/\partial p_h = q_h$ und $\partial W/\partial p_h^0 = -q_h^0$ bleiben ungeändert, da daselbst t_0 und t konstant zu betrachten sind. In der Tat sind die $2s+2$ Größen t_0, t und die p_h^0 und p_h alle independent voneinander veränderlich. t_0 und t sind für jede Art der Bewegung ganz willkürlich. Sind dafür bestimmte Werte gewählt, so bestimmen die p_h^0 und p_h die Art der Bewegung, also die $2s$ Integrationskonstanten der Bewegungsgleichungen. Wenn nämlich die p_h als Funktionen von t und $2s$ Integrationskonstanten gegeben sind und man in die betreffenden Gleichungen einmal $t = t$, dann $t = t_0$ setzt, so erhält man $2s$ Gleichungen, aus denen jene $2s$ Integrationskonstanten als Funktionen von t, t_0 und den p_h und p_h^0 bestimmt werden können.

Wir wollen uns übrigens hier um diese zweite Hamiltonsche partielle Differentialgleichung nicht weiter kümmern, sondern zunächst bloß, um die Art der Bildung der hier vorkommenden partiellen Differentialquotienten zu illustrieren, die Gesetze der Bewegung eines freien materiellen Punktes von der Masse m im Raume, auf den gar keine Kräfte wirken, also das Trägheitsgesetz als bekannt voraussetzen und daran die Richtigkeit der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung 290), sowie der Gleichung 291) und 292) verifizieren.

Es seien p_1, p_2, p_3 die drei rechtwinkligen Koordinaten des Punktes, p'_1, p'_2, p'_3 die konstanten Komponenten seiner Geschwindigkeit in den drei Koordinatenrichtungen. Dann

ist, weil die Bewegung des Punktes geradlinig und gleichförmig ist:

$$294)\quad \begin{cases} p_1 = p'_1(t-t_0)+p_1^0, \quad p_2 = p'_2(t-t_0)+p_2^0, \\ p_3 = p'_3(t-t_0)+p_3^0, \end{cases}$$

ferner

$$295)\quad \begin{cases} T = \frac{m}{2}(p'^2_1+p'^2_2+p'^2_3) = \frac{m}{2(t-t_0)^2}[(p_1-p_1^0)^2 + \\ \qquad + (p_2-p_2^0)^2+(p_3-p_3^0)^2]. \end{cases}$$

V ist konstant, daher:

$$296)\quad W = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{m c^2}{2}-V\right)dt = \frac{m(t-t_0)}{2}(p'^2_1+p'^2_2+p'^2_3) - V(t-t_0).$$

Diese Größe muß erst als Funktion von t, p und p_0 ausgedrückt werden. Da:

$$297)\quad p'_1 = \frac{p_1-p_1^0}{t-t_0} \text{ etc.}$$

ist, so folgt:

$$298)\quad W = \frac{m}{2(t-t_0)}[(p_1-p_1^0)^2+(p_2-p_2^0)^2+(p_3-p_3^0)^2] - V(t-t_0).$$

Nun hat man nach den sieben als indenpendent zu betrachtenden Variabeln t, p und p^0 partiell zu differenzieren und erhält so

$$299)\quad \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{m}{2(t-t_0)^2}[(p_1-p_1^0)^2+(p_2-p_2^0)^2+(p_3-p_3^0)^2] - V.$$

Es ist also in der Tat die Gleichung 290) erfüllt. Ebenso ist gemäß der zweiten Hamiltonschen Differentialgleichung $\frac{\partial W}{\partial t_0} = T + V$. Ferner wird

$$300)\quad \frac{\partial W}{\partial p_1} = \frac{m(p_1-p_1^0)}{(t-t_0)} = m p'_1 = q_1$$

und ebenso sind die übrigen der Gleichungen 291) und 292) erfüllt. q_1 ist das Bewegungsmoment $m p'_1 = \partial T/\partial p'_1$, in welchem letzteren partiellen Differentialquotienten aber die p und p' als independente Variabeln zu gelten haben. q_1^0 ist wegen der Konstanz der Geschwindigkeitskomponenten gleich q_1.

§ 57. Anwendung der ersten Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung.

Wir haben in diesem Beispiele die Integrale der Bewegungsgleichungen als bekannt vorausgesetzt. Wo die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung praktisch zur Anwendung kommt, liegt die Sache natürlich anders. Da ist bloß T als Funktion der p und p', oder p und q, V aber als Funktion der p und eventuell der Zeit t gegeben. Die Integrale der Bewegungsgleichungen sind unbekannt. Man hat also zunächst, wenn T als Funktion von p und p' gegeben ist, durch partielle Differentiation nach den p' die Größen q zu bilden, dann diese statt der p' in T einzuführen, so daß jetzt T als Funktion von p und q erscheint. Darin hat man statt q_h zu substituieren $\partial W/\partial p_h$ und den so erhaltenen Wert von T in die erste Hamiltonsche partielle Differentialgleichung 290) zu substituieren. Die Form, welche diese dadurch annimmt, wollen wir symbolisch durch

$$301)\qquad \frac{\partial W}{\partial t} + T\left(\frac{\partial W}{\partial p_h}\right) + V = \frac{\partial W}{\partial t} + E\left(\frac{\partial W}{\partial p_h}\right) = 0$$

bezeichnen.

Dieselbe enthält in bekannter Weise die $s+1$ in dieser Differentialgleichung als die independenten zu betrachtenden Variabeln p und t und die partiellen Differentialquotienten der als Funktion dieser independenten zu suchenden Unbekannten W nach den independenten Variabeln und zwar den partiellen Differentialquotienten $\partial W/\partial t$ linear, von den übrigen partiellen Differentialquotienten $\partial W/\partial p_h$ aber die Quadrate und Produkte je zweier.

Alle diese Operationen kann man vornehmen, ohne die Integrale der Bewegungsgleichungen zu kennen. Um nun letztere zu finden, ist es durchaus nicht nötig, die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung aufzusuchen. Es genügt, wenn man sich in irgend einer Weise ein sogenanntes vollständiges Integral verschafft, d. h. eine Funktion der $s+1$ Variabeln p_h und t, welche der partiellen

Differentialgleichung genügt und genau so viele willkürliche voneinander unabhängige Konstanten enthält als partielle Differentialquotienten erster Ordnung in der Differentialgleichung vorkommen. Es kommen deren in unserer Differentialgleichung $s+1$ vor. Da aber die Unbekannte W undifferenziert in der Gleichung nicht vorkommt, so kommt eine Konstante jedenfalls additiv zu W hinzu und spielt später, da wir immer nur die Differentialquotienten von W brauchen, gar keine Rolle. Es genügt also eine Lösung der Differentialgleichung zu finden, welche s voneinander unabhängige willkürliche Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ enthält, von denen keine additiv zu W hinzutritt.

Wenn wir die mechanische Aufgabe vollständig gelöst hätten, so könnten wir W als Funktion von t, p_h, p_h^0 ausdrücken. Dieser Wert des W (er heiße W') wäre ein vollständiges Integral der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung 294), da er derselben genügt und die s willkürlichen voneinander unabhängigen Konstanten p_h^0 enthält, von denen keine additiv zu W hinzukommt. Denn für $t=t_0$ ist $W=0$.

Wir setzen nun allerdings voraus, daß wir die mechanische Aufgabe noch nicht gelöst haben. Wir kennen daher auch dieses eine vollständige Integral der Gleichung 294) nicht. Aber wir nehmen an, daß wir irgendwie ein anderes vollständiges Integral gefunden hätten, also eine die partielle Differentialgleichung 294) erfüllende Funktion von t, den p_h und noch s willkürlichen voneinander unabhängigen Konstanten α_h, von denen keine additiv zu dieser Funktion hinzukommt. Die Kenntnis dieses beliebigen anderen vollständigen Integrals genügt dann, um durch bloß partielle Differentiation s Gleichungen zu finden, aus denen die s unbekannten Variabeln so als Funktionen der Zeit und $2s$ unabhängiger Integrationskonstanten ausgedrückt werden können, daß sie die Bewegungsgleichungen 286) der mechanischen Aufgabe erfüllen, wodurch also die mechanische Aufgabe vollständig gelöst ist.

Wir wollen dieses andere noch um eine $(s+1)$-te Konstante α_0 vermehrte vollständige Integral augenblicklich

mit W'', später aber wieder mit W ohne Index bezeichnen. Die durch das Integral 287) definierte Wirkung W' für unser mechanisches Problem ist, als Funktion von t, p und p^0 ausgedrückt, ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung 301). W' verwandelt sich, wenn man die p durch p^0, q^0 und t ausdrückt, in eine Funktion von p^0, q^0 und t. Nimmt man an, jedes andere vollständige Integral W'' der partiellen Differentialgleichung 301) stelle dieselbe Wirkung dar, d. h. dieselbe Funktion der Zeit nur unter Einführung anderer Konstanten statt der Anfangswerte, so können die Integrationskonstanten des einen vollständigen Integrales nur Funktionen der Integrationskonstanten des anderen, also hier die p^0 nur Funktionen der α sein und es muß W' sich identisch in W'' verwandeln, wenn man für die p^0 darin diese Funktionen substituiert. Differenziert man das so erhaltene W'' partiell nach irgend einem α, z. B. nach α_h, so folgt:

302) $$\frac{\partial W''}{\partial \alpha_h} = \sum_1^s {}_i \frac{\partial W'}{\partial p_i^0} \frac{\partial p_i^0}{\partial \alpha_h}.$$

Nun können die $\frac{\partial p^0}{\partial \alpha}$ wieder nur die Integrationskonstanten enthalten. Ferner sind nach Gleichung 292) die $\frac{\partial W'}{\partial p^0}$ gleich den negativen q^0, also auch Integrationskonstanten. Es ist also die ganze rechte Seite der Gleichung 302) eine bloße Funktion der Integrationskonstanten; setzt man sie gleich β_h, so verwandelt sich die Gleichung 302) in

303) $$\frac{\partial W''}{\partial \alpha_h} = \beta_h,$$

welche Relation s Gleichungen darstellt, aus denen die s Größen p_h als Funktionen der Zeit und der $2s$ Integrationskonstanten α und β gefunden werden können, womit die Integrale der Gleichungen 286), also des mechanischen Problems gefunden sind. Berechnet man die p' und setzt in den betreffenden Gleichungen und den Gleichungen 303) $t = t_0$, so kann man leicht die α und β durch die p^0 und q^0 ausdrücken.

§ 58. Direkter Beweis der Richtigkeit der im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate.

Wir wollen im folgenden, ohne uns auf eine Diskussion einzulassen, welcher Ergänzungen die Schlußweise am Ende des vorigen Paragraphen bedürfte, bloß auf die einfachste Art beweisen, daß die in der beschriebenen Weise mittels der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung für die p_h gefundenen Funktionen der Zeit wirklich die gesuchte Lösung der mechanischen Aufgabe sind, und zwar wollen wir diesen Beweis nach dem Vorgange Jacobis liefern, indem wir durch nachträgliche Differentiation zeigen, daß die Funktionen der Zeit, welche wir nach unserer Methode für die p erhalten und welche auch die erforderliche Anzahl willkürlicher Konstanten enthalten, wirklich die Bewegungsgleichungen 286) erfüllen.

Wir müssen da bloß die partielle Differentialgleichung 294) als gegeben und ein vollständiges Integral W derselben mit s voneinander unabhängigen Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$, von denen keine additiv zu W hinzutritt, als gefunden betrachten. Wenn wir dann

304) $$\frac{\partial W}{\partial \alpha_h} = \beta_h, \quad h = 1, 2, \ldots s$$

setzen, so erhalten wir s Gleichungen, welche die Größen p_h als Funktionen von t und den Konstanten α_h und β_h bestimmen.

Von diesen Funktionen haben wir nachzuweisen, daß sie, was immer für Werte die Konstanten α_h und β_h haben mögen, immer den Bewegungsgleichungen 286) genügen. Unter q_h verstehen wir vorläufig nichts anderes als den partiellen Differentialquotienten des W nach p_h, wobei W als Funktion von t, der p_h und der α_h anzusehen ist. Die Gleichungen 291) sind also jetzt nicht als durch Rechnung gefundene Relationen, sondern vielmehr als die Definitionsgleichungen für die q anzusehen.

Der Annahme gemäß genügt W für alle möglichen Werte der Konstanten α_h der partiellen Differentialglei-

chung 301). Man kann daher diese Gleichung auch nach irgend einem α partiell differenzieren. Dabei wird die darin vorkommende Größe $q_h = \partial W / \partial p_h$ als Funktion von t, der p_h und der α_h zu betrachten sein. Man erhält also durch partielle Differentiation der Gleichung 301) nach α_h

305) $$\frac{\partial^2 W}{\partial t \, \partial \alpha_h} + \sum_1^s {}_i \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_h} = 0.$$

Die Differentialquotienten der p nach der Zeit, die wieder durch einen oben angehängten Strich markiert werden sollen, folgen durch Differentiation der Gleichung 303) nach der Zeit, die ja die Abhängigkeit der p von der Zeit angibt, wodurch man die mit den Gleichungen 304) identischen Gleichungen

304) $$\frac{\partial^2 W}{\partial t \, \partial \alpha_h} + \sum_1^s {}_i \frac{\partial^2 W}{\partial p_i \, \partial \alpha_h} p'_i = \frac{\partial^2 W}{\partial t \, \partial \alpha_h} + \sum_1^s {}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_h} p'_i = 0.$$

erhält, denen wir wieder die Nummer 304) geben. Diese Relation 304) repräsentiert uns s lineare Gleichungen für die Größen p'_i, welche daraus als Funktionen von t, p_h und α_h gefunden werden können, oder auch als Funktionen von t, α_h und β_h, da die p_h durch die Gleichungen 303) als Funktionen von α_h und β_h ausgedrückt werden können. Die Koeffizienten der p'_i und das von p'_i freie Glied in den Gleichungen 304) sind aber ganz dieselben, wie die Koeffizienten der Größen $\partial E / \partial q_i$ und das nicht mit diesen Größen multiplizierte Glied in den Gleichungen 305). Wenn man daher die letzteren Gleichungen als s lineare Gleichungen für die Größen $\partial E / \partial q_i$ auffaßt, so erhält man diese Größen genau durch dieselben Determinanten ausgedrückt, wie die Größen p'_i, wenn man letztere aus den s linearen Gleichungen 304) bestimmt. Wir sehen also, ohne daß wir alle diese Determinanten hinzuschreiben brauchen, ein, daß allgemein

306) $$p'_i = \frac{\partial E}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots s$$

sein muß. Differenzieren wir andererseits die Gleichung 291) nach der Zeit, so erhalten wir:

307)
$$\left\{\begin{aligned}\frac{d q_h}{d t} &= \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial p_h} + \sum_1^s{}_i \frac{\partial^2 W}{\partial p_h \partial p_i} p'_i \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial p_h} + \sum_1^s{}_i \frac{\partial q_i}{\partial p_h} \frac{\partial E}{\partial q_i}.\end{aligned}\right.$$

Andererseits ist die Gleichung 294) identisch erfüllt, wenn man darin W als Funktion von t, p_h und α_h substituiert und für die $q_h = \partial W / \partial p_h$ die in diesem Sinne genommenen partiellen Differentialquotienten einsetzt. Es muß daher auch der partielle Differentialquotient der linken Seite der Gleichung 294) nach p_h gleich Null sein, bei dessen Bildung man t und die α_h als konstant anzusehen, die q_h aber als Funktionen von t, p_h und α_h zu betrachten hat, so daß E in doppelter Weise zu differenzieren ist 1. weil es explizit die Größe p_h enthält, 2. weil die darin vorkommenden Größen q_i Funktionen von p_h sind. Setzt man den so gebildeten partiellen Differentialquotienten der Gleichung gleich Null, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial p_h} + \frac{\partial E}{\partial p_h} + \sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_h} = 0.$$

Subtrahiert man dies von der rechten Seite der Gleichung 307), so folgt

$$\frac{d q_h}{d t} = -\frac{\partial E}{\partial p_h} \qquad h = 1, 2, \ldots s.$$

Es ist also bewiesen, daß die Differentialquotienten der q_h nach der Zeit genau durch dieselben Gleichungen gegeben sind, welche für die mechanische Aufgabe gelten. Andererseits ist auch durch die Gleichungen 306) bewiesen, daß die p'_h aus E oder T (da ja

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

ist) in derselben Weise wie beim mechanischen Probleme zu bilden sind. Da sie also dieselben linearen Funktionen

der q_h sind wie beim mechanischen Probleme und da wir schon sahen, daß die Differentialquotienten der q_h nach der Zeit dieselben Werte wie beim mechanischen Probleme haben, so folgt hieraus, daß auch die Ableitungen der p'_k nach der Zeit dieselben Werte wie beim mechanischen Probleme haben, also durch die Gleichungen 286) bestimmt sind. Es ist somit ganz allgemein bewiesen, daß die durch die Gleichungen 304) als Funktionen der Zeit und der $2s$ Integrationskonstanten α_h und β_h bestimmten Werte der p_h die Integrale der mechanischen Differentialgleichungen sind.

Die Ausführungen des § 57 lassen wieder so recht deutlich die universelle Bedeutung des Energiebegriffs erkennen. Man braucht bloß die Energie als Funktion der Koordinaten und Momente zu kennen und man ist unter Beiziehung der erforderlichen Anfangsbedingungen ohne weiteres imstande, die zeitliche Veränderung aller Koordinaten zu berechnen, ohne daß man ihre geometrische Bedeutung zu wissen braucht. Dies folgt übrigens auch schon aus den Gleichungen 72).

Falls V die Zeit nicht explizit enthält, kann man diese Variable immer aus der partiellen Differentialgleichung 301) hinwegschaffen, indem man setzt

308) $$W = \alpha t + U,$$

wobei U nur Funktion der Koordinaten sein soll. Die Differentialgleichung 301) verwandelt sich dann in die folgende:

309) $$\alpha + E\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right) = 0,$$

wobei das Symbol $E\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)$ ausdrückt, daß man in die Funktion $E = T + V$ für q_h zu substituieren hat $\partial U/\partial p_h$.

§ 59. Berechnung der Wurfbewegung aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung als einfachstes illustrierendes Beispiel.

Wir wollen nun zunächst die Bedeutung dieser Formel an einem möglichst einfachen Beispiele erörtern. Wir nehmen an, daß uns die Gesetze der Wurfbewegung noch

unbekannt wären und daß wir dieselben aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung ableiten wollten. Es sei uns ein einziger vollkommen freier materieller Punkt mit der Masse m und den drei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gegeben, auf den nur die Schwerkraft wirkt. Die konstante Richtung dieser letzteren wählen wir als positive z-Achse und bezeichnen die ebenfalls konstante Beschleunigung der Schwere mit g. Dann ist:

$$s = 3, \quad p_1 = x, \quad p_2 = y, \quad p_3 = z.$$
$$V = - m g z,$$
$$q_1 = m x', \qquad q_2 = m y', \qquad q_3 = m z', \qquad T = \frac{1}{2m}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).$$

In den letzteren Ausdruck sind statt der q die partiellen Differentialquotienten von W, respektive wenn man, da V die Zeit nicht explizit enthält, die Gleichung 309) anwendet, von U nach den Koordinaten zu substituieren. Es wird also

$$E = T + V = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] - m g z$$

und die Gleichung 309) geht daher über in

310) $$\alpha + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] - m g z = 0,$$

wobei W gleich $\alpha t + U$ ist. Da es sich nur um die Auffindung eines vollständigen Integrales handelt, so wollen wir setzen: $U = U_1 + U_2 + U_3$, wobei U_1 nur Funktion von x, U_2 nur Funktion von y, U_3 nur Funktion von z sein soll. Die partiellen Differentialquotienten verwandeln sich dann in gewöhnliche und die Gleichung 310) geht über in

$$2\alpha m + \left(\frac{d U_1}{d x}\right)^2 + \left(\frac{d U_2}{d y}\right)^2 + \left(\frac{d U_3}{d z}\right)^2 - 2m^2 g z = 0,$$

welche sicher erfüllt ist, wenn wir setzen:

311) $$\left\{\begin{array}{l} \frac{d U_1}{d x} = \alpha_1, \quad \frac{d U_2}{d y} = \alpha_2, \quad \frac{d U_3}{d z} = \sqrt{\alpha_3 + 2m^2 g z} \\ \alpha = -\frac{1}{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3). \end{array}\right.$$

Aus den Gleichungen 311) folgt:

$$U_1 = \alpha_1 x + C_1, \qquad U_2 = \alpha_2 y + C_2$$
$$U_3 = \frac{1}{3m^2 g}\sqrt{\alpha_3 + 2m^2 g z}^{\,3} + C_3,$$

daher, da die Konstanten C_1, C_2, C_3 alle additiv zu W hinzukommen und deshalb weggelassen werden können

$$W = -\frac{t}{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3) + \alpha_1 x + \alpha_2 y +$$
$$+ \frac{1}{3m^2 g}\sqrt{\alpha_3 + 2m^2 g z}^{\,3}.$$

Setzen wir

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \frac{\beta_3}{m g},$$

so erhalten wir also die drei Bewegungsgleichungen in der Form:

$$x = \frac{\alpha_1}{m} t + \beta_1, \quad y = \frac{\alpha_2}{m} t + \beta_2,$$
$$z = g\frac{t^2}{2} + 2\beta_3 t + \alpha_4,$$

wobei

$$\alpha_4 = \frac{2\beta_3^2}{g} - \frac{\alpha_3}{2m^2 g}$$

eine einfachere statt α_3 eingeführte Konstante ist. Dies sind in der Tat die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen für einen geworfenen Körper und es sind auch

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \alpha_1, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \alpha_2, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = \sqrt{\alpha_3 + 2m^2 g z}$$

die Momente $m x'$, $m y'$ und $m z'$ bezüglich der Koordinatenachsen.

Wir wollen nun zu Fällen übergehen, wo die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung von wirklichem Nutzen ist, die also nicht mehr bloß den Charakter erläuternder Beispiele haben. Wir müssen da zunächst eine eigentümliche Art generalisierter Koordinaten, die sogenannten elliptischen, kennen lernen.

§ 60. Elliptische Koordinaten.

Es seien drei voneinander verschiedene positive, ein für allemal konstante Größen gegeben, deren größte wir mit a_1, deren mittlere mit a_2, deren kleinste wir mit a_3 bezeichnen, so daß also:

$$a_1 > a_2 > a_3.$$

Ferner seien x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im Raume. Wir denken uns für einen Augenblick auch diesen Größen x_1, x_2, x_3 bestimmte konstante endliche reelle, von Null verschiedene Werte erteilt. Dann wird der Ausdruck

$$\frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}$$

eine Funktion $\psi(\lambda)$ des Wertes von λ sein, den wir augenblicklich allein als variabel betrachten.

Wir wollen eine negative Größe als um so kleiner bezeichnen, je größer ihr Zahlenwert ist, was wir eine Ungleichheit mit Einrechnung des Vorzeichens nennen wollen. Dann wächst $\psi(\lambda)$ kontinuierlich von 0 bis $+\infty$, d. h. bis zu einem beliebig großen positiven Werte, wenn λ kontinuierlich von $+\infty$ bis $-a_3^2+\varepsilon$ abnimmt, wobei ε im folgenden immer eine positive Größe sein soll, deren Wert man so klein wählen kann, als man nur will. Es muß also für irgend einen zwischen diesen Grenzen liegenden Wert λ_3 von λ die Funktion $\psi(\lambda)$ gleich 1 werden.

$\psi(\lambda)$ wächst nochmals kontinuierlich von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn λ kontinuierlich von $-a_3^2-\varepsilon$ bis $-a_2^2+\varepsilon$ abnimmt. Für einen zwischen diesen Grenzen liegenden Wert λ_2 von λ muß also nochmals $\psi(\lambda)=1$ werden.

Endlich wächst $\psi(\lambda)$ zum zweiten Male von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn λ kontinuierlich von $-a_2^2-\varepsilon$ bis $-a_1^2+\varepsilon$ abnimmt. Zwischen diesen Grenzen liegt ein dritter Wert λ_1 von λ, für den nochmals $\psi(\lambda)$ gleich 1 wird, für $\lambda < -a_1^2$ bleibt $\psi(\lambda)$ negativ. Es hat also die Gleichung

312) $$\frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda} = 1,$$

welche sich durch Multiplikation mit $(a_1^2+\lambda)(a_2^2+\lambda)(a_3^2+\lambda)$ in eine gewöhnliche algebraische Gleichung dritten Grades verwandelt, stets drei reelle Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und es ist

313) $$+\infty > \lambda_3 > -a_3^2 > \lambda_2 > -a_2^2 > \lambda_1 > -a_1^2.$$

Wir heben noch folgende Spezialfälle hervor:

1. Wenn x_1 sich beliebig der Null nähert, so nähert sich λ_1 der Grenze $-a_1^2$, während sich λ_2 und λ_3 den beiden Wurzeln der Gleichung

$$314)\qquad \frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}=1$$

nähern. Wir wollen daher sagen, für $x_1=0$ ist $\lambda_1=-a_1^2$, λ_2 und λ_3 aber sind die Wurzeln der Gleichung 314), von denen man, wie oben, beweist, daß wenn x_2 und x_3 von Null verschieden sind, die eine zwischen $+\infty$ und $-a_3^2$, die andere zwischen $-a_3^2$ und $-a_2^2$ liegt. Wir wollen die erste mit λ_3, die zweite mit λ_2 bezeichnen.

2. Wenn sich x_2 der Null nähert, während x_1 und x_3 von Null verschieden sind, so nähert sich entweder λ_1 oder λ_2 der Grenze $-a_2^2$, je nachdem die kleinere Wurzel der Gleichung

$$315)\qquad \frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}=1$$

a) kleiner, b) größer als $-a_2^2$ ist. Wenn daher $x_2=0$, x_1 und x_3 aber von Null verschieden sind, so setzen wir im ersten Falle $\lambda_2=-a_2^2$, λ_1 gleich der kleineren dieser Wurzeln, im zweiten Falle $\lambda_1=-a_2^2$ und λ_2 gleich der kleineren dieser Wurzeln, wogegen λ_3 immer gleich der größeren Wurzel der Gleichung 315) zu setzen ist.

3. Ebenso ist, wenn $x_3=0$, x_1 und x_2 aber von Null verschieden sind, λ_2 oder $\lambda_3=-a_3^2$, λ_1 gleich der kleinsten Wurzel der Gleichung

$$316)\qquad \frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda}=1$$

und λ_3 oder λ_2 gleich der größeren Wurzel dieser Gleichung zu setzen, je nachdem dieselbe a) größer oder b) kleiner als $-a_3^2$ ist.

4. Ist $x_1=x_2=0$, so setzen wir:

$$\lambda_1=-a_1^2,\quad \lambda_2=-a_2^2,\quad \lambda_3=x_3^2-a_3^2.$$

5. Für $x_1=x_3=0$ wird:

$$\lambda_1=-a_1^2 \quad \text{und}$$

a) falls $x_2^2 < a_2^2 - a_3^2$:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = x_2^2 - a_2^2,$$

b) für $x_2^2 > a_2^2 - a_3^2$:

$$\lambda_3 = x_2^2 - a_2^2, \quad \lambda_2 = -a_3^2, \quad \text{endlich}$$

c) für $x_2^2 = a_2^2 - a_3^2$:

$$\lambda_3 = \lambda_2 = -a_3^2.$$

6) Für $x_2 = x_3 = 0$ wird

a) falls $x_1^2 > a_1^2 - a_3^2$:

$$\lambda_3 = x_1^2 - a_1^2, \quad \lambda_2 = -a_3^2, \quad \lambda_1 = -a_2^2,$$

b) für $x_1^2 = a_1^2 - a_3^2$:

$$\lambda_3 = \lambda_2 = -a_3^2, \quad \lambda_1 = -a_2^2,$$

c) für $a_1^2 - a_3^2 > x_1^2 > a_1^2 - a_2^2$:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = x_1^2 - a_1^2, \quad \lambda_1 = -a_2^2,$$

d) für $x_1^2 = a_1^2 - a_2^2$:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \lambda_1 = \lambda_2 = -a_2^2,$$

e) für $x_1^2 < a_1^2 - a_2^2$:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = -a_2^2, \quad \lambda_1 = x_1^2 - a_1^2.$$

7. Wenn sich endlich x_1, x_2 und x_3 gleichzeitig der Grenze Null nähern, so nähern sich λ_1, λ_2 und λ_3 gleichzeitig den Grenzen $-a_1^2$, $-a_2^2$ und $-a_3^2$, weshalb wir für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ setzen wollen:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = -a_2^2, \quad \lambda_1 = -a_1^2.$$

Falls mindestens eine der Koordinaten unendlich wird, setzen wir $\lambda_3 = \infty$. Wenn dann eine oder zwei der rechtwinkligen Koordinaten endlich oder unendlich niedrigerer Ordnung sind, so ist eines oder zwei der λ gleich einem a^2. Sind zwei rechtwinklige Koordinaten x_h und x_k untereinander von gleicher und von höherer Ordnung unendlich als die dritte, so folgt ein λ aus der Gleichung

$$317) \qquad \frac{x_h^2}{x_k^2} = -\frac{a_h^2 + \lambda}{a_k^2 + \lambda};$$

sind endlich alle drei rechtwinkligen Koordinaten unendlich von gleicher Größenordnung, so sind für λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$318)\qquad \frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}=0$$

zu wählen.

Nach diesen Festsetzungen gehört zu jeder Terne von reellen Werten der Koordinaten x_1, x_2, x_3 eine und nur eine bestimmte Terne von reellen Werten von λ_1, λ_2, λ_3, welche, falls keine der Koordinaten Null oder unendlich ist, den Ungleichungen 313) genügen. Lassen wir dagegen auch die Werte Null oder unendlich der Koordinaten zu, so genügen λ_1, λ_2, λ_3 Relationen, welche sonst mit den Ungleichungen 313) identisch sind, nur daß an Stelle jedes Ungleichheitszeichens das Ungleichheitszeichen oder Gleichheitszeichen stehen kann.

Die Relationen, welche hierdurch aus den Ungleichungen 313) entstehen, nennen wir die Relationen 313a).

Ebenso gehört zu jeder Terne von reellen Werten von λ_1, λ_2 und λ_3, welche den Ungleichungen 313) oder den Relationen 313a) genügen, eine und nur eine Terne, von reellen positiven Werten von x_1^2, x_2^2 und x_3^2; wenn an Stelle der Ungleichungen 313) die Relationen 313a) treten, werden auch die Werte Null und unendlich für jede der Koordinaten zulässig. Es sind also auch x_1, x_2 und x_3, folglich auch die Lage des Punktes, dessen Koordinaten x_1, x_2, x_3 sind, im Raume eindeutig bestimmt, sobald die zu x_1, x_2, x_3 gehörige Terne der Werte vou λ_1, λ_2, λ_3 und noch das Vorzeichen der Koordinaten gegeben ist.

Wir können daher als generalisierte Koordinaten, durch welche die Lage irgend eines Punktes im Raume bestimmt ist, die zu den rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 desselben gehörigen Werte von λ_1, λ_2 und λ_3 benutzen. Man nennt sie die elliptischen Koordinaten des betreffenden Punktes. Sie bestimmen die Lage desselben eindeutig, wenn noch das Vorzeichen der drei rechtwinkligen Koordinaten gegeben ist. Es sind also λ_1, λ_2, λ_3 eindeutige Funk-

tionen von x_1, x_2, x_3, umgekehrt sind x_1, x_2, x_3 Funktionen von λ_1, λ_2, λ_3, die durch die letzteren Variabeln bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt sind.

§ 61. Geometrische Bedeutung der elliptischen Koordinaten.

Wir wollen nun das bisher Gesagte geometrisch interpretieren. Wir betrachten da zunächst in Gleichung 312) nebst a_1, a_2, a_3, welche wie immer gegebene, ein für allemal konstante Größen sein sollen, auch λ konstant. Die Gleichung gibt uns dann eine Relation zwischen den Koordinaten x_1, x_2, x_3, welcher alle Punkte einer gewissen Zentralfläche F zweiten Grades genügen. Wir nennen sie die dem betreffenden λ entsprechende Fläche zweiten Grades. Da in der Gleichung 312) alle ungeraden Potenzen der Koordinaten fehlen, so ist der Koordinatenursprung immer ihr Mittelpunkt und die Koordinatenachsen sind ihre Achsen.

Sehr großen positiven Werten von λ entspricht sehr nahe eine Kugel von sehr großem Radius. Diese verwandelt sich, wenn λ bis $-a_3^2$ abnimmt, in ein immer kleiner werdendes dreiachsiges Ellipsoid, dessen größte Achse die Richtung der x_1-Achse, dessen kleinste die der x_3-Achse hat. Dasselbe nähert sich, je mehr sich λ der Grenze $-a_3^2$ nähert, immer mehr der Fläche einer in der $x_1 x_2$-Ebene liegenden Ellipse E, deren Achsen die Koordinatenachsen sind und deren Halbachsen gleich $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ und $\sqrt{a_2^2 - a_3^2}$ sind, welche also die Gleichungen hat:

$$319)\qquad \frac{x_1^2}{a_1^2 - a_3^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2 - a_3^2} = 1, \quad x_3 = 0.$$

Wenn man zuerst dem λ einen sehr großen positiven, dann einen um eine sehr kleine Größe ε kleineren, dann wieder einen um ε kleineren Wert etc. erteilt, so erhält man lauter dreiachsige Ellipsoide, von denen jedes ganz innerhalb der vorigen liegt; der Raum wird also in lauter unendlich dünne ellipsoidische Schalen zerlegt, welche den ganzen unendlichen Raum vollständig erfüllen.

Ist λ wenig kleiner als $-a_3^2$, so ist die Fläche F ein einschaliges Hyperboloid, welches noch fast mit demjenigen

Teile der $x_1 x_2$-Ebene zusammenfällt, welcher außerhalb der Ellipse E liegt. Daher können wir sagen, daß die Fläche F für den Fall $\lambda = -a_3^2$ in die $x_1 x_2$-Ebene degeneriert und wir werden nach dem früheren Übereinkommen λ, so lange es größer als $-a_3^2$ ist und auch noch so lange es einem Punkte des von der Ellipse E umschlossenen Stückes der $x_1 x_2$-Ebene entspricht, mit λ_3 bezeichnen. Sobald es gleich $-a_3^2$ ist, aber einem Punkte der $x_1 x_2$-Ebene entspricht, der außerhalb jener Ellipse liegt, oder sobald es zwischen $-a_3^2$ und $-a_2^2$ liegt, also einem einschaligen Hyperboloide entspricht, werden wir es mit λ_2 bezeichnen, wogegen auf dem Umfange der Ellipse $\lambda_3 = \lambda_2 = -a_3^2$ ist.

Nimmt nun λ, welches jetzt λ_2 heißt, von $-a_3^2$ bis $-a_2^2$ ab, so breitet sich das einschalige Hyperboloid aus und geht für $\lambda = -a_2^2$ in denjenigen zusammenhängenden Teil der $x_1 x_3$-Ebene über, welcher von den beiden Ästen A_h der Hyperbel

$$320)\qquad \frac{x_1^2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_2^2 - a_3^2} = 1, \quad x_2 = 0$$

begrenzt ist, für welchen also $\frac{x_1^2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_2^2 - a_3^2} < 1$ ist. Auf diesem Teile der $x_1 x_3$-Ebene ist λ noch mit λ_2 zu bezeichnen. Der andere Teil der $x_1 x_3$-Ebene, für welchen λ ebenfalls gleich $-a_2^2$ ist, aber schon mit λ_1 bezeichnet werden soll, ist die Grenze der zweischaligen Hyperboloide, in welche die Fläche F übergeht, sobald $\lambda < -a_2^2$ wird. Nähert sich λ dem Werte $-a_1^2$, so nähern sich beide Schalen dieser Hyperboloide von beiden Seiten immer mehr der gesamten $x_2 x_3$-Ebene.

Alle die einschaligen Hyperboloide, welche man erhält, wenn man

$$\lambda = -a_3^2 - \varepsilon, \quad \lambda = -a_3^2 - 2\varepsilon \ldots \lambda = -a_2^2$$

setzt und von denen wieder jedes folgende das vorhergehende nirgends schneidet, aber ihm überall unendlich nahe liegt, erfüllen wieder den ganzen unendlichen Raum kontinuierlich und zerlegen jede der früher besprochenen ellipsoidischen Schichten in lauter Ringe von unendlich kleinem Querschnitte.

Alle zweischaligen Hyperboloide endlich, welche den Werten $\lambda = -a_2^2 - \varepsilon,\ -a_2^2 - 2\varepsilon \ldots -a_1^2$ entsprechen, erfüllen noch einmal in derselben Weise den ganzen unendlichen Raum kontinuierlich und zerlegen jeden der besprochenen Ringe in lauter unendlich kleine Volumelemente. Diese Volumelemente sind rechtwinklige Parallelepipede, da sich, wie wir sofort beweisen werden, je ein Ellipsoid, je ein einschaliges und je ein zweischaliges Hyperboloid immer rechtwinklig durchschneiden.

Alle diese Formen, welche die Fläche F der Reihe nach annimmt, sind (die Fälle ausgenommen, wo sie in eine ebene Fläche degeneriert) konzentrische und koaxiale Flächen zweiten Grades, d. h. sie haben alle denselben Mittelpunkt (den Koordinatenursprung), und gleichgerichtete Achsen (die Koordinatenachsen). Sie sind auch konfokal, d. h. alle Kegelschnittlinien, in welchen sie durch die $x_1 x_2$-Ebene geschnitten werden, haben dieselben Brennpunkte, ebenso haben alle Kegelschnittlinien, in welchen sie durch die $x_1 x_3$-Ebene geschnitten werden, untereinander und alle, in welchen sie durch die $x_2 x_3$-Ebene geschnitten werden, wieder untereinander dieselben Brennpunkte.

Für die Schnitte mit der $x_1 x_2$-Ebene liegen die Brennpunkte auf der x_1-Achse in der Entfernung $\sqrt{a_1^2 - a_2^2}$ vom Koordinatenursprunge O, für die Schnitte mit der $x_1 x_3$-Ebene ebenfalls auf der x_1-Achse in der Entfernung $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ von O, für die Schnitte mit der $x_2 x_3$-Ebene auf der x_2-Achse in der Entfernung $\sqrt{a_2^2 - a_3^2}$ von O.

Man sieht dies leicht ein, wenn man bedenkt, daß, wenn A und B beliebige positive oder negative Konstanten sind und mit Einrechnung des Vorzeichens $A > B$ ist, die beiden Brennpunkte der Kegelschnittlinie, welche die Gleichung $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ hat, auf der x-Achse in der Entfernung $\sqrt{A - B}$ vom Koordinatenursprunge liegen. Dies gilt sowohl, wenn A und B positiv sind, also die Kegelschnittlinie eine Ellipse ist, als auch wenn A positiv, dagegen B negativ ist, also die Kegelschnittlinie eine Hyperbel ist. Ja selbst wenn A und B beide negativ sind, also die Kegelschnitt-

linie ganz imaginär wird, was bei den Durchschnittslinien der oben betrachteten zweischaligen Hyperboloide mit der $x_2 x_3$ Ebene zutrifft, pflegt man diese Punkte noch immer ihre Brennpunkte zu nennen und zu sagen, daß diese reell bleiben.

Den drei Werten des λ, welche den Koordinaten eines gegebenen Punktes entsprechen und also gegenwärtig von uns als dessen generalisierte Koordinaten bezeichnet werden, entsprechen also immer drei konzentrische, koaxiale, homofokale Flächen zweiten Grades, ein dreiachsiges Ellipsoid, ein einschaliges und zweifächeriges Hyperboloid, welche sich, da die Koordinaten des gegebenen Punktes die Gleichung jeder der drei Flächen erfüllen, in dem gegebenen Punkte schneiden.

Falls eine oder zwei oder alle drei Koordinaten Null werden, degenerieren eine oder zwei oder alle drei Flächen

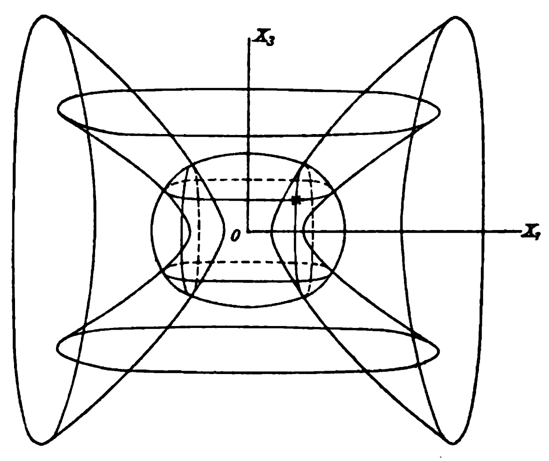


Fig. 8.

in eine oder in einen Teil einer der Koordinatenebenen. Falls mindestens eine der Koordinaten unendlich ist, degeneriert das Ellipsoid in eine Kugel von unendlichem Radius.

In Fig. 8 ist das Ellipsoid und das ein- und zweifächerige Hyperboloid (perspektivisch freilich nicht ganz

richtig) gezeichnet, welche sich in dem mit einem Kreuze markierten beliebigen Punkte des Raumes durchschneiden. Auch sind die Durchschnittslinien der beiden Hyperboloide mit dem Ellipsoide gezeichnet. Wenn man diese Figur betrachtet, kann man sich leicht klar machen, wie die verschiedenen Flächen degenerieren, wenn gewisse Koordinaten des Durchschnittspunktes Null oder unendlich werden.

§ 62. Die elliptischen Koordinaten sind orthogonal.

λ_3 ist die größte Wurzel der Gleichung 312), kann also als eine Funktion von x_1, x_2, x_3 (sagen wir $f(x_1, x_2, x_3)$) betrachtet werden, welche man z. B. mittels der Cardanischen Formel explizit hinschreiben könnte, da ja die Gleichung 312) eine Gleichung dritten Grades für λ ist.

Lassen wir in dieser Funktion x_2 und x_3 konstant und betrachten bloß x_1 als veränderlich, so können wir ihren partiellen Differentialquotienten $\partial \lambda_3 / \partial x_1$ bilden. Dieser wird am besten in folgender Weise gefunden: Da λ_3 Wurzel der Gleichung 312) ist, so hat man:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda_3} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda_3} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda_3} = 1.$$

Läßt man darin x_2 und x_3 konstant, so folgt:

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1} = \frac{2}{\Delta_3^2} \frac{x_1}{a_1^2 + \lambda_3}.$$

Die analogen Gleichungen, welche man erhält, wenn man λ_3 nach x_2, x_3 und λ_2 und λ_1 nach allen x partiell differenziert, kann man in die Form

321) $$\frac{\partial \lambda_h}{\partial x_i} = \frac{2 x_i}{\Delta_h^2 (a_i^2 + \lambda_h)}$$

zusammenfassen, wobei sowohl i als auch h unabhängig voneinander jeden der drei Werte 1, 2 oder 3 haben können. Δ ist dabei eine abgekürzte Bezeichnung und es ist allgemein

322) $$\Delta_h = \sqrt{\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)^2}},$$

wobei wir immer das positive Zeichen der Wurzel wählen wollen. Der Index i unter dem Summenzeichen hat, wie hier immer die Bedeutung, daß dem i alle drei Werte 1, 2 und 3 zu erteilen sind, wogegen dem h ein bestimmter dieser drei Werte zu geben ist, gleichgültig welcher.

Die Gleichung des durch einen gegebenen Punkt gehenden dreiachsigen Ellipsoids finden wir, wenn wir die soeben mit $f(x_1, x_2, x_3)$ bezeichnete Funktion, welche uns λ_3 durch x_1, x_2, x_3 ausdrückt, gleich einer Konstanten, nämlich gleich dem diesem Punkte entsprechenden speziellen Werte von λ_3 setzen. Die Richtungskosinus der an dieses Ellipsoid im gegebenen Punkte errichteten Normalen N_3 sind daher nach den bekannten Formeln für die Richtungskosinus der an eine Fläche mit der Gleichung $f(x_1, x_2, x_3)$ = konst. gezogenen Normalen

$$\cos(N_3, x_1) = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1},$$
$$\cos(N_3, x_2) = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2},$$
$$\cos(N_3, x_3) = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

wobei n die positive Wurzel aus

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2$$

ist. Dabei sind die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ etc. so zu verstehen: es ist λ_3 als Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ von x_1, x_2, x_3 auszudrücken und dann, bei konstantem x_2 und x_3 nach x_1 zu differenzieren etc. Es ist also $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ etc. genau dasselbe, was wir in den Formeln 321) mit $\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_2}$ etc. bezeichneten. Wenn wir daher zu dieser Bezeichnungsweise zurückkehren, so erhalten wir

$$\cos(N_3, x_1) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_3}\right)^2}} \cdot \frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}$$

und nach Substitution der Werte 321) und 322)

$$\cos(N_3, x_1) = \frac{1}{\Delta_3^2}\,\frac{x_1}{a_1^2 + \lambda_3}.$$

Ebenso folgt:

$$\cos(N_3, x_2) = \frac{1}{\Delta_3^2}\,\frac{x_2}{a_2^2 + \lambda_3},$$

$$\cos(N_3, x_3) = \frac{1}{\Delta_3^2}\,\frac{x_3}{a_3^2 + \lambda_3}.$$

Die Gleichung des einschaligen, durch denselben Punkt mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 gehenden Hyperboloids erhalten wir in gleicher Weise, wenn wir zuerst die mittlere Wurzel λ_2 der Gleichung 312) als Funktion φ von x_1, x_2, x_3 ausdrücken und dann diese Funktion φ gleich dem dem betreffenden Punkte entsprechenden Werte von λ_2 setzen. Die Richtungskosinus der im selben Punkt an das einschalige Hyperboloid errichteten Normalen N_2 sind dann wieder den Größen $\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_3}$ proportional und analoges gilt für die Normale N_1, die man durch denselben Punkt mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 zu dem durch diesen Punkt gehenden zweifächerigen Hyperboloide ziehen kann. Die Formeln, welche man für die Richtungskosinus aller dieser Normalen erhält, kann man in die Formel zusammenfassen:

323) $$\cos(N_h, x_i) = \frac{1}{\Delta_h^2}\,\frac{x_i}{a_i^2 + \lambda_h}.$$

Der Kosinus des Winkels, welchen irgend zwei (N_h und N_{h+1}) von diesen drei Normalen miteinander einschließen, ist daher

$$\cos(N_h, N_{h+1}) = \cos(N_h, x_1)\cos(N_{h+1}, x_1) +$$
$$+ \cos(N_h, x_2)\cos(N_{h+1}, x_2) + \cos(N_h, x_3)\cos(N_{h+1}, x_3) =$$
$$= \frac{1}{\Delta_h^2 \Delta_{h+1}^2}\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)(a_i^2 + \lambda_{h+1})}.$$

Nun ist aber

$$\frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)(a_i^2 + \lambda_{h+1})} = \frac{1}{\lambda_h - \lambda_{h+1}}\left(\frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda_{h+1}} - \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda_h}\right),$$

daher

$$\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2+\lambda_h)(a_i^2+\lambda_{h+1})} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_h - \lambda_{h+1}} \left[\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2+\lambda_{h+1}} - \sum \frac{x_i^2}{a_i^2+\lambda_h} \right].$$

In diesen Formeln kann h jeden beliebigen der Werte 1, 2 oder 3 annehmen, im letzteren Falle aber müssen wir den Index 4 immer als gleichbedeutend mit dem Index 1 betrachten. Wir wollen in allen analogen Formeln auch den Index 5 mit dem Index 2 etc., d. h. also alle Mod. drei kongruenten Zahlen, wenn sie im Index stehen, als gleichbedeutend betrachten. Der Punkt mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3, in welchem die beiden Normalen N_h und N_{h+1} errichtet sind, gehört beiden Zentralflächen zweiten Grades, zu denen diese beiden Normalen gezogen sind, an; daher müssen seine Koordinaten die Gleichung jeder dieser Zentralflächen erfüllen, es haben also beide Summen in der eckigen Klammer der rechten Seite der letzten Gleichung den Wert 1. Diese eckige Klammer reduziert sich auf Null und man erhält:

324) $$\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2+\lambda_h)(a_1^2+\lambda_{h+1})} = 0,$$

daher auch:

325) $$\cos(N_h, N_{h+1}) = 0.$$

Alle drei Zentralflächen zweiten Grades durchschneiden sich daher in jedem Punkte rechtwinklig. Die Transformation in elliptischen Koordinaten ist eine Orthogonale. Man nennt die Einführung von $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_2, x_3)$, $f_3(x_1, x_2, x_3)$ statt x_1, x_2, x_3 als Koordinaten orthogonal, sobald sich die drei Flächen, welche man erhält, wenn man f_1, f_2 und f_3 gleich drei beliebigen Konstanten setzt, immer rechtwinklig durchschneiden.

§ 63. Ausdruck der rechtwinkligen Koordinaten durch die elliptische.

Wir wollen nun die umgekehrte Aufgabe in Angriff nehmen, wenn λ_1, λ_2 und λ_3 gegeben sind, die dazu gehörigen Werte von x_1, x_2, x_3 als Funktionen von λ_1, λ_2, λ_3 und

natürlich der immer konstant betrachteten Größen a_1, a_2, a_3 zu berechnen. Wir denken uns zunächst noch den drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 bestimmte konstante Werte, dem λ dagegen einen ganz beliebigen Wert beigelegt, so daß in dem Ausdrucke

326) $$\varphi(\lambda) = \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} - 1$$

zunächst λ allein als variabel betrachtet wird. Wir setzen ferner

327) $$f(\lambda) = (a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)\varphi(\lambda).$$

Dann ist $f(\lambda)$ eine ganze Funktion dritten Grades bezüglich λ und die immer mit λ_1, λ_2, λ_3 bezeichneten Größen sind die Wurzeln der Gleichung $f(\lambda) = 0$. Nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Gleichungen ist also:

328) $$f(\lambda) = A(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).$$

Setzt man hier für $f(\lambda)$ den Wert 327) ein, wobei für $\varphi(\lambda)$ noch der Wert 326) zu substituieren ist, folgt so $A = -1$, da der Koeffizient von λ^3 beiderseits gleich sein muß und man erhält:

329) $$\left\{\begin{array}{l} x_1^2(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda) + x_2^2(a_1^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda) + x_3^2(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda) \\ - (a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\lambda_3 - \lambda). \end{array}\right.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Wert von λ; es ist eine identische Gleichung, wenn man darin für λ_1, λ_2, λ_3 deren Werte als Funktionen von x_1, x_2, x_3, oder umgekehrt für x_1, x_2, x_3 deren Werte als Funktionen von λ_1, λ_2, λ_3 substituiert. Obige Gleichung bleibt also stets richtig, was immer man für λ für einen Wert substituieren mag.

Setzt man darin $\lambda = -a_1^2$, so erhält man:

330) $$x_1^2 = \frac{(a_1^2 + \lambda_1)(a_1^2 + \lambda_2)(a_1^2 + \lambda_3)}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)}.$$

Setzt man dagegen in die Gleichung 329) $\lambda = -a_2^2$, so folgt:

331) $$x_2^2 = \frac{(a_2^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_3)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - a_3^2)}.$$

Setzt man endlich $\lambda = -a_3^2$, so folgt:

332) $$x_3^2 = \frac{(a_3^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_3)}{(a_3^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_2^2)}.$$

Wir wollen nun allen drei Größen λ_1, λ_2 und λ_3 willkürliche unendlich kleine Zuwächse $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$ erteilen. Die dadurch entstehenden Zuwächse x_1, x_2, x_3 nennen wir deren vollständige Differentiale. Wir finden sie am leichtesten, wenn wir von der linken und rechten Seite der Gleichungen 330) den natürlichen Logarithmus nehmen und dann die vollständigen Differentiale dieser beiden Logarithmen gleich setzen. Ebenso verfahren wir mit Gleichung 331) und 332). Es folgen dann drei Gleichungen, welche wir in die gemeinsame Form

$$333)\qquad d x_i = \sum^h \frac{x_i\, d\lambda_h}{2(a_i^2 + \lambda_h)}$$

zusammenfassen können. Wir wollen in der letzten Gleichung zuerst $i = 1$, dann $i = 2$, dann $i = 3$ setzen, jede so erhaltene Gleichung quadrieren und dann die quadrierten Gleichungen addieren. Wir bekommen dann links den Ausdruck $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_i dx_i^2$, den wir kürzer mit ds^2 bezeichnen wollen. Auf der rechten Seite verschwinden die Koeffizienten von

$$d\lambda_1 . d\lambda_2, \quad d\lambda_1 . d\lambda_3 \text{ und } d\lambda_2 . d\lambda_3,$$

da dieselben genau gleich der Hälfte der Ausdrücke werden, welche in den Gleichungen 324) auf der linken Seite stehen, und vermöge dieser Gleichungen verschwinden. Der Koeffizient von $d\lambda_h^2$ aber wird gleich dem vierten Teile des Quadrates des in Gleichung 322) mit Δ_h bezeichneten Ausdrucks. Man erhält also:

$$334)\quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \tfrac{1}{4}(\Delta_1^2\, d\lambda_1^2 + \Delta_2^2\, d\lambda_2^2 + \Delta_3^2\, d\lambda_3^2).$$

In dem Ausdrucke, wie er durch Gleichung 322) gegeben ist, kommen sowohl die x_1, x_2, x_3 als auch die λ_1, λ_2, λ_3 vor; den Ausdruck, welchen man für Δ_h erhält, wenn man darin x_1, x_2, x_3 ebenfalls durch die λ ausdrückt, so daß nur mehr die letzteren Variabeln in Δ_h vorkommen, erhält man am kürzesten in folgender Weise.

Man betrachtet wieder in der durch die Gleichung 326) gegebenen Funktion $\varphi(\lambda)$ die Größen x_1, x_2, x_3, daher auch

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als konstant, die Größe λ dagegen als in beliebiger Weise veränderlich. Den Ausdruck, welchen man erhält, wenn man unter diesen Voraussetzungen den Differentialquotienten $-\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}$ bildet und darin nach geschehener Differentiation $\lambda = \lambda_1$ setzt, bezeichnen wir mit $-\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1}$. Er ist genau gleich Δ_1^2, wie man sofort aus Gleichung 322) erkennt, wenn man darin $h = 1$ setzt. Ebenso ist

$$-\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_2} = \Delta_2^2, \quad -\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_3} = \Delta_3^2,$$

wobei die den eckigen Klammern unten angehängten Indizes die analoge Bedeutung haben.

Nun ist, wie wir sahen, in Gleichung 328) der Koeffizient $A = -1$. Substituiert man den betreffenden Wert von $f(\lambda)$ in die Gleichung 327), so folgt:

$$\varphi(\lambda) = \frac{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)}{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3 + \lambda)}.$$

Bei der partiellen Differentiation nach λ sind x_1, x_2, x_3, daher auch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, welche ja Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind, als konstant zu betrachten; es ist also

$$-\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)}{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)}$$

mehr noch einer Reihe von Gliedern, von denen aber jedes für $\lambda = \lambda_1$ verschwindet. Es ist also:

$$-\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial (\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_1} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}{(a_1^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_1)}.$$

Diese Größe ist aber, wie wir sahen, gleich Δ_1^2. Bestimmt man in derselben Weise Δ_2^2 und Δ_3^2, so erhält man drei Formeln, welche man in die folgende Form zusammenfassen kann:

335) $$\Delta_h = \sqrt{\frac{(\lambda_h - \lambda_{h+1})(\lambda_h - \lambda_{h+2})}{(a_1^2 + \lambda_h)(a_2^2 + \lambda_h)(a_3^2 + \lambda_h)}}.$$

Aus den Gleichungen 333) ergeben sich natürlich sofort die partiellen Differentialquotienten von x_1, x_2 oder x_3 nach

λ_1, λ_2 oder λ_3, wenn man erstere Größen als Funktion der letzteren auffaßt, z. B. die nach λ_1, indem man $d\lambda_2 = d\lambda_3 = 0$ setzt. Alle diesbezüglichen partiellen Differentialquotienten kann man in die eine Form zusammenfassen

336) $$\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_h} = \frac{x_i}{2(a_i^2 + \lambda_h)},$$

wobei jeder der Indizes i und h unabhängig von dem anderen die Werte 1, 2 oder 3 annehmen kann. Vergleicht man dies noch mit der Formel 321), so kann man auch schreiben

337) $$\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_h} = \tfrac{1}{4} \Delta_h^2 \frac{\partial \lambda_h}{\partial x_i},$$

wo links die x als Funktionen der λ, rechts umgekehrt die λ als Funktionen der x zu betrachten sind. Die Gleichung 324) kann daher mit Rücksicht auf die Gleichungen 336) und 321) entweder in der Form

338) $$\sum^i \frac{\partial \lambda_h}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_{h+1}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum^i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_h} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_{h+1}} = 0$$

geschrieben werden, wobei wieder im Index alle Mod. 3 kongruenten Zahlen als gleichbedeutend zu betrachten sind. Da die Richtungskosinus der Normalen, die wir im vorigen Paragraphen mit N_h bezeichneten, den Größen $\frac{\partial \lambda_h}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \lambda_h}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \lambda_h}{\partial x_3}$ proportional sind, so sind die linksstehenden der Relationen 338) nur die bekannten Gleichungen

$$\sum^i \cos(N_h, x_i) \cos(N_{h+1}, x_i) = 0,$$

welche ausdrücken, daß sich die Flächen zweiten Grades orthogonal schneiden. Analog sind die rechtsstehenden Relationen mit dem Gleichungen

$$\sum^i \cos(N_i, x_h) \cos(N_i, x_{h+1}) = 0$$

identisch.

Wir wollen nun mit A einen beliebigen Punkt des Raumes bezeichnen, der die rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 und die elliptischen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 hat.

Ferner sei B der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ und den dazu gehörigen elliptischen Koordinaten $\lambda_1 + d\lambda_1$, $\lambda_2 + d\lambda_2$, $\lambda_3 + d\lambda_3$, wobei dx_1, dx_2, dx_3 willkürlich sein können. Es sind dann $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$ die entsprechenden Zuwächse der elliptischen Koordinaten. Es können aber auch $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$ als willkürlich betrachtet werden, dann sind dx_1, dx_2, dx_3 die dazu gehörigen Zuwächse der rechtwinkligen Koordinaten.

Die in Formel 334) mit ds bezeichnete Größe ist dann die Entfernung der beiden Punkte A und B. Diese Formel stellt also die Länge eines willkürlich im Raume gezogenen Linienelementes dar. Wenn speziell der Punkt B auf demselben einschaligen und zweischaligen Hyperboloide wie der Punkt A liegt und nur das Ellipsoid, welches durch B geht, dem Werte $\lambda_3 + d\lambda_3$ von λ_3 entspricht, während das Ellipsoid, welches durch den Punkt A geht, dem Werte λ_3 entspricht, so wollen wir dem Punkte B den Index 3 anhängen und seine Entfernung AB_3 vom Punkte A mit ds_3 bezeichnen. In diesem Falle ist $d\lambda_1 = d\lambda_2 = 0$. Daher

339) $$ds_3 = \tfrac{1}{2} A_3 \, d\lambda_3 .$$

Die Gerade ds_3 ist ein unendlich kleines, vom Punkte A aus gezogenes Stück der Durchschnittslinie des ein- und zweischaligen Hyperboloides, welche durch den Punkt A gehen, und steht, da diese beiden Flächen auf dem Ellipsoide senkrecht stehen, ebenfalls auf diesem senkrecht.

Der Wert, den ds annimmt, wenn $d\lambda_1 = d\lambda_3 = 0$ gesetzt wird, soll mit ds_2 bezeichnet werden. Es ist also

340) $$ds_2 = \tfrac{1}{2} A_2 \, d\lambda_2 = AB_2$$

der Abstand des Punktes A mit den elliptischen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 vom Punkte B_2, dessen elliptische Koordinaten λ_1, $\lambda_2 + d\lambda_2$, λ_3 sind. ds_2 kann auch als ein vom Punkte A aus gezogenes unendlich kleines Stück der Durchschnittslinie des durch A gehenden Ellipsoides mit dem durch A gehenden zweischaligen Hyperboloid definiert werden und steht senkrecht auf dem durch A gehenden einschaligen Hyperboloide.

Ebenso ist

341) $$ds_1 = \tfrac{1}{2} \Delta_1 \, d\lambda_1 = AB_1$$

der Abstand des Punktes A mit den elliptischen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 und des Punktes B_1 mit den elliptischen Koordinaten $\lambda_1 + d\lambda_1$, λ_2, λ_3 oder ein von A aus gezogenes unendlich kleines Stück der Durchschnittslinie des durch A gehenden Ellipsoides und einschaligen Hyperboloides und steht senkrecht auf dem durch A gehenden zweischaligen Hyperboloide.

Der früher mit B bezeichnete Punkt mit den elliptischen Koordinaten $\lambda_1 + d\lambda_1$, $\lambda_2 + d\lambda_2$, $\lambda_3 + d\lambda_3$ ist die A vis à vis liegende Ecke des unendlich kleinen Parallelepipedes, von dem AB_1, AB_2 und AB_3 die drei in A zusammenstoßenden Kanten sind. ds ist die A und B verbindende Diagonale dieses Parallelepipedes.

Während wir in Formel 334) unter ds immer die positive Quadratwurzel aus $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ verstehen, sollen in den Formeln 339), 340) und 341) Δ_1, Δ_2 und Δ_3 wesentlich positive Größen sein, so daß also ds_1 dasselbe Vorzeichen wie $d\lambda_1$, ds_2 dasselbe wie $d\lambda_2$ und ds_3 dasselbe wie $d\lambda_3$ erhalten soll.

§ 64. Rektifikation der Krümmungslinien des Ellipsoides, Komplanation des Ellipsoides.

Einem bestimmten konstanten λ_3 entspricht ein bestimmtes dreiachsiges Ellipsoid. Alle einschaligen Hyperboloide, welche wir erhalten, wenn wir dem λ_2 alle Werte von $-a_3^2$ bis $-a_2^2$ erteilen, durchschneiden dasselbe in einer Kurvenschar, welche wir die Krümmungslinie erster Gattung des betreffenden Ellipsoides nennen. Ihre Tangenten zu jedem Punkte fallen nämlich, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, in die Richtung einer durch diesen Punkt gezogenen Hauptkrümmungsebene. Diese Krümmungslinien beginnen für $\lambda_2 = -a_3$ mit der Ellipse, in welcher die $x_1 x_2$-Ebene das Ellipsoid durchschneidet und enden für $\lambda_2 = -a_2^2$ in den beiden Stücken der Durch-

schnittslinie des Ellipsoides und desjenigen Teiles der $x_1 x_3$-Ebene, welcher zwischen den beiden Ästen der Hyperbel liegt, der die Gleichungen 320) zukommen. In Fig. 9 ist die obere der positiven x_3-Achse zugewendete Hälfte des Ellipsoides von oben, also von dorther betrachtet, wohin die kleinste Halbachse zeigt, perspektivisch gezeichnet. Die ausgezogenen Linien sind Krümmungslinien erster Gattung.

Erteilen wir dagegen in der Gleichung 312) dem λ_1 alle Werte zwischen $-a_2^2$ und $-a_1^2$, so erhalten wir die Gleichungen einer Schar zweifächeriger Hyperboloide, welche das Ellipsoid in einer zweiten Kurvenschar, den Krümmungslinien zweiter Gattung durchschneiden. Letztere sind in Fig. 9 punktiert.

Wenn wir die Formel für die Länge der Krümmungslinien eines beliebigen Ellipsoides finden wollen, so genügt es vollständig, dieselbe für das Ellipsoid zu suchen, welches dem Werte $\lambda_3 = 0$ entspricht; denn dieses Ellipsoid hat die Gleichung

342) $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

Da aber die Konstanten a_1, a_2, a_3 ganz willkürlich sind, so können wir sie immer gleich den Halbachsen des gegebenen Ellipsoides machen, um dessen Krümmungslinien es sich handelt.

Die beiden Gleichungen einer Krümmungslinie erster Gattung dieses Ellipsoides finden wir, wenn wir nebst $\lambda_3 = 0$ noch λ_2 gleich irgend einer zwischen $-a_3^2$ und $-a_2^2$ liegenden Konstanten setzen. Das Linienelement einer solchen Krümmungslinie ist also zu bilden, indem wir in Formel 334) $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 =$ konst. setzen und λ_1 und $d\lambda_1$ wachsen lassen. Es ist also nach Formel 341) dieses Linienelement

$$ds_1 = \tfrac{1}{2} \Delta_1 \, d\lambda_1 .$$

Ein endliches Stück der Krümmungslinie ist

$$\tfrac{1}{2}\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} \Delta_1 \, d\lambda_1 ,$$

wobei λ_1^0 und λ_1^1 die dem Anfangspunkte und Endpunkte des Stückes entsprechenden Werte von λ_1 sind. Den vierten

Teil CD (Fig. 9) einer Krümmungslinie erhalten wir, wenn wir die untere Grenze λ_1^0 des Integrales gleich $-a_1^2$, die obere λ_1^1 gleich $-a_2^2$ setzen. Die Länge der ganzen, in sich geschlossenen Krümmungslinie ist das Vierfache dieses bestimmten Integrales. Den hier zu substituierenden Wert von Δ_1 erhalten wir, wenn wir in Formel 335) $\lambda_3 = 0$ und λ_2 gleich der vorgeschriebenen Konstanten setzen. Es ist also in allendiesen Integralen zu setzen

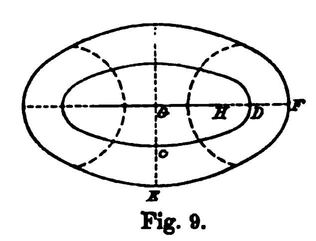


Fig. 9.

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{(a_1^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_1)}},$$

worin also alles bis auf die Integrationsvariable λ_1 konstant ist; die Integrale sind also Abelsche Integrale.

Ebenso ist die ganze Länge einer geschlossenen Krümmungslinie zweiter Gattung

$$2\int_{a_3^2}^{a_2^2} d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{(a_1^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)}}.$$

Wir gelangen in der nachfolgenden Weise zur Komplanation des Ellipsoides.

Wir ziehen vom Punkte A mit den elliptischen Koordinaten λ_1 und λ_2 des Ellipsoides, für welches $\lambda_3 = 0$ ist, aus das Linienelement $ds_1 = \frac{1}{2}\Delta_1 d\lambda_1 = AB_1$ der durch A hindurch gehenden Krümmungslinie erster Gattung des Ellipsoides und das Linienelement $ds_2 = \frac{1}{2}\Delta_2 d\lambda_2 = AB_2$ der durch ihn hindurchgehenden Krümmungslinie zweiter Gattung des Ellipsoides. Ferner ziehen wir von B_2 aus auf dem Ellipsoide die unendlich kleine Gerade $B_2C \| AB_1$ und von B_1 aus die unendlich kleine Gerade $B_1C \| AB_2$. Die beiden zuletzt gezogenen Geraden sollen sich im Punkte C treffen. Dann kann die Figur AB_1CB_2A als ein unendlich kleines Rechteck vom Flächeninhalte $\frac{1}{4}\Delta_1\Delta_2 d\lambda_1 d\lambda_2$ und zugleich als ein Element der Oberfläche

des Ellipsoides betrachtet werden, für welches $\lambda_3 = 0$ ist. Ein endliches Stück der Oberfläche dieses Ellipsoides ist also:

$$343)\qquad F = \tfrac{1}{4}\int\int \Delta_1\, \Delta_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

wobei alle Wertepaare von λ_1 und λ_2 in die Integration einzubegreifen sind, welche Punkten dieses Flächenstückes entsprechen.

Integriert man bei irgend einem gegebenen λ_2 bezüglich λ_1 von $-a_2^2$ bis $-a_1^2$, so umfaßt man einen ganzen Quadranten CD (Fig. 9) einer Krümmungslinie erster Gattung. Integriert man noch bezüglich λ_2 von $-a_3^2$ bis $-a_2^2$, so umfaßt man noch alle Quadranten der Krümmungslinien erster Gattung von EF bis GH, also einen Oktanten des ganzen Ellipsoids. Es hat also die ganze geschlossene Oberfläche des Ellipsoides, dessen Gleichung $\lambda_3 = 0$ ist, welches also die Gleichung 342) hat, den Wert:

$$2\int_{-a_3^2}^{-a_3^2}\int_{-a_1^2}^{-a_2^2} \Delta_1\, \Delta_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 .$$

Setzen wir

$$344)\qquad (a_1^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_1) = b_1^2,$$

dagegen

$$345)\qquad (a_1^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2) = - b_2^2,$$

so sind vermöge der Grenzen, zwischen denen λ_1 und λ_2 liegen müssen, b_1^2 und b_2^2 wesentlich positive Größen. In den zuletzt entwickelten Integralen ist $\lambda_3 = 0$, daher

$$346)\qquad \Delta_1 = \frac{1}{b_1}\sqrt{-\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)},\qquad \lambda_2 = \frac{1}{b_2}\sqrt{-\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Die Vorzeichen wurden in dieser Weise geschrieben, da $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ und $\lambda_2 - \lambda_1$ lauter positive Größen sind. Es verwandelt sich daher das Integral 343) zunächst in

$$F = \tfrac{1}{4}\int\int \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{b_1 b_2}\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 =$$

$$= \tfrac{1}{4}\int\int \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2^3}}{b_1 b_2}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 - \tfrac{1}{4}\int\int \frac{\sqrt{\lambda_1^3 \lambda_2}}{b_1 b_2}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 .$$

Da b_1 nur Funktion von λ_1, b_2 nur Funktion von λ_2 ist, so zerfällt jedes Doppelintegral in das Produkt zweier einfacher Integrale und man hat

$$F = \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{\lambda_1}}{b_1}\, d\lambda_1 \int \frac{\sqrt{\lambda_2^3}}{b_2}\, d\lambda_2 ,$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{\lambda_1^3}}{b_1}\, d\lambda_1 \int \frac{\sqrt{\lambda_2^2}}{b_2}\, d\lambda_2 .$$

Erinnert man sich an die Werte von b_1 und b_2, so sieht man, daß jedes der Integrale ein elliptisches und für das Rotationsellipsoid, wo entweder $a_1 = a_2$ oder $a_2 = a_3$ ist, durch gewöhnliche zyklometrische Funktionen ausdrückbar ist. Die ganze geschlossene Oberfläche des Ellipsoides erhält man natürlich, wenn man mit 8 multipliziert und $-a_1^2$ und $-a_2^2$ als Integrationsgrenzen für λ_1, dagegen $-a_3^2$ und $-a_2^2$ als Integrationsgrenzen für λ_2 wählt.

§ 65. Kürzeste Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoide.

Wir wollen nun die spezielle Form entwickeln, welche die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung im Falle der Bewegung eines einzigen vollkommen freien materiellen Punktes von der Masse m annimmt, wenn wir dessen Position im Raume durch die drei elliptischen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 bestimmen, welche also jetzt die Rolle der früher mit p, $p_h \ldots p_s$ bezeichneten generalisierten Koordinaten spielen.

Seien x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Koordinaten des materiellen Punktes zur Zeit t. Während einer unendlich kleinen Zeit dt sollen dieselben die Zuwächse dx_1, dx_2, dx_3 erfahren, während die dazu gehörigen Zuwächse der elliptischen Koordinaten $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$ heißen mögen. Wir setzen wie in Formel 334)

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

so daß ds der während der Zeit dt zurückgelegte Weg, ds/dt die Geschwindigkeit c des materiellen Punktes zur Zeit t und

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

dessen lebendige Kraft ist. Da die Formel 334) für beliebige Koordinatenzuwächse gilt, so muß sie auch für die während der Zeit dt eintretenden Koordinatenzuwächse gelten. Man hat also:

$$ds = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2\, d\lambda_1^2 + \Delta_2^2\, d\lambda_2^2 + \Delta_3^2\, d\lambda_3^2},$$
$$\frac{ds}{dt} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2\, \lambda_1'^2 + \Delta_2^2\, \lambda_2'^2 + \Delta_3^2\, \lambda_3'^2},$$

wobei λ'_1, λ'_2, λ'_3 abgekürzte Bezeichnungen für die Differentialquotienten der λ nach der Zeit sind. Endlich wird

$$T = \frac{m}{8}(\Delta_1^2\lambda_1'^2 + \Delta_2^2\lambda_2'^2 + \Delta_3^2\lambda_3'^2).$$

Unser Rezept ging nun dahin, daß man zuerst in dem Ausdrucke für T die Momente q einzuführen, dann $\partial W/\partial p_h$ für q_h zu setzen und den so erhaltenen Wert von T in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + T + V = 0$$

zu substituieren habe. Unter den Momenten verstehen wir die partiellen Differentialquotienten des T nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten, also nach λ'_1, λ'_2 und λ'_3. Es ist also:

$$q_1 = \frac{\partial T}{\partial \lambda'_1} = \tfrac{1}{4} m\,\Delta_1^2\,\lambda'_1,$$
$$q_2 = \frac{\partial T}{\partial \lambda'_2} = \tfrac{1}{4} m\,\Delta_2^2\,\lambda'_2,$$
$$q_3 = \frac{\partial T}{\partial \lambda'_3} = \tfrac{1}{4} m\,\Delta_3^2\,\lambda'_3.$$

Daher:

$$T = \frac{2}{m}\left(\frac{q_1^2}{\Delta_1^2} + \frac{q_2^2}{\Delta_2^2} + \frac{q_3^2}{\Delta_3^2}\right).$$

Hier haben wir noch für q_1 zu substituieren $\partial W/\partial p_1$, also in unserem Falle $\partial W/\partial \lambda_1$, ebenso für q_2 und q_3 die Ausdrücke $\partial W/\partial \lambda_2$ und $\partial W/\partial \lambda_3$. Tun wir dies und substituieren den so erhaltenen Wert von T in die Hamil-

tonsche partielle Differentialgleichung, so folgt also schließlich:

$$347)\quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{2}{m}\left[\frac{1}{\Delta_1^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{1}{\Delta_2^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 + \frac{1}{\Delta_3^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2\right] + V = 0,$$

wobei V als eine gegebene Funktion der Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 und etwa noch der Zeit t zu betrachten ist. Haben wir ein vollständiges Integral, also einen Wert von W gefunden, welcher dieser Differentialgleichung genügt und außer der additiv zu W hinzukommenden noch drei willkürlich voneinander unabhängige Konstanten enthält, so können wir daraus in der uns bekannten Weise die Bewegungsgleichungen herleiten.

Wir betrachten ein zweites mechanisches Beispiel. Ein materieller Punkt soll gezwungen sein, bei seiner Bewegung auf der Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoides zu verbleiben. Wir können die dem elliptischen Koordinatensysteme zugrunde liegenden Konstanten a_1, a_2, a_3 gleich den Halbachsen dieses Ellipsoides wählen. Dann ist $\lambda_3 = 0$ die Gleichung dieses Ellipsoides, welche also der materielle Punkt während seiner ganzen Bewegung erfüllen muß. Seine Position auf dem Ellipsoid wird durch die Werte der beiden anderen elliptischen Koordinaten λ_1 und λ_2 bestimmt. Da λ_3 konstant gleich Null ist, so reduziert $4\,ds^2$ auf $\Delta_2^2\,d\lambda_2^2 + \Delta_1^2\,d\lambda_1^2$, daher T auf $\frac{m}{8}(\Delta_2^2\,\lambda_2'^2 + \Delta_1^2\,\lambda_1'^2)$ und die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung auf:

$$348)\quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{2}{m}\left[\frac{1}{\Delta_1^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{1}{\Delta_2^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2\right] + V = 0.$$

Falls außer den Kräften, welche den Punkt zwingen, auf dem Ellipsoide zu bleiben, keine anderen Kräfte auf ihn wirken, ist V konstant. Setzen wir dann

$$349)\quad W = -\left(\frac{2\alpha_1}{m} + V\right)t + U,$$

wobei U bloß Funktion von λ_1 und λ_2 sein soll und dem konstanten Faktor von t lediglich behufs Vereinfachung der Rechnung diese spezielle Form gegeben wurde, so reduziert sich die Gleichung 348) auf

350) $$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta_1^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{1}{\Delta_2^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda_2}\right)^2.$$

Da $\lambda_3 = 0$ ist, so nehmen Δ_1 und Δ_2 wieder die Werte 346) an. Setzen wir außerdem noch $U = U_1 + U_2$, wobei U_1 bloß Funktion von λ_1, U_2 bloß Funktion von λ_2 ist, so reduzieren sich die partiellen Differentialquotienten auf gewöhnliche und die Gleichung 350) verwandelt sich in

351) $$\frac{b_1^2}{\lambda_1}\left(\frac{d\,U_1}{d\,\lambda_1}\right)^2 + \frac{b_2^2}{\lambda_2}\left(\frac{d\,U_2}{d\,\lambda_2}\right)^2 = \alpha_1\,\lambda_1 - \alpha_1\,\lambda_2.$$

Wir erfüllen diese Gleichung, wenn wir setzen

$$\frac{b_1^2}{\lambda_1}\left(\frac{d\,U_1}{d\,\lambda_1}\right)^2 = +\,\alpha_1\,\lambda_1 - \alpha_2,$$
$$\frac{b_2^2}{\lambda_2}\left(\frac{d\,U_2}{d\,\lambda_2}\right)^2 = +\,\alpha_2 - \alpha_1\,\lambda_2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, da b_1 bloß Funktion von λ_1 und b_2 bloß Funktion von λ_2 ist

$$U_1 = \int \frac{\sqrt{\alpha_1\,\lambda_1^2 - \alpha_2\,\lambda_1}}{b_1}\,d\,\lambda_1,$$
$$U_2 = \int \frac{d\,\lambda_2}{b_2}\sqrt{\alpha_2\,\lambda_2 - \alpha_1\,\lambda_2^2},$$

daher

352) $$\begin{cases} W = -\left(\frac{2\,\alpha_1}{m} + V\right)t + \int \frac{\sqrt{\alpha_1\,\lambda_1^2 - \alpha_2\,\lambda_1}}{b_1}\,d\,\lambda_1 + \\ \qquad + \int \frac{\sqrt{\alpha_2\,\lambda_2 - \alpha_1\,\lambda_2^2}}{b_2}\,d\,\lambda_2. \end{cases}$$

Alle die Substitutionen, welche wir da machten, waren erlaubt, da es sich bei Ableitung der Bewegungsgleichungen aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung, wie wir wissen, bloß darum handelt, ein vollständiges Integral derselben zu finden, d. h. einen Ausdruck für W, welcher ihr genügt und die nötige Anzahl unabhängiger willkürlicher Konstanten hat. Der Ausdruck 352) aber ist ein solches vollständiges Integral, da er außer der additiv hinzukommenden Konstanten noch die zwei willkürlichen voneinander unabhängigen Konstanten α_1 und α_2 enthält

Setzt man seine partiellen Differentialquotienten nach der einen und nach der anderen Konstante gleich einer dritten resp. vierten willkürlichen Konstanten, so erhält man die beiden Bewegungsgleichungen. Da der partielle Differentialquotient von W nach α_2 die Zeit nicht enthält, so liefert er, gleich einer Konstanten $-\alpha_3/2$ gesetzt, die Gleichung der Bahn. Man erhält also für dieselbe

353) $$\int \frac{\sqrt{\lambda_2}\, d\lambda_2}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \int \frac{\sqrt{\lambda_1}\, d\lambda_1}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = \alpha_3 ,$$

wobei man sich für b_2 und b_3 die Werte 344) und 345) substituiert zu denken hat, so daß also die Integrale ultraelliptische, für das Rotationsellipsoid elliptische werden.

Diese Gleichung enthält in Wirklichkeit nur zwei willkürliche Konstanten $\alpha_1 \alpha_3^2$ und $\alpha_2 \alpha_3^2$, welche so bestimmt werden können, daß die Koordinaten des gegebenen Ausgangspunktes des materiellen Punktes diese Gleichung befriedigen und daß im Ausgangspunkte die Richtung der durch diese Gleichung dargestellten Kurve die gegebene Bewegungsrichtung des materiellen Punktes hat.

Läßt man auf einer Kugelfläche von einem Punkte A aus nach allen darauf möglichen Richtungen materielle Punkte ausgehen, auf welche sonst keine Kräfte wirken, als diejenigen, welche sie zwingen, auf der Kugelfläche zu bleiben, so beschreiben alle diese materiellen Punkte größte Kreise, welche sich in dem A vis à vis liegenden Punkte B der Kugelfläche wieder treffen. Das zwischen A und irgend einem anderen Punkte A_1 eines solchen größten Kreises liegendes Stück AA_1 des größten Kreises ist so lange die absolut kürzeste Linie, die man auf der Kugelfläche von A nach A_1 ziehen kann, als der Punkt B nicht auf dem Stücke AA_1 zwischen A und A_1 liegt. Im letzteren Falle, wenn also der materielle Punkt auf dem Wege von A nach A_1 den Punkt B überschritten hat, ist der größte Kreisbogen ABA_1 nicht mehr die absolut kürzeste, auf der Kugel liegende Verbindungslinie der Punkte A und A_1, aber er ist noch ein Grenzwert, d. h. die Länge jeder anderen ihm unendlich nahen Verbindungslinie ACA_1 der Punkte A und A_1

auf der Kugel ist von der Länge des größten Kreisbogens ABA_1 um eine Größe verschieden, die unendlich klein höherer Ordnung ist, als der durchschnittliche Abstand irgend eines Punktes des größten Kreisbogens von dem ihm zunächst liegenden Punkte der Kurve ACA_1.

Wenn man nun von irgend einem Punkte A auf der Fläche eines dreiachsigen Ellipsoides in gleicher Weise nach allen Richtungen darauf materielle Punkte aussendet, auf welche sonst keine Kraft wirkt, als diejenige, welche sie zwingt, auf der Ellipsoidfläche zu bleiben, so schneiden sich alle Bahnen dieser Punkte, deren Gleichungen alle die Form der Gleichung 353) haben, nicht mehr nochmals in einem und demselben Punkte, sondern sie haben vis à vis vom Ausgangspunkte eine einhüllende, die sich nur dann auf den vis à vis von A liegenden Punkt reduziert, wenn A auf einer der Achsen des Ellipsoides liegt. Das Stück jeder solchen Bahn, das zwischen A und irgend einem anderen Punkte A_1 der Bahn auf dem Ellipsoide liegt, ist so lange die absolut kürzeste Linie, die man auf dem Ellipsoide zwischen A und A_1 ziehen kann, als beim Übergange von A nach A_1 kein Berührungspunkt mit jener einhüllenden durchlaufen wird. Im letzteren Falle ist es noch immer ein Grenzwert, da, wie wir in § 39 aus dem Prinzipe der kleinsten Wirkung bewiesen, die Bahn eines von keinen Kräften affizierten materiellen Punktes auf einer krummen Fläche immer ein Grenzwert sein muß. Es ist aber üblich, diese Bahn ohne weitere Erläuterung als eine kürzeste Linie auf der betreffenden Fläche zu bezeichnen und deshalb nennen wir auch alle durch die Gleichung 353) dargestellten Kurven kürzeste, loxodrome oder auch geodätische Kurven. Man sucht nämlich zu Schiff im allgemeinen in einer kürzesten Linie von der Ausgangs- zur Endstation zu steuern und in der Geodäsie wird die Entfernung zweier Orte der Erdoberfläche längs der kürzesten Linien gemessen.

Die Abhängigkeit der Lage des betrachteten materiellen Punktes auf dem Ellipsoide von der Zeit erhält man, wenn man den partiellen Differentialquotienten, der durch die

Gleichung 352) gegebenen Größe W nach α_1 gleich einer neuen Konstanten $-\frac{\alpha_4}{2}$ setzt. Dadurch ergibt sich:

$$\int \frac{\sqrt{\lambda_2^3}\, d\lambda_2}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \int \frac{\sqrt{\lambda_1^3}\, d\lambda_1}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = \alpha_4 - \frac{4t}{m}.$$

Daraus folgt:

354) $$\frac{\sqrt{\lambda_2^3}\, \lambda'_2}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \frac{\sqrt{\lambda_1^3}\, \lambda'_1}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = -\frac{4}{m},$$

während die Differentiation der Gleichung 353) liefert:

355) $$\frac{\sqrt{\lambda_2}\, \lambda'_2}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \frac{\sqrt{\lambda_1}\, \lambda'_1}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = 0,$$

woraus durch Quadrierung folgt:

356) $$\frac{\lambda_2 \lambda'^2_2}{b_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 \lambda'^2_1}{b_1^2 (\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2)} = 0.$$

Multiplizieren wir das Quadrat der Gleichung 354) mit α_1, addieren dazu das mit $-\alpha_1 \lambda_1 \lambda_2$ multiplizierte Quadrat der Gleichung 355) und die mit $\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2)$ multiplizierte Gleichung 356), so ergibt sich mit Rücksicht auf die Definition der Größen Δ durch die Gleichungen 346)

$$\Delta_2^2 \lambda'^2_2 + \Delta_1^2 \lambda'^2_1 = \frac{16 \alpha_1}{m^2}.$$

Es ist also $4\alpha_1$ das Quadrat des Bewegungsmomentes, also gleich $m^2 c^2$.

Die Geschwindigkeit c umgekehrt ist $2\sqrt{\alpha_1}/m$, also während der ganzen Bewegung konstant, wie es nicht anders zu erwarten war. Der während der Zeit t zurückgelegte Bogen s der loxodromen Kurve ist also gleich ct und man erhält, wenn man in die Gleichung 353) s/c statt t schreibt, die Rektifikation der Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoides.

§ 66. Ein spezieller Fall des Dreikörperproblems.

Wir wollen nun die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse m betrachten, welcher von zwei fixen Zentren P und P' angezogen wird und zwar von jedem nach

dem Newtonschen Gravitationsgesetze. Wir bezeichnen die Länge der Geraden PP' mit $2e$, ihren Halbierungspunkt mit O und betrachten zuerst den speziellen Fall, daß die Anfangsgeschwindigkeit zu Anfang der Zeit in der Ebene liegt, die man durch P, P' und die Anfangslage des materiellen Punktes legen kann. Der Punkt bleibt dann immer in dieser Ebene.

Wir wählen den soeben mit O bezeichneten Punkt zum Koordinatenursprunge und ziehen die Abszissenachse OX_2 so, daß der Punkt P auf der positiven Abszissenachse, der Punkt P' auf der negativen Abszissenachse liegt, die Ordinatenachse OX_3 darauf senkrecht in der Ebene der Bahn, die Achse OX_1 senkrecht auf die Bahnebene. Der materielle Punkt befinde sich zur Zeit t im Punkte A, dessen rechtwinklige Koordinaten x_1, x_2, x_3 seien. Es ist dann $x_1 = 0$. Wir konstruieren ferner ein elliptisches Koordinatensystem. Die Konstanten a_1 und a_2 desselben sind willkürlich, a_3 soll jedoch so gewählt werden, daß

357) $$a_2^2 - a_3^2 = e^2$$

ist, daß also P und P' die Brennpunkte der Ellipsen und Hyperbeln sind, in denen die konfokalen Flächen zweiten Grades, welche die elliptischen Koordinaten definieren, von der $x_2 x_3$-Ebene geschnitten werden. Die betreffenden elliptischen Koordinaten des Punktes A seien λ_1, λ_2, λ_3. Da für diesen Punkt $x_1 = 0$ ist, so ist auch $\lambda_1 = -a_1^2$. Die beiden zweischaligen Hyperboloide degenerieren in die $x_2 x_3$-Ebene. Die Relationen zwischen x_2, x_3 und λ_2, λ_3 finden wir, wenn wir in den Gleichungen 330), 331) und 332) setzen $\lambda_1 = -a_1^2$, wodurch wir wegen Gleichung 357) erhalten:

$$e^2 x_2^2 = (a_2^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_3),$$
$$e^2 x_3^2 = -(a_3^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_3).$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert:

$$x_2^2 + x_3^2 = a_2^2 + a_3^2 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

daher

$$x_2^2 + x_3^2 + e^2 = 2a_2^2 + \lambda_2 + \lambda_3 = w_2^2 + w_3^2,$$

wenn wir

$$w_2 = \sqrt{a_2^2 + \lambda_2}, \quad w_3 = \sqrt{a_2^2 + \lambda_3}$$

setzen, wobei die Wurzeln immer mit positivem Zeichen zu nehmen sind.

Bezeichnen wir die Abstände AP und AP' mit r und r', so ist

358) $$\begin{cases} r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + e^2 - 2ex_2} = w_3 - w_2 \\ r' = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + e^2 + 2ex_2} = w_3 + w_2. \end{cases}$$

Die Vorzeichen sind richtig, da r, r', w_1 und w_2 positiv und mit Berücksichtigung des Vorzeichens $\lambda_3 > \lambda_2$, daher auch $w_3 > w_2$ ist. Wenn k und k' Konstanten sind, so ist die Kraftfunktion in diesem Falle:

$$V = -\frac{k}{r} - \frac{k'}{r'} = \frac{k'(w_2 - w_3) - k(w_2 + w_3)}{w_3^2 - w_2^2} = \frac{(k'-k)w_2 - (k+k')w_3}{\lambda_3 - \lambda_2},$$

die lebendige Kraft ist

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{8}(\varDelta_2^2 \lambda_2'^2 + \varDelta_3^2 \lambda_3'^2) = \frac{2}{m}\left(\frac{q_2^2}{\varDelta_2^2} + \frac{q_3^2}{\varDelta_3^2}\right).$$

$\varDelta_2$ und $\varDelta_3$ erhält man, indem man wieder in den Formeln 335) setzt $\lambda_1 = -a_1^2$, wodurch folgt:

$$\varDelta_2^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)}, \qquad \varDelta_3^2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(a_2^2 + \lambda_3)(a_3^2 + \lambda_3)}.$$

Ferner ist statt q_2 und q_3 zu setzen $\partial W/\partial \lambda_2$ und $\partial W/\partial \lambda_3$. Es wird also

$$T = \frac{2}{m(\lambda_2 - \lambda_3)}\left[(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - (a_2^2 + \lambda_3)(a_3^2 + \lambda_3)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2\right].$$

Bevor wir dies in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung 301) substituieren, wollen wir für λ_2 und λ_3 die Variabeln w_2 und w_3 einführen. Ferner wollen wir noch setzen:

359) $$W = \alpha_1 t + W_2 + W_3,$$

wobei W_2 nur Funktion von λ_2 oder w_2, W_3 nun Funktion von λ_3 oder w_3 sein soll. Es wird

$$2m\alpha_1(w_3^2 - w_2^2) + (e^2 - w_2^2)\left(\frac{dW_2}{dw_2}\right)^2 + (w_3^2 - e^2)\left(\frac{dW_3}{dw_3}\right)^2 + \\ + 2m(k' - k)w_2 - 2m(k + k')w_3 = 0$$

und man kann setzen

$$(w_2^2 - e^2)\left(\frac{dW_2}{dw_2}\right)^2 = \alpha_2 + 2m(k' - k)w_2 - 2m\alpha_1 w_2^2$$

$$(w_3^2 - e^2)\left(\frac{dW_3}{dw_3}\right)^2 = -\alpha_2 + 2m(k + k')w_3 - 2m\alpha_1 w_3^2.$$

Die durch diese Gleichungen definierten Funktionen W_2 und W_3 sind elliptische und zwar erscheint W_2 zunächst als Funktion von w_2, W_3 als Funktion von w_3; beide können daher vermöge der Gleichungen 358) auch leicht als Funktionen von r und r' ausgedrückt werden. Die Substitution in Gleichung 359) liefert zunächst W. Dessen nach α_2 genommener partieller Differentialquotient liefert gleich einer neuen Konstanten gesetzt die Gleichung der Bahn, wogegen man den zeitlichen Verlauf der Bewegung erhält, wenn man den partiellen Differentialquotienten von W nach α_1 gleich einer abermals neuen Konstanten setzt.

Wir wollen nun wieder die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse m, der gegen zwei fixe Anziehungszentra P und P' mit der Kraft k/r^2 resp. k'/r'^2 gezogen wird, betrachten, wobei wieder r und r' die Entfernungen des materiellen Punktes zur Zeit t von P resp. P' sind. Es soll aber die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes nicht in der durch seine Anfangslage und P und P' hindurchgehenden Ebene liegen.

Wir wählen wieder den Halbierungspunkt der Geraden PP', deren Länge wir mit $2e$ bezeichnen, zum Koordinatenursprunge, ziehen von O gegen P die positive Abszissenachse OX_2, außerdem ziehen wir aber noch zwei beliebige fixe Koordinatenachsen OY und OZ auf OX_2 senkrecht im Raume. Zudem wenden wir noch eine bewegliche Ordinatenachse OX_3 an, welche stets senkrecht zu OX_2 immer in der durch OX_2 und die augenblickliche Lage A des materiellen Punktes m gehenden Ebene X_2OX_3 liegen soll.

Die Koordinaten des Punktes A bezüglich des beweglichen Koordinatensystemes OX_2 und OX_3 sollen mit x_2 und x_3 bezeichnet werden. Der veränderliche Winkel zwischen den Geraden OX_3 und OY, also zwischen der fixen xy-Ebene X_2OY und der beweglichen xy-Ebene X_2OX_3 soll mit ϑ bezeichnet werden. Dieser Winkel bestimmt die Lage der beweglichen xy-Ebene, während x_2 und x_3 die Lage des Punktes A auf derselben bestimmen. Durch die drei Variabeln x_2, x_3 und ϑ wird also die augenblickliche Lage A des materiellen Punktes im Raume eindeutig bestimmt.

Das Verhältnis der Variabeln λ_2, λ_3 zu x_2, x_3 drückte in der eben gelösten Aufgabe eine rein geometrische Beziehung aus, welche bloß auf die Lage in der x_2x_3-Ebene Bezug hat und ganz davon unabhängig ist, ob diese Ebene fix ist oder sich bewegt. Die geometrische Lage des Punktes A auf der X_2OX_3-Ebene ist aber jetzt genau dieselbe, wie früher, als sich der materielle Punkt in einer Ebene bewegte. Wir können also jetzt wie damals die Variabeln λ_2 und λ_3 statt x_2 und x_3 einführen. Es werden alle Gleichungen zwischen diesen vier Variabeln, welche sich auf die geometrische Lage des Punktes A auf der X_2OX_3-Ebene beziehen, vollkommen unverändert bleiben. Setzen wir wieder

$$a_2^2 + \lambda_2 = w_2^2, \quad a_3^2 + \lambda_3 = w_3^2,$$

so wird wieder

$$V = \frac{k}{r} - \frac{k'}{r'} = \frac{(k'-k)w_2 - (k'+k)w_3}{w_3^2 - w_2^2}.$$

Die Bewegung des materiellen Punktes während der Zeit dt kann in drei Komponenten zerlegt werden:

1. Es wächst x_2 um dx_2. Dadurch verschiebt sich der Punkt um das Stück dx_2 in der Richtung OX_2.

2. Es wächst x_3 um dx_3, dadurch verschiebt sich A um das Stück dx_3 in der Richtung OX_3.

3. Es wächst ϑ um $d\vartheta$. Die Verschiebung, welche durch diesen Umstand allein bewirkt würde, steht senkrecht auf den beiden früheren dx_2 und dx_3 und kann als ein

unendlich kleiner mit dem Radius x_3 beschriebener, dem Zentriwinkel $d\vartheta$ gegenüberliegender Kreisbogen von der Länge $x_3\,d\vartheta$ betrachtet werden. Der gesamte vom materiellen Punkte während der Zeit dt beschriebene Weg ist also

$$ds = \sqrt{dx_2^2 + dx_3^2 + x_3^2\,d\vartheta^2}.$$

Nun bleiben aber die geometrischen Beziehungen zwischen λ_2, λ_3, x_2 und x_3 dieselben, daher ist

$$4(dx_2^2 + dx_3^2) = \Delta_2^2\,d\lambda_2^2 + \Delta_3^2\,d\lambda_3^2$$

und wenn man wieder die Differentialquotienten nach der Zeit durch angehängte Striche markiert

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\Delta_2^2\,\lambda'^2_2 + \Delta_3^2\,\lambda'^2_3) + x_3^2\,\vartheta'^2},$$

daher

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{8}(\Delta_2^2\,\lambda'^2_2 + \Delta_3^2\,\lambda'^2_3 + 4x_3^2\,\vartheta'^2),$$

woraus sich die den generalisierten Koordinaten λ_2, λ_3, ϑ entsprechenden Momente gleich

$$q_1 = \tfrac{1}{4}m\,\Delta_2^2\,\lambda'_2, \quad q_2 = \tfrac{1}{4}m\,\Delta_3^2\,\lambda'_3, \quad q_3 = m\,x_3^2\,\vartheta'$$

und daher

$$T = \frac{2}{m}\left(\frac{q_1^2}{\Delta_2^2} + \frac{q_2^2}{\Delta_3^2} + \frac{q_3^2}{4x_3^2}\right)$$

ergibt. Ehe wir dies in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + T + V = 0$$

substituieren, haben wir darin für q_1, q_2, q_3 die partiellen Differentialquotienten des W nach den Koordinaten, also $\partial W/\partial\lambda_2$, $\partial W/\partial\lambda_3$ und $\partial W/\partial\vartheta$ einzusetzen. Wir wollen für λ_2 und λ_3 die Variabeln w_2 und w_3 einführen, erhalten also

$$\frac{\partial W}{\partial\lambda_2} = \frac{1}{2w_2}\,\frac{\partial W}{\partial w_2}, \quad \frac{\partial W}{\partial\lambda_3} = \frac{1}{2w_3}\,\frac{\partial W}{\partial w_3}.$$

Diese Werte nebst $\partial W/\partial\vartheta$ sind in T für q_1, q_2 und q_3 zu schreiben. Ferner ist

$$\Lambda_2^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)} = \frac{w_2^2 - w_3^2}{w_2^2\,(w_2^2 - e^2)},$$

$$\Lambda_3^2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(a_2^2 + \lambda_3)(a_3^2 + \lambda_3)} = \frac{w_3^2 - w_2^2}{w_3^2\,(w_3^2 - e^2)},$$

$$\frac{1}{x_3^2} = -\frac{e^2}{(a_3^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_3)} = -\frac{e^2}{(w_2^2 - e^2)(w_3^2 - e^2)} =$$

$$= \frac{e^2}{w_2^2 - w_3^2}\left(\frac{1}{w_2^2 - e^2} - \frac{1}{w_3^2 - e^2}\right).$$

Endlich wollen wir noch setzen

$$W = \alpha_1 t + \alpha_3 \vartheta + W_2 + W_3,$$

wobei W_2 nur Funktion von λ_2 resp. w_2, W_3 nur Funktion von λ_3 resp. w_3 sein soll, so daß

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \alpha_3, \quad \frac{\partial W}{\partial w_2} = \frac{d W_2}{d w_2}, \quad \frac{\partial W}{\partial w_3} = \frac{d W}{d w_3}$$

wird. Es verwandelt sich schließlich nach Multiplikation mit $2m(w_2^2 - w_3)$ die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung in folgende Gleichung:

$$(w_2^2 - e^2)\left(\frac{d W_2}{d w_2}\right)^2 - (w_3^2 - e^2)\left(\frac{d W_3}{d w_3}\right)^2 + \frac{e^2 \alpha_3^2}{w_2^2 - e^2} - \frac{e^2 \alpha_3^2}{w_3^2 - e^2} +$$

$$+ 2m(k - k')\,w_2 + 2m(k' + k)\,w_3 + 2m\,\alpha_1\,w_2^2 - 2m\,\alpha_1\,w_3^2 = 0.$$

Zu dieser Gleichung addieren und subtrahieren wir eine dritte Konstante α_2 und spalten sie dann in die beiden Gleichungen:

$$(w_2^2 - e^2)\left(\frac{d W_2}{d w_2}\right)^2 = 2m(k' - k)\,w_2 - 2m\,\alpha_1\,w_2^2 - \frac{e^2 \alpha_3^2}{w_2^2 - e^2} + \alpha_2,$$

$$(w_3^2 - e^2)\left(\frac{d W_3}{d w_3}\right)^2 = 2m(k + k')\,w_3 - 2m\,\alpha_1\,w_3^2 - \frac{e^2 \alpha_3^2}{w_3^2 - e^2} + \alpha_2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt W_2 als ultraelliptische Funktion von w_2 und W_3 als ebensolche Funktion von w_3. Die beiden Gleichungen der Bahn erhält man, wenn man die beiden partiellen Differentialquotienten des W nach α_2 und α_3 je gleich zwei neuen Konstanten β_2 und β_3 setzt, den zeitlichen Verlauf der Bewegung aber erhält man, indem man den partiellen Differentialquotienten des W nach α_1

gleich einer letzten Konstanten β_1 setzt. Natürlich besteht die Gleichung der lebendigen Kraft und die auf die yz-Ebene bezügliche Flächenmomentengleichung, mit deren Deduktion aus unseren Schlußgleichungen ich mich aber nicht aufhalten will.

VI. Methode der Variation der Konstanten.

§ 67. Beziehung dieser Methode zu der der Variationsrechnung der reinen Mathematik.

Schon in § 8, in dem nächsten auf Entwicklung der Gleichung 53) folgenden Abschnitte, beschäftigten wir uns mit der Idee einer fortgesetzten Variation, bis man zu einem um Endliches verschiedenen Zustande gelangt. Im IV. Abschnitte hatten wir es dann schon wiederholt mit dem Begriffe des allmählichen Überganges der rein mathematischen Variation in eine kleine, durch physikalische Ursachen bewirkte wirkliche Änderung der Bewegung zu tun. Damit ist aber Bedeutung dieses Begriffes für die theoretische Physik noch lange nicht erschöpft.

Es gibt nämlich keinen einzigen Naturvorgang, welcher sich in so einfacher Weise abspielen würde, daß er absolut exakt in Gleichungen gefaßt werden könnte. Glücklicherweise ist jedoch häufig eine der wirkenden Ursachen bei weitem die ausschlaggebendste und man kann die Bewegung, welche durch sie allein erzeugt würde, in Gleichungen fassen, welche die wirkliche Bewegung angenähert darstellen und gewisse Integrationskonstanten enthalten. Die übrigen wirkenden Ursachen werden dann als solche betrachtet, welche jene einfache Bewegung stören und die Werte der Integrationskonstanten kontinuierlich langsam verändern. Diejenige einfache Bewegung, welche eintreten würde, wenn zur Zeit t plötzlich alle Störungen aufhören würden, und welche mit denjenigen Werten der Integrations-

konstanten fortginge, welche diese bei der wirklichen Bewegung gerade zur Zeit t haben, heißt die oskulierende einfache Bewegung.

Diese Methode der Lösung komplizierter Probleme heißt die Methode der Variation der Konstanten. Ihre Durchführbarkeit beruht darauf, daß alle Ausdrücke nach Potenzen der als sehr klein betrachteten Störungen entwickelt werden und zuerst alle Potenzen mit Ausnahme der ersten vernachlässigt werden. Ist diese Rechnung durchgeführt, so können dann die Glieder zweiter Ordnung ebenfalls berücksichtigt werden u. s. f.

So ist in erster Instanz die Wirkung aller Kräfte eine Störung und die geradlinige, gleichförmige Bewegung, welche eintreten würde, wenn in einem bestimmten Momente alle Kräfte aufhören würden, die oskulierende. Ein geworfener Körper (Geschützprojektil) beschreibt in erster Annäherung die Fallparabel, die Störung durch den Luftwiderstand wird als klein betrachtet. Reibung, Mittelswiderstand, elastische Nachwirkung, elektromagnetische Dämpfung werden als kleine Störungen bei den Schwingungen von Pendeln, Magneten, bei akustischen und elektromagnetischen stehenden Schwingungen betrachtet. Die erste Anwendung und höchste Vollendung erfuhr jedoch diese Methode in der Astronomie, wo man die Bewegung jedes Planeten, Mondes oder Kometen unter dem Einflusse seines Zentralkörpers als dessen ungestörte Bahn, die Einflüsse aller übrigen Himmelskörper aber als kleine Störungen derselben betrachtet. Obwohl uns daher hier die astronomischen Aufgaben ferner liegen, so werden wir doch nicht umhin können, sie als Musterbilder für eine Rechnungsmethode. die auch in der übrigen Physik täglich häufiger in Anwendung kommt, hier in den Vordergrund zu rücken.

Die beschriebene Methode der Variation der Konstanten scheint der Idee nach grundverschieden von der in § 1 definierten und in den folgenden Paragraphen verwendeten Variationsmethode der reinen Mathematik. Praktisch sind beiden Methoden die nächsten Verwandten, da beide auf der Voraussetzung beruhen, daß die Variationen so klein sind,

daß man die Glieder erster Ordnung für sich, die zweiter davon getrennt wiederum für sich etc. betrachten darf.

Wir wollen nun die Methode der Variation der Konstanten näher folgendermaßen definieren: Es sei die Berechnung der Bewegung eines mechanischen Systems, in dem Kräfte tätig sind, die eine gewisse Kraftfunktion V haben, gelungen. Die Lösung enthalte die nötige Zahl von Integrationskonstanten. Es soll daraus, dadurch daß man statt dieser Integrationskonstanten Funktionen der Zeit substituiert, die Lösung einer anderen Aufgabe abgeleitet werden, wobei dasselbe mechanische System sich unter dem Einflusse von Kräften bewegt, welche eine etwas von V verschiedene Kraftfunktion $V + \Omega$ haben. Wir wollen dieses Problem zunächst nach der Lagrangeschen Methode behandeln.

§ 68. Lagranges Hilfssatz.

Wir leiten vorerst eine allgemeine Relation ab. Es sei genau wie in § 55 ein beliebiges mechanisches System gegeben, das durch die generalisierten Koordinaten $p_1, p_2 \ldots p_s$ bestimmt ist. Wir setzen Einfachheit halber voraus, daß zwischen diesen keine Bedingungsgleichungen bestehen und eine Kraftfunktion V existiert, welche nur die Koordinaten und eventuell die Zeit enthält. Wir bezeichnen wie früher mit p' die Geschwindigkeiten, mit q die Momente, mit T die lebendige Kraft, welche wir bei Bildung der partiellen Differentialquotienten, als homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten ausgedrückt denken und setzen $H = T - V$. Dann lauten nach 74) und 286) die Bewegungsgleichungen:

$$360) \qquad \frac{d q_h}{d t} = \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_h}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad h = 1, 2 \ldots s.$$

Aus diesen Bewegungsgleichungen können die Koordinaten als Funktionen von der Zeit t und $2s$ Integrationskonstanten $C_1, C_2 \ldots C_{2s}$ gefunden werden. Wir wollen nun den Werten sämtlicher Integrationskonstanten unendlich kleine Zuwächse $\delta C_1, \delta C_2 \ldots \delta C_{2s}$ erteilen. Dadurch werden die zu irgend einer Zeit gehörigen Werte der Koordinaten,

Geschwindigkeiten, Momente sowie alle Ausdrücke, welche Funktionen dieser Größen und der Zeit sind, ebenfalls unendlich kleine Zuwächse erfahren, die wir durch ein vorgesetztes δ bezeichnen wollen. Jeder derartige Ausdruck G kann, wie die Koordinaten, Geschwindigkeiten und Momente selbst, als Funktion von t, C_1, $C_2 \ldots C_{2s}$ ausgedrückt werden und es ist

$$\delta G = \sum_1^{2s} {}_h \frac{\partial G}{\partial C_h} \delta C_h .$$

Die den Werten $C + \delta C$ der Integrationskonstanten entsprechende Bewegung ist also eine spezielle variierte Bewegung im mathematischen Sinne der Variationsrechnung und wir knüpfen hier die Theorie der physikalischen nicht strenge unendlich kleinen Variationen vollständig an die der mathematischen Variationen an.

Wir wollen nun noch ein zweites Mal den Integrationskonstanten C_1, $C_2 \ldots C_{2s}$ beliebige andere, von den δC vollständig unabhängige, unendlich kleine Zuwächse ΔC_1, $\Delta C_2 \ldots \Delta C_{2s}$ erteilen. Dann ist ebenso der dadurch erzeugte Zuwachs des zu irgend einer Zeit gehörigen Wertes von G

$$\Delta G = \sum_1^{2s} {}_h \frac{\partial G}{\partial C_h} \Delta C_h .$$

Der Zuwachs, welchen δG erfährt, wenn man darin die δC und natürlich immer t unverändert, aber die C um ΔC wachsen läßt, soll mit $\Delta \delta G$, der von ΔG, wenn man bloß die C um δC wachsen läßt, mit $\delta \Delta G$ bezeichnet werden. Dann ist offenbar

$$\text{361)} \qquad \Delta \delta G = \delta \Delta G = \sum_1^{2s} {}_k \sum_1^{2s} {}_h \frac{\partial^2 G}{\partial C_h \partial C_k} \delta C_h \Delta C_k .$$

Lassen wir in $\partial H / \partial p'_h$ oder $\partial H / \partial p_h$ die C und δC wachsen, so erhalten wir die Größen

$$\delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} \text{ und } \delta \frac{\partial H}{\partial p_h}$$

und da die δC von der Zeit ganz unabhängig sind, so folgt aus 360)

$$\frac{d}{dt}\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}-\delta\frac{\partial H}{\partial p_h}=0.$$

Ebenso folgt

$$\frac{d}{dt}\Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}-\Delta\frac{\partial H}{\partial p_h}=0.$$

Wir subtrahieren die zweite dieser beiden Gleichungen von der ersten, nachdem wir die erste mit Δp_h, die zweite mit δp_h multipliziert haben. Wenn wir noch

$$\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}\frac{d\Delta p_h}{dt}-\Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}\frac{d\delta p_h}{dt}=\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}\Delta p'_h-\Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}\delta p'_h$$

einmal addieren, dann subtrahieren, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left[\Delta p_h\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}-\delta p_h\Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}\right]=$$
$$=\Delta p_h\delta\frac{\partial H}{\partial p_h}+\Delta p'_h\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}-\delta p_h\Delta\frac{\partial H}{\partial p_h}-\delta p'_h\Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}.$$

Wir wollen hier dem h alle Werte erteilen und alle so erhaltenen Gleichungen addieren. Da die durch δ und Δ angezeigten Variationen vollständig voneinander unabhängig sind, so ist die Summe der beiden positiven Glieder, die man so rechts erhält, nichts anderes als $\delta\Delta H$, die Summe der beiden negativen aber nichts anderes als $-\Delta\delta H$. Da nun diese beiden Größen nach 361) untereinander gleich sind, so verschwindet die rechte Seite und es wird

$$\frac{d}{dt}\sum_1^s{}_h\,\Delta p_h\delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}=\frac{d}{\partial t}\sum_1^s{}_h\,\delta p_h\Delta\frac{\partial H}{\partial p'_h}.$$

Da V die Geschwindigkeiten nicht enthält, so ist $\partial H/\partial p'_h=\partial T/\partial p'_h=q_h$, daher kann man die letzte Gleichung auch so schreiben:

362) $$\frac{d}{dt}\sum_1^s{}_h(\Delta p_h\delta q_h-\delta p_h\Delta q_h)=0.$$

Aus der Größe

363) $$\sum_1^s{}_h(\Delta p_h\delta q_h-\Delta q_h\delta p_h)$$

muß also, wenn man alles durch die C und deren Variationen und die Zeit ausdrückt, die letztere herausfallen. Diese Größe kann so ausgedrückt nur Funktion der C und deren Variationen sein. Die letzteren enthält sie natürlich so, daß jedes Glied ein δC und ein ΔC als Faktor hat.

Um zu zeigen, wie einfach der Sinn dieser Betrachtungen ist, wollen wir sie an einem ganz leichten Beispiele erörtern. Bestehe unser System aus einem einzigen materiellen Punkte von der Masse eins, dessen Abszisse p sei und der sich auf der Abszissenachse unter Einfluß einer Kraft $-a^2 p$ bewegt, die ihn gegen den Koordinatenanfangspunkt zieht und deren Intensität der Abszisse p proportional ist. Dann ist $p = C_1 \sin(at + C_2)$, $p' = a C_1 \cos(at + C_2)$

364)
$$\left\{\begin{aligned} \delta p &= \delta C_1 \sin(at + C_2) + C_1 \delta C_2 \cdot \cos(at + C_2) \\ \delta p' &= a \delta C_1 \cos(at + C_2) - a C_1 \delta C_2 \cdot \sin(at + C_2) \\ \Delta p &= \Delta C_1 \sin(at + C_2) + C_1 \Delta C_2 \cdot \cos(at + C_2) \\ \Delta p' &= a \Delta C_1 \cos(at + C_2) - a C_1 \Delta C_2 \cdot \sin(at + C_2), \end{aligned}\right.$$

daher

$$\Delta \delta p = \delta C_1 \cdot \Delta C_2 \cos(at + C_2) + \delta C_2 \Delta C_1 \cos(at + C_2) - \\ - C_1 \delta C_2 \Delta C_2 \sin(at + C_2)$$

und derselbe Wert folgt für $\delta \Delta p$. Es ist $q = p'$. Die Gleichung 362) besagt daher, daß $\Delta p \delta p' - \delta p \Delta p'$ die Zeit nicht enthält, sondern nur Funktion der Integrationskonstanten und ihrer Variationen ist. In der Tat folgt aus 364)

$$\Delta p \delta p' - \delta p \Delta p' = a C_1 (\delta C_1 \Delta C_2 - \Delta C_1 \delta C_2).$$

Wir wollen nun zur Methode der Variation der Konstanten übergehen.

§ 69. Lagranges Methode der Variation der Konstanten.

Es seien die

365) $$p,\ p' \text{ und } q$$

als solche Funktionen der Zeit t und von $2s$ Integrationskonstanten C gefunden, daß die Gleichungen 360) erfüllt sind, in denen die Kraftfunktion V einen bestimmt gegebenen

Wert hat. Wir nennen die durch diese Werte der p bestimmte Bewegung die ungestörte. Nun sollen zu den während derselben wirkenden Kräften noch sehr kleine, die störenden hinzukommen, wodurch der Wert der Kraftfunktion von V in $V + \Omega$ übergehen soll. Ω ist natürlich im allgemeinen eine Funktion der Koordinaten und der Zeit, deren Wert aber immer klein sei. Die unter der Mitwirkung dieser störenden Kräfte stattfindende Bewegung nennen wir die gestörte.

Die Gleichungen 360*) für dieselbe unterscheiden sich von den Gleichungen 360) bloß dadurch, daß $V + \Omega$ an die Stelle von V tritt und wir stellen uns die Aufgabe in die Werte 365), welche die Gleichungen 360) für die ungestörte Bewegung befriedigen, statt der Konstanten C solche Funktionen der Zeit zu setzen, daß die hierdurch erhaltenen Variabeln

366) $$\bar{p},\ \bar{p}',\ \bar{q}$$

die Gleichungen 360*) für die gestörte Bewegung erfüllen.

Da nun die C variabel sind, so werden sie während der Zeit dt gewisse Zuwächse $dC_1,\ dC_2 \ldots dC_{2s}$ erfahren und wir wollen den Zuwachs, den irgend eine Funktion der Variabeln 365) dadurch erfährt, daß man darin bloß den C diese Zuwächse erteilt, durch Vorsetzen des Zeichens d_1 ausdrücken. Dieser Zuwachs ist bloß durch eine kleine Veränderung der Werte der Integrationskonstanten entstanden und hat daher ganz die Eigenschaften der früher mit δ oder Δ bezeichneten Zuwächse. Dann ist also

$$\frac{d\bar{p}_h}{dt} = \frac{dp_h}{dt} + \frac{d_1 p_h}{dt},$$

wobei das erste Glied rechts den Differentialquotienten des p_h nach der Zeit bei konstanten C ausdrückt.

Es sollen nun die $2s$ Größen C so gewählt werden, daß für jedes h

367) $$\frac{d_1 p_h}{dt} = 0$$

ist. Die physikalische Bedeutung der letzten Gleichung kann man sich folgendermaßen klar machen. Wenn man

aus den Variabeln 365) die Variabeln 366) bildet, d. h. statt der C diejenigen Funktionen der Zeit setzt, welche wir finden werden, so erhält man die gestörte Bewegung. Wenn man nun von irgend einer Zeit t an plötzlich den C diejenigen konstanten Werte erteilt, welche sie gerade zu jener Zeit haben, so stimmen sowohl die Werte der p als auch der p' genau mit jenen überein, welche diese Größen hätten, wenn die C variabel blieben. Man erhält also durch diese Operation die Bewegung, welche das System in der Folgezeit machen würde, wenn zur Zeit t ohne Änderung der Positionen und Geschwindigkeiten der Systempunkte die störenden Kräfte plötzlich aufhören würden. Man nennt die Bewegung, welche dann einträte, die oskulierende ungestörte Bewegung.

Wenn z. B. V die Kraftfunktion der Sonnenanziehung auf die Erde, Ω die der anderen Himmelskörper ist, so liefert die plötzliche Konstantsetzung aller C die Ellipse, welche die Erde um die Sonne beschreiben würde, wenn plötzlich alle Störungen aufhörten. Noch einfacher: wenn wir das Übergewicht an der Atwoodschen Fallmaschine als Störung und Ω als dessen Kraftfunktion ansehen, so erhalten wir durch plötzliches Konstantmachen der C die Bewegung nach Abheben des Übergewichts.

Wir können daher die gestörte Bewegung so auffassen, als ob in jedem Zeitmomente die oskulierende ungestörte Bewegung statthätte, sich aber deren Integrationskonstanten allmählich mit der Zeit ändern würden; z. B. die gestörte Erdbahn so, als ob sich die Erde immer in einer Ellipse um die Sonne bewegte, deren Achsen, Ebene etc. sich langsam änderten, den freien Fall so, als ob die Bewegung in jedem Augenblicke gleichförmig wäre, aber die Geschwindigkeit sich mit der Zeit änderte.

Die Variabeln 366) sollen nun der Gleichung 360*) genügen, welche man aus 360) erhält, wenn man $V+\Omega$ statt V substituiert und welche wir so schreiben können:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial p'_k}=\frac{\partial \overline{T}}{\partial p_k}-\frac{\partial \overline{V}}{\partial p_k}-\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_k}.$$

Die Querstriche drücken aus, daß überall die Variabeln 366) statt 365) substituiert sind. Nun sind sowohl die $\bar{p}$ als auch die $\bar{p}'$ genau so wie die p und p' aus der Zeit und den C zusammengesetzt; nur daß in den ersteren die C als Funktionen der Zeit zu betrachten sind. Daher sind auch $\overline{V}$, $\overline{T}$, $\overline{\partial V/\partial p_h}$, $\overline{\partial T/\partial p_h}$ und $\overline{\partial T/\partial p'_h}$ die gleichen Funktionen der Zeit und der C wie die entsprechenden ungestrichenen Größen; nur daß wieder die C Funktionen der Zeit sind. Dies muß bei Bildung von $\frac{d}{dt}\frac{\overline{\partial T}}{\partial p'_h}$ beachtet werden. Wir denken uns daher in $\overline{\partial T/\partial p'_h}$ die p und p' als Funktionen der Zeit und der C ausgedrückt und bezeichnen durch Weglassung des Querstrichs ihren Differentialquotienten nach der Zeit bei konstanten C, durch das vorgesetzte d_1 aber den Zuwachs, der durch bloße Veränderung der C eintritt, also die Eigenschaften des früher durch das Zeichen δ oder Δ ausgedrückten Zuwachses hat. Dann ist also

$$\frac{d}{dt}\frac{\overline{\partial T}}{\partial p'_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h} + \frac{d_1}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_h}.$$

Substituieren wir alle diese Werte in die Gleichung 360*), so folgt:

368) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h} + \frac{d_1}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h} = \frac{\overline{\partial T}}{\partial p_h} - \frac{\overline{\partial V}}{\partial p_h} - \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial p_h}.$$

Denken wir uns nun die p und p' als Funktionen der Zeit und der C ausgedrückt, so sind die in dieser Gleichung vorkommenden Größen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h}, \quad \frac{\overline{\partial T}}{\partial p_h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial p_h}$$

identisch ebenso aus t und den C zusammengesetzt, wie die Größen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h}, \quad \frac{\partial T}{\partial p_h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial p_h}$$

der Gleichung 360). Letztere Größen erfüllen aber dann letztere Gleichung identisch, d. h. für alle Werte der C und

des t. Daher tilgen sich auch die entsprechenden Glieder identisch in der Gleichung 368) und diese reduziert sich auf

$$369)\qquad \frac{d_1}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h} = -\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial p_h}.$$

Da nun Ω ein kleines Zusatzglied ist, so werden sich auch die Werte der Variabeln 366), wenigstens wenn die verstrichene Zeit nicht zu lange ist, nur wenig von denen der Variabeln 365) unterscheiden. Wir können daher angenähert in der ohnedies kleinen rechten Seite der letzten Gleichung letztere für erstere schreiben und die C konstant ansehen und erhalten:

$$369)\qquad \frac{d_1}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'_h} = -\frac{\partial \Omega}{\partial p_h}.$$

Dies sind s lineare Gleichungen zwischen den Größen dC/dt. Die Gleichungen 367) stellen nochmals s lineare Gleichungen zwischen denselben Größen dar, so daß alle diese Größen als Funktionen der Zeit bestimmt werden können. Ihre Werte für eine bestimmte Zeit stellen die $2s$ Integrationskonstanten dar.

Die $2s$ linearen Gleichungen für die dC/dt werden am leichtesten auf einem Umwege gelöst. Wir erteilen zu diesem Behufe bei der ungestörten Bewegung den C ganz willkürliche unendlich kleine Zuwächse ΔC_1, $\Delta C_2 \ldots \Delta C_{2s}$ und bezeichnen den Zuwachs, welchen die Variabeln 365) und irgendwelche Funktionen derselben dadurch erleiden, durch das vorgesetzte Δ. Wir multiplizieren ferner die Gleichung 369) mit Δp_h, die Gleichung 368) mit $-\Delta q_h$ und addieren alle diese Gleichungen, in denen dem h alle Werte von 1 bis s zu erteilen sind, dann folgt:

$$370)\qquad \sum_1^s {}_h\left(\Delta p_h \frac{d_1 q_h}{dt} - \Delta q_h \frac{d_1 p_h}{dt}\right) = -\sum_1^s {}_h \frac{\partial \Omega}{\partial p_h}\Delta p_h = -\Delta\Omega.$$

Hier wurde wieder q_h für $\partial T/\partial p'_h$ geschrieben; ferner bedeutet links die Größe $d_1 q_h$ den Zuwachs, den q_h erleidet, wenn die C irgendwelche Zuwächse dC_1, $dC_2 \ldots dC_{2s}$ erfahren, hat also denselben Sinn, wie die in 362) mit δq_h bezeichnete Größe. Nur daß bei $d_1 q_h$ die Zuwächse der C

mit $d\,C$, bei $\delta\,q_h$ aber mit $\delta\,C$ bezeichnet wurden. Ja es sind die $d\,C$ im Grunde auch willkürlich Zuwächse, da ja Ω ganz nach Belieben gewählt werden kann.

Es wird daher nach Gleichung 362) der Ausdruck

$$371)\qquad \sum_{h=1}^{h=s}(\Delta p_h\, d_1\, q_h - \Delta\, q_h\, d_1\, p_h),$$

wenn man alle p, p' und q durch die C und t ausdrückt, nur eine Funktion der Integrationskonstanten C und ihrer Zuwächse $\Delta\,C$ und $d\,C$ sein können. Natürlich muß er sowohl bezüglich der $d\,C$ als auch bezüglich der $\Delta\,C$ linear und homogen sein, wie der Ausdruck 363) bezüglich der $\delta\,C$ und $\Delta\,C$. Auch rechts können wir in Gleichung 370) im Ausdrucke für Ω die p durch die C und t ausdrücken. Da $\Delta\,\Omega$ der Zuwachs ist, der bloß dadurch entsteht, daß die C um die $\Delta\,C$ wachsen, so ist

$$\Delta\,\Omega = \sum_1^{2s}{}_h \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,C_h}\,\Delta\,C_h.$$

Nun sind aber die $\Delta\,C$ vollkommen willkürlich. Wir können daher links und rechts die mit je einem $\Delta\,C$ multiplizierten Glieder für sich einander gleich setzen. Wir erhalten so jedes $\partial\,\Omega/\partial\,C$ als lineare Funktion der $d\,C/d\,t$, deren Koeffizienten nicht die Zeit, nur die C enthalten, da die ganze linke Seite der Gleichung 370) die Zeit nicht enthält. Durch Auflösung dieser Gleichungen nach den $d\,C/d\,t$ erhalten wir umgekehrt letztere als lineare Funktionen der $\partial\,\Omega/\partial\,C$, deren Koeffizienten natürlich wieder nur die C, nicht die Zeit enthalten.

Die letzteren Gleichungen erhalten wir noch kürzer in folgender Weise: Wir bezeichnen die Werte der p und q für die Anfangszeit mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Wir können dieselben als die Integrationskonstanten C wählen, also die Variabeln 365), und daher auch die Größe Ω der rechten Seite der Gleichung 370) durch t und die $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ausdrücken. Da $\Delta\,\Omega$ der Zuwachs ist, den diese Größe bloß dadurch erfährt, daß die Integrationskonstanten die mit Δ bezeichneten Zuwächse erfahren, so wird dann:

372) $$\Delta\,\Omega = \sum_1^s {}^{h}\left(\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{p}_h}\Delta\,\mathfrak{p}_h + \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{q}_h}\Delta\,\mathfrak{q}_h\right).$$

Die linke Seite der Gleichung 370) reduziert sich für die Anfangszeit auf

373) $$\sum_1^s {}^{h}\left(\Delta\,\mathfrak{p}_h\frac{d_1\,\mathfrak{q}_h}{d\,t} - \Delta\,\mathfrak{q}_h\frac{d_1\,\mathfrak{p}_h}{d\,t}\right)$$

und da sie die Zeit nicht explizit enthält, muß sie zu allen Zeiten diesen Wert haben.

Der Index 1 beim Differentialzeichen kann jetzt wegbleiben, da $\mathfrak{p}_h$ und $\mathfrak{q}_h$ die Integrationskonstanten selbst sind, also von den Veränderungen, die sie erleiden, wenn man unter Konstanthaltung der Integrationskonstanten die Zeit wachsen läßt, keine Rede sein kann. Man erhält also, wenn man in 370) die Werte 372) und 373) substituiert:

$$\sum_1^s {}^{h}\left[\left(\frac{d\,\mathfrak{q}_h}{d\,t} + \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{p}_h}\right)\Delta\,\mathfrak{p}_h - \left(\frac{d\,\mathfrak{p}_h}{d\,t} - \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{q}_h}\right)\Delta\,\mathfrak{q}_h\right] = 0$$

und da die Werte sämtlicher Integrationskonstanten und daher auch der mit Δ bezeichneten Zuwächse derselben willkürlich sind, so folgt

374) $$\frac{d\,\mathfrak{q}_h}{d\,t} = -\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{p}_h}, \quad \frac{d\,\mathfrak{p}_h}{d\,t} = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{q}_h}.$$

Wollen wir lieber irgendwelche andere Integrationskonstanten $C_1, C_2, C_3 \ldots C_{2s}$ einführen, so können wir diese als Funktionen der $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ und umgekehrt ausgedrückt denken. Es ist also

$$\frac{d\,C_k}{d\,t} = \sum_1^s {}^{h}\left(\frac{\partial\,C_k}{\partial\,\mathfrak{p}_h}\frac{d\,\mathfrak{p}_h}{d\,t} + \frac{\partial\,C_k}{\partial\,\mathfrak{q}_h}\frac{d\,\mathfrak{q}_h}{d\,t}\right),$$

daher nach Substitution der Werte 374)

$$\frac{d\,C_k}{d\,t} = \sum_1^s {}^{h}\left(\frac{\partial\,C_k}{\partial\,\mathfrak{p}_h}\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{q}_h} - \frac{\partial\,C_k}{\partial\,\mathfrak{q}_h}\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\mathfrak{p}_h}\right),$$

Nun ist aber

375) $$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_h} = \sum_1^{2s}{}_k \frac{\partial \Omega}{\partial C_k}\frac{\partial C_k}{\partial \mathfrak{p}_h}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{q}_h} = \sum_1^{2s}{}_k \frac{\partial \Omega}{\partial C_k}\frac{\partial C_k}{\partial \mathfrak{q}_h},$$

daher

376) $$\frac{d C_k}{d t} = \sum_1^{2s}{}_l (C_k, C_l)\frac{\partial \Omega}{\partial C_l},$$

wobei symbolisch gesetzt wurde

377) $$(C_k, C_l) = \sum_1^{s}{}_h \left(\frac{\partial C_k}{\partial \mathfrak{p}_h}\frac{\partial C_l}{\partial \mathfrak{q}_h} - \frac{\partial C_k}{\partial \mathfrak{q}_h}\frac{\partial C_l}{\partial \mathfrak{p}_h}\right),$$

aus welcher Definition folgt:

378) $$(C_k, C_l) = -(C_l, C_k), \quad (C_k, C_k) = 0.$$

Wir haben bewiesen, daß die Koeffizienten der Gleichungen, welche die dC/dt durch die $\partial \Omega/\partial C$ ausdrücken, nur Funktionen der Integrationskonstanten sein können, es sind also die (C_k, C_l) konstante Größe. Natürlich ist der Zeitanfang vollkommen willkürlich; man kann also statt der $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ wieder die zu einer beliebigen Zeit t gehörigen Werte p, q setzen. Die Größe

379) $$(C_k, C_l) = \sum_1^{s}{}_h \left(\frac{\partial C_k}{\partial p_h}\frac{\partial C_l}{\partial q_h} - \frac{\partial C_k}{\partial q_h}\frac{\partial C_l}{\partial p_h}\right)$$

ist daher mit 377) vollkommen identisch und ebenfalls nur Funktion der Integrationskonstanten oder eine reine Konstante. Wenn daher $\varphi = C_k$ und $\psi = C_l$ zwei beliebige Integrale der Bewegungsgleichungen 360) sind, wobei φ und ψ Funktionen von t und den p und q sind, so muß der Wert der Größe

$$(C_k, C_l) = (\varphi, \psi) = \sum_1^{s}{}_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}\frac{\partial \psi}{\partial p_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_h}\frac{\partial \psi}{\partial q_h}\right)$$

wieder von der Zeit unabhängig sein.

Dieser Satz wurde von Poisson gefunden. Jacobi erkannte, daß er auch zur Ableitung eines neuen Integrales

aus zwei gefundenen benutzt werden kann. Sobald nämlich aus (φ, ψ) nicht alle p und q identisch herausfallen, so wird immer die Gleichung

$$(\varphi, \psi) = \text{konst.}$$

von denjenigen Werten der p und q, welche den Bewegungsgleichungen 360) genügen, erfüllt. Diese Gleichung ist also jedenfalls ein Integral der Bewegungsgleichungen. Sie muß aber nicht ein neues sein. Sie kann auch eine Kombination der beiden benutzten Integrale $\varphi = C_k$, $\psi = C_l$ sein, so daß sie von allen Werten der p, q, welche diesen Gleichungen genügen, ebenfalls erfüllt wird. Sie kann auch ein anderes schon bekanntes Integral sein.

§ 70. Beispiele.

Sei ein System materieller Punkte gegeben, für welches bezüglich zweier Koordinatenachsen, z. B. der x- und y-Achse, die Gleichungen des Flächenprinzips

$$380)\quad \sum_1^n {}^h m_h (y_h z'_h - z_h y'_h) = a, \qquad \sum_1^n {}^h m_h (z_h x'_h - x_h z'_h) = b$$

gelten. Dann können wir diese beiden Ausdrücke als φ und ψ, die rechtwinkligen Koordinaten aber als p wählen. Es reduziert sich (φ, ψ) auf

$$-\sum_1^n {}^h \frac{1}{m_h}\left(\frac{\partial a}{\partial z'_h}\,\frac{\partial b}{\partial z_h} - \frac{\partial a}{\partial z_h}\,\frac{\partial b}{\partial z'_h}\right) = \sum_1^n m_h (x_h y'_h - y_h x'_h).$$

Da dieser Ausdruck nach dem Poissonschen Satze konstant sein muß, so lehrt dieser, daß, wenn für ein System die beiden Gleichungen 380) bestehen, daraus die Richtigkeit der analogen Gleichung für die dritte Koordinatenachse folgt.

Hat man aus 376) die p in weiterer Annäherung gefunden, wobei rechts die C als konstant betrachtet werden können, da ihre kleinen Änderungen mit den kleinen Größen $\partial \Omega / \partial C$ multipliziert sind, so erscheinen daselbst zu den Integrationskonstanten gewisse kleine Funktionen der Zeit addiert. Man kann diese korrigierten Werte in Ω einsetzen und nach

Potenzen der neu hinzugekommenen Glieder entwickeln. Man erhält dann zu dem Werte des Ω, den wir bisher benutzten, noch ein Glied hinzu. Man kann nun wie früher die Integrationskonstanten wiederum so variieren, daß die Werte der p die Bewegungsgleichungen inklusive der neu hinzugekommenen Glieder erfüllen und schließlich in dieser Weise die Annäherung so weit treiben, als man will.

Als Beispiel betrachten wir wieder den Fall, wo die Abszisse p eines auf der Abszissenachse beweglichen materiellen Punktes durch die Gleichung

381) $$\frac{d^2 p}{d t^2} = - a^2 p - \frac{\partial \Omega}{\partial p}$$

bestimmt ist. Das letzte Glied sei die störende Kraft. Für die ungestörte Bewegung ist

382) $$p = \mathfrak{p} \cos a t + \frac{\mathfrak{q}}{a} \sin a t = C_1 \sin (a t + C_2),$$

$$q = p' = - a \mathfrak{p} \sin a t + \mathfrak{q} \cos a t = a C_1 \cos (a t + C_2).$$

Daraus folgt:

$$d_1 p = d \mathfrak{p} \cos a t + \frac{d \mathfrak{q}}{a} \sin a t, \quad \Delta p = \Delta \mathfrak{p} \cos a t + \frac{\Delta \mathfrak{q}}{a} \sin a t$$

$$d_1 q = -a d \mathfrak{p} \sin a t + d \mathfrak{q} \cos a t, \quad \Delta q = -a \Delta \mathfrak{p} \sin a t + \Delta \mathfrak{q} \cos a t$$

$$d_1 q \Delta p - d_1 p \Delta q = d \mathfrak{q} \Delta \mathfrak{p} - d \mathfrak{p} \Delta \mathfrak{q} = - \Delta \Omega d t,$$

wobei in Ω zu setzen ist $p = \mathfrak{p} \cos a t + \frac{\mathfrak{q}}{a} \sin a t$. Daher folgt

383) $$\frac{d \mathfrak{p}}{d t} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{q}}, \quad \frac{d \mathfrak{q}}{d t} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}}.$$

Lautet die Gleichung 381) so: $\frac{d^2 p}{d t^2} = - a^2 p + f(t)$, so ist

$$\Omega = - p f(t) = - \mathfrak{p} f(t) \cos a t - \frac{\mathfrak{q}}{a} f(t) \sin a t.$$

Es folgt daher aus 383)

384) $$\mathfrak{p} = - \frac{1}{a} \int f(t) \sin (a t) d t, \quad \mathfrak{q} = \int f(t) \cos (a t) d t.$$

Man sieht leicht, daß die hier behandelte Methode in diesem einfachen Falle mit der Methode identisch ist, nach welcher

aus dem allgemeinen Integrale einer linearen Differentialgleichung ohne zweiten Teil das der entsprechenden mit zweitem Teile abgeleitet wird und welche man gemeiniglich ebenfalls die Methode der Variation der Konstanten zu nennen pflegt. Wollte man die Konstanten C einführen, so wäre

$$C_1 = \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{a^2}} = \sqrt{\mathfrak{p}^2 + \frac{\mathfrak{q}^2}{a^2}},$$

$$C_2 = \operatorname{arctg} \frac{a p}{q} - a t = \operatorname{arctg} \frac{a \mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} - a t_0,$$

$$(C_1, C_1) = (C_2, C_2) = 0,$$

$$(C_1, C_2) = -(C_2, C_1) = \frac{\partial C_1}{\partial q} \frac{\partial C_2}{\partial p} - \frac{\partial C_1}{\partial p} \frac{\partial C_2}{\partial q} =$$

$$= \frac{\partial C_1}{\partial \mathfrak{q}} \frac{\partial C_2}{\partial \mathfrak{p}} - \frac{\partial C_1}{\partial \mathfrak{p}} \frac{\partial C_2}{\partial \mathfrak{q}} = \frac{1}{a C_1},$$

$$\Omega = - C_1 f(t) \sin(a t + C_2).$$

Die Gleichungen 376) gehen daher über in

385) $$\frac{d C_1}{d t} = \frac{f(t)}{a} \cos(a t + C_2), \qquad \frac{d C_2}{d t} = - \frac{f(t)}{a C_1} \sin(a t + C_2).$$

Würde man aus den Gleichungen 385) C_1 und C_2 exakt bestimmen und diese Werte in die Gleichung 381) substituieren, so würde man eine exakte Lösung der Aufgabe erhalten, dagegen nur eine angenäherte, wenn man die Gleichungen 385) dadurch in lineare verwandeln würde, daß man auf der rechten Seite dieser Gleichungen, wo noch der sehr kleine Faktor $f(t)$ dabei steht, C_1 und C_2 als Konstanten ansähe. Jedenfalls aber erhält man eine exakte Lösung, wenn man die Werte 384) für $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ in die Formel 382) einsetzt, und $\frac{\partial \Omega}{\partial p}$ bloß als Funktion der Zeit gegeben ist. Enthält es dagegen noch p, so kann man folgendes sukzessives Annäherungsverfahren einschlagen. Man gibt den bisher mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ bezeichneten Konstanten den Index Null, den variabeln Größen, welche bei der zweiten Annäherung sich zu ihnen dazu addieren, den Index Eins, denen die beim dritten Grade der Annäherung sich weiter dazu addieren, den Index Zwei etc. Dann ist in erster Annäherung

$$p = \mathfrak{p}_0 \cos(a t) + \frac{\mathfrak{q}_0}{a} \sin(a t),$$

Ω aber, welches wir als Funktionen von p und t in der Form $\Omega(p, t)$ schreiben, gleich

$$\Omega_0 = \Omega\left(\mathfrak{p}_0 \cos a t + \frac{\mathfrak{q}_0}{a} \sin a t, t\right).$$

Man erhält daher statt der Formeln 383)

$$\mathfrak{q}_1 = -\int d t\, \Omega'_0 \cos(a t), \qquad \mathfrak{p}_1 = \frac{1}{a}\int d t \sin a t\, \Omega'_0 .$$

Dabei sollen $\Omega', \Omega'' \ldots$ die sukzessiven partiellen Ableitungen des Ω nach p sein. Der Index Null bedeutet, daß hinterher $\mathfrak{p}_0 \cos a t + \frac{\mathfrak{q}_0}{a} \sin a t$ für p zu setzen ist. Es ist also in zweiter Annäherung

$$p = (\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1) \cos a t + \frac{\mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_1}{a} \sin a t$$

und zu Ω_0 tritt das Glied hinzu:

$$\left(\mathfrak{p}_1 \cos a t + \frac{\mathfrak{q}_1}{a} \sin a t\right) \Omega'_0 = \Omega_1 .$$

Man erhält daher eine weitere Annäherung, wenn man zu $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ noch die Größen $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_2$ addiert. Dabei ist:

$$\mathfrak{p}_2 = \int d t \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathfrak{q}_0} = \frac{1}{a^2}\int d t\, \Omega''_0 \sin a t \left[\cos a t \int \Omega'_0 \sin a t\, d t - \right.$$
$$\left. - \sin a t \int \Omega'_0 \cos a t\, d t\right] + \frac{1}{a^2}\int d t\, \Omega'_0 \left[\cos a t \int d t\, \Omega''_0 \sin^2 a t - \right.$$
$$\left. - \sin a t \int d t\, \Omega''_0 \sin a t \cos a t .\right.$$

Ein analoger Ausdruck folgt für $\mathfrak{q}_2 = \int d t \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathfrak{p}_0}$. Der Wert

$$p = (\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2) \cos a t + \frac{\mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2}{a} \sin a t$$

bildet also den dritten Grad der Annäherung. Die Integrationen reduzieren sich, wenn Ω als Funktion von p und t gegeben ist, auf Quadraturen, die aber natürlich bald sehr weitschweifig werden.

§ 71. Direkte Methode der Variation der Konstanten.

Die bisher befolgte Lagrangesche Methode gewährt zwar manchen Einblick in den inneren Zusammenhang; doch ist sie immerhin mehr indirekt. Wir wollen daher die im § 69 gewonnenen Resultate unabhängig von der dortigen Beweisführung nochmals ableiten. Wir führen sogleich die Variabeln p und q ein, schreiben also die Bewegungsgleichungen für das unvariierte Problem in der Form:

386) $$\frac{d p_h}{d t} = \frac{\partial_q E}{\partial q_h}, \quad \frac{d q_h}{\partial t} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_h},$$

für das variierte aber in der Form:

387) $$\frac{d p_h}{d t} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad \frac{d q_h}{d t} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_h} - \frac{\partial \Omega}{\partial p_h},$$

wobei T die lebendige Kraft, V die Kraftfunktion des unvariierten, $V + \Omega$ die des variierten Problems und $E = T + V$ ist.

Es seien $C_1, C_2 \ldots C_{2s}$ willkürliche voneinander unabhängige Kostanten,

388) $$\varphi_k(p, q, t) = C_k, \quad k = 1, 2 \ldots 2s,$$

die Integrale des unvariierten Problems also der Gleichungen 386), so daß

389) $$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_1^s {}_h \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \frac{\partial E}{\partial q_h} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{\partial E}{\partial p_h} \right) = 0$$

ist. Wir wollen nun die C_k gleich solchen mit einer willkürlichen Konstanten vermehrten Funktionen der Zeit setzen, daß 388) die Integrale des variierten Problems, also der Gleichungen 387) werden. Aus 388) folgt zunächst:

390) $$\frac{d C_k}{d t} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_1^s {}_h \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \frac{d p_h}{d t} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{d q_h}{d t} \right).$$

Solange die C konstant sind, müssen die Gleichungen 388) die Integrale der Gleichungen 386) sein. Die bei Konstanz der C aus 388) gebildeten Werte von

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h}$$

müssen daher die Gleichungen 389) identisch erfüllen. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes erhält man, wenn man in Gleichung 390) für $\frac{d p_h}{d t}$ und $\frac{d q_h}{d t}$ ihre Werte aus 387) substituiert, was erlaubt ist, da ja die C so als Funktionen der Zeit gewählt werden sollen, daß die Gleichungen 387) erfüllt sind

$$\frac{d C_k}{d t} = -\sum_1^s {}_h \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{\partial \Omega}{\partial p_h}.$$

Dafür kann man auch schreiben:

391) $$\frac{d C_k}{d t} = \sum_1^s {}_h \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{\partial \Omega}{\partial p_h} \right) = (\varphi_k, \Omega),$$

da ja Ω die q nicht enthält, daher $\partial \Omega / \partial q_h = 0$ ist. Da Ω klein ist, können in der letzten Gleichung rechts für p und q die für das unvariierte Problem geltenden Funktionen der Zeit gesetzt werden. Wir wollen nun die partiellen Differentialquotienten $\partial \varphi_1 / \partial p_h \ldots$ einfach mit $\partial C_1 / \partial p_h \ldots$ bezeichnen, um nicht beide Buchstaben φ und C mitschleppen zu müssen. Daher schreiben wir auch in Gleichung 391) $\partial C_k / \partial p_h$ und $\partial C_k / \partial q_h$ für $\partial \varphi / \partial p_h$ und $\partial \varphi / \partial q_h$.

Denken wir Ω durch t und die C ausgedrückt, so wird

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_h} = \sum_{l=1}^{l=2s} \frac{\partial \Omega}{\partial C_l} \frac{\partial C_l}{\partial p_h}, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} = \sum_{l=1}^{l=2s} \frac{\partial \Omega}{\partial C_l} \frac{\partial C_l}{\partial q_h} = 0,$$

daher verwandelt sich Gleichung 391) in

392) $$\frac{d C_k}{d t} = \sum_1^{2s} {}_l (C_k, C_l) \frac{\partial \Omega}{\partial C_l},$$

wodurch die Gleichung 376) in einfachster Weise bewiesen ist. (C_k, C_l) ist wie dort durch die Gleichung 379) gegeben. Doch haben wir hier keinen Beweis erbracht, daß nicht (C_k, C_l) außer den C auch noch die Zeit explizit enthalten könne. Es hat jedoch keine Schwierigkeit diesen Beweis

ebenfalls direkt zu führen. Seien $C_k = \varphi(p, q, t)$ und $C_l = \psi(p, q, t)$ zwei der Integrale 388), so ist nach 379) die Definition von (C_k, C_l) die folgende:

$$(C_k, C_l) = \sum_1^s{}_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \frac{\partial \psi}{\partial q_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \frac{\partial \psi}{\partial p_h} \right),$$

daher ist

$$393) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(C_k, C_l)}{dt} = \sum_1^s{}_h \Big(& \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial q_h} + \frac{\partial \psi}{\partial q_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} - \\ & - \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial p_h} - \frac{\partial \psi}{\partial p_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \Big), \end{aligned} \right.$$

da $\varphi = C_k$ ein Integral der Gleichungen 386) ist, so hat man analog mit 389)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_1^s{}_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} \right) = 0.$$

Durch partielle Differentiation dieser identischen Gleichungen nach p_h oder q_h folgt

$$394) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial p_h} = \sum_1^s{}_i \Big(& \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_h \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_h} - \\ & - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_h} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_h \partial q_i} \Big), \end{aligned} \right.$$

$$395) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial q_h} = \sum_1^s{}_i \Big(& \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_h \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial q_h} - \\ & - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial q_h} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial^2 E}{\partial q_h \partial q_i} \Big). \end{aligned} \right.$$

Anderseits folgt direkt, indem man wieder für dp_h/dt und dq_h/dt die Werte 386) substituiert:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial p_h} + \sum_1^s{}_i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_h \partial p_i} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_h \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial q_k} + \sum_1^s \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial q_h} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_h \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} \right);$$

die Substitution der Werte 394) und 395) in diese Gleichungen liefert:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\right) = \sum_1^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial^2 E}{\partial p_k \partial q_i}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\right) = \sum_1^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial q_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial^2 E}{\partial q_k \partial q_i}\right).$$

Die Werte von $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_k}\right)$ und $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right)$ findet man, indem man ψ mit φ vertauscht. Substituiert man diese vier Werte in 393), so erhält man rechts eine Doppelsumme, in der sich, wie man leicht sieht, je zwei Glieder heben. Es folgt also $d(C_k, C_l)/dt = 0$, (C_k, C_l) kann die Zeit nicht explizit enthalten.

§ 72. Einführung der Hamiltonschen Konstanten.

Wir haben das Problem jetzt in der allgemeinsten Weise gelöst und in den Gleichungen 392) ganz beliebige Integrationskonstanten eingeführt. Diese Gleichungen vereinfachen sich, wie Jacobi gezeigt hat, enorm, wenn man solche Integrationskonstanten einführt, wie man sie bei der Integration der Differentialgleichungen 386) des ungestörten Problems nach der Hamiltonschen Methode erhält.

Man hat da zuerst ein vollständiges Integral der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{dt} + E = 0$$

zu suchen, welches s voneinander unabhängige Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_s$ enthält, von denen keine additiv zu W hinzukommt. Die Gleichungen

$$\text{396)} \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2 \ldots \frac{\partial W}{\partial \alpha_s} = \beta_s$$

sind dann Integralgleichungen der Gleichungen 386), d. h. sie drücken die p als Funktionen der $2s$ willkürlichen Integrationskonstanten α und β so aus, daß die Gleichungen 386) erfüllt sind. Die α und β sind also $2s$ will-

kürliche Integrationskonstanten und da die Formeln 392) von beliebigen derartigen Integrationskonstanten gelten, so müssen sie auch von den α und β gelten. Wir können diese so als Funktionen der Zeit mit additiven willkürlichen Konstanten bestimmen, daß die Gleichungen 396) die Integrale der Gleichungen 387) sind. Dazu ist erforderlich, daß die α und β den den Gleichungen 392) analogen Gleichungen:

397) $$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_k}{dt} = \sum\limits_1^s (\alpha_k, \alpha_l)\dfrac{\partial \Omega}{\partial \alpha_l} + \sum\limits_1^s (\alpha_k, \beta_l)\dfrac{\partial \Omega}{\partial \beta_l} \\ \dfrac{d\beta_k}{dt} = \sum\limits_{l=1}^{l=s} (\beta_k, \alpha_l)\dfrac{\partial \Omega}{\partial \alpha_l} + \sum\limits_{l=1}^{l=s} (\beta_k, \beta_l)\dfrac{\partial \Omega}{\partial \beta_l}, \end{cases}$$

genügen. Es ist

398) $$(\alpha_k, \alpha_l) = \sum_{h=1}^{h=s}\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_h}\frac{\partial \alpha_l}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h}\frac{\partial \alpha_l}{\partial p_h}\right)$$

und ähnliche Bedeutungen haben (α_k, β_l) und (β_k, β_l). Hierbei ist jedoch jedes α oder β als Funktion der p, q und von t ausgedrückt zu denken.

Wir wollen Kürze halber jede partielle Differentiation von W nach α_h durch den oben angehängten Index h, jede nach p_k durch den unten angehängten Index k markieren, so daß z. B.

$$W_{12}^{34} = \frac{\partial^4 W}{\partial p_1 \partial p_2 \partial \alpha_3 \partial \alpha_4}$$

ist. Dann können wir die Gleichungen 396) so schreiben

399) $$W^h = \beta_h,$$

wogegen die q aus den Gleichungen

400) $$W_h = q_h$$

folgen.

Wollen wir die in 398) vorkommende Größe $\partial \alpha_k / \partial p_h$ bestimmen, so haben wir p_h und dp_h wachsen zu lassen; dagegen alle übrigen p und alle q und t als Konstanten anzusehen. Sämtliche α werden sich dabei verändern. $d\alpha_h$ sei der Zuwachs von α_h. Es folgt daher aus 400)

401) $$\begin{cases} W_1^1 d\alpha_1 + W_1^2 d\alpha_2 \ldots W_1^s d\alpha_s + W_{1h} dp_h = 0 \\ W_2^1 d\alpha_1 + W_2^2 d\alpha_2 \ldots W_2^s d\alpha_s + W_{2h} dp_h = 0 \\ \cdots\cdots \\ W_s^1 d\alpha_1 + W_s^2 d\alpha_2 \ldots W_s^s d\alpha_s + W_{sh} dp_h = 0. \end{cases}$$

Setzen wir

402) $$\Delta = \begin{vmatrix} W_1^1, W_1^2 \ldots W_1^s \\ W_2^1, W_2^2 \ldots W_2^s \\ \cdots\cdots \\ W_s^1, W_s^2 \ldots W_s^s \end{vmatrix}$$

und bezeichnen die Unterdeterminante nach W_h^k mit Δ_h^k, setzen also

403) $$\Delta_h^k = \frac{\partial \Delta}{\partial W_h^k},$$

so folgt aus 401)

$$\frac{d\alpha_k}{dp_h} = -\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{i=s} W_{ih}\Delta_i^k.$$

Hier ist aber $d\alpha_k$ derjenige Zuwachs des α_k, der entstand, indem nur p_h und dp_h wuchs, während die übrigen p und alle q konstant blieben. Es ist also die so berechnete Größe $d\alpha_k/dp_h$ das, was in 398) mit $\partial\alpha_k/\partial p_h$ bezeichnet wurde und man hat

404) $$\frac{\partial\alpha_k}{\partial p_h} = -\frac{1}{\Delta}\sum_1^s \Delta_i^k W_{ih}.$$

Will man $\partial\alpha_k/\partial q_h$ finden, so sind alle p und alle q außer q_h konstant zu lassen. Daher folgt aus 400)

$$\begin{aligned} W_1^1 \; d\alpha_1 + W_1^2 \; d\alpha_2 \ldots W_1^s \; d\alpha_s &= 0 \\ \cdots\cdots \\ W_h^1 \; d\alpha_1 + W_h^2 \; d\alpha_2 \ldots W_h^s \; d\alpha_s &= dq_h \\ W_{h+1}^1 d\alpha_1 + W_{h+1}^2 d\alpha \; \ldots W_{h+1}^s ds &= 0. \\ \cdots\cdots \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $d\alpha_k/dq_h$, also die in 398) mit $\partial\alpha_k/\partial q_h$ bezeichnete Größe, gleich

405) $$\frac{\partial\alpha_k}{\partial q_h} = \frac{1}{\Delta}\Delta_h^k.$$

Aus 399) findet man, wenn alle p konstant sind

406) $$d\beta_k = W^{1k} d\alpha_1 + W^{2k} d\alpha_2 \ldots W^{sk} d\alpha_s.$$

Wir wollen nun auch alle q bis auf q_h konstant, letzteres aber um dq_h wachsen lassen. Die Quotienten von dq_h in die dabei entstehenden Zuwächse von $d\beta_h$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2 \ldots$ sind die von uns mit $\partial\beta_k/\partial q_h$, $\partial\alpha_1/\partial q_h \ldots$ bezeichneten Größen. Die Division von 406) durch dq_h liefert daher

407) $$\frac{\partial\beta_k}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^{i=s} W^{ik}\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_h}.$$

Sind endlich alle q und alle p bis auf p_h konstant, welches letztere um dp_h wächst, so folgt aus 399)

$$d\beta_k = W_h^k dp_h + \sum_1^s W^{ik} d\alpha_i$$

und die Division durch dp_h liefert

408) $$\frac{\partial\beta_k}{\partial p_h} = W_h^k + \sum_1^s W^{ik}\frac{\partial\alpha_i}{\partial p_h}.$$

Substituieren wir in

409) $$(\alpha_k, \alpha_l) = \sum_{h=1}^{h=s}\left(\frac{\partial\alpha_k}{\partial p_h}\frac{\partial\alpha_l}{\partial q_h} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial q_h}\frac{\partial\alpha_l}{\partial p_h}\right)$$

die Werte 404) und 405), so folgt

$$(\alpha_k, \alpha_l) = \frac{1}{\Delta^2}\sum_{h=1}^{h=s}\sum_{i=1}^{i=s}(\Delta_i^k\Delta_h^l - \Delta_h^k\Delta_i^l)\, W_{ih}.$$

In dieser Doppelsumme ist der Koeffizient von W_{hi} gleich und entgegengesetzt bezeichnet, wie der von W_{ih}. Da aber $W_{hi} = W_{ih}$, so hebt sich das Glied mit W_{hi} gegen das mit W_{ih} und daher heben sich überhaupt je zwei Glieder der Doppelsumme gegenseitig und man hat also

410) $$(\alpha_k, \alpha_l) = 0.$$

Wir wollen nun in den Ausdruck

$$(\alpha_k, \beta_l) = -(\beta_l, \alpha_k) = \sum_{h=1}^{h=s}\left(\frac{\partial\alpha_k}{\partial p_h}\frac{\partial\beta_l}{\partial q_h} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial q_h}\frac{\partial\beta_l}{\partial p_h}\right)$$

zunächst nur für

$$\frac{\partial \beta_l}{\partial q_h} \text{ und } \frac{\partial \beta_l}{\partial p_h}$$

die Werte 407) und 408) substituieren. Es folgt

$$(\alpha_k, \beta_l) = -\sum_{h=1}^{h=s} \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} W_h^l + \sum_{i=1}^{i=s} W^{il} \sum_{h=1}^{h=s} \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_h}\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h}\frac{\partial \alpha_i}{\partial p_h}\right).$$

Im zweiten Addenden rechts ist die nach h genommene Doppelsumme nichts anderes als (α_k, α_i), verschwindet also nach 410). Im ersten Summanden substituieren wir für $\partial \alpha_k / \partial q_h$ den Wert 405). Nach einem bekannten Satze der Determinantenlehre ist gemäß der Definitionen 402) und 403)

$$\sum_1^s {}_h W_h^l \Delta_h^k$$

gleich Null oder gleich Δ, je nachdem k gleich l oder davon verschieden ist. Daher ist auch

$$411) \quad \begin{cases} (\alpha_k, \beta_l) = -(\beta_l, \alpha_k) = -1 & \text{für } k = l, \\ (\alpha_k, \beta_l) = -(\beta_l, \alpha_k) = 0 & \text{für } k \lessgtr l. \end{cases}$$

Substituiert man endlich in

$$(\beta_k, \beta_l) = \sum_{h=1}^{h=s} \left(\frac{\partial \beta_k}{\partial p_h}\frac{\partial \beta_l}{\partial q_h} - \frac{\partial \beta_k}{\partial q_h}\frac{\partial \beta_l}{\partial p_h}\right)$$

die Werte 407) und 408), so erhält man drei Glieder.

1. Die dreifache Summe

$$\sum_1^s {}_i \sum_1^s {}_j W^{ik} W^{jl} \sum_1^s {}_h \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial p_h}\frac{\partial \alpha_j}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_h}\frac{\partial \alpha_j}{\partial p_h}\right),$$

welche verschwindet, da die nach h zu nehmende Summe gleich (α_i, α_j) ist.

2. Vermöge des nach 408) außerhalb der Summe stehenden Gliedes von $\partial \beta_k / \partial p_h$ die Doppelsumme

$$\sum_{i=1}^{i=s} W^{il} \sum_{h=1}^{h=s} W_h^k \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_h},$$

welche sich durch Substitution des Wertes 405) unter Anwendung der soeben angewendeten Sätze über Determinanten auf W^{kl} reduziert.

3. Vermöge des analogen Gliedes von $\partial \beta_l / \partial p_h$ die Doppelsumme

$$-\sum_{i=1}^{i=s} W^{ik} \sum_{h=1}^{h=s} W_h^l \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_h},$$

welche sich ebenso auf $-W^{kl}$ reduziert. Es ist also allgemein

412) $$(\beta_k, \beta_l) = 0.$$

Vermöge der Relationen 410), 411) und 412) nehmen die Gleichungen 397) die einfache Form an:

413) $$\frac{d \alpha_k}{d t} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_k}, \quad \frac{d \beta_k}{d t} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k}.$$

§ 73. Integration des Störungsproblems durch eine der Hamiltonschen analoge partielle Differentialgleichung.

Die Konstanten α in dem vollständigen Integral W der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung 294) sind irgendwelche Funktionen der Anfangswerte $\mathfrak{p}$ der Koordinaten. Wir können sie jedenfalls gleich den $\mathfrak{p}$ selbst setzen. Dann wird nach 292)

$$\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{p}_h} = -\mathfrak{q}_h.$$

Die β werden also gleich den negativen $\mathfrak{q}$. Wir können also in den Gleichungen 413) die α den $\mathfrak{p}$ gleichsetzen. Dann werden die β gleich den negativen $\mathfrak{q}$ und erhalten so wieder die Gleichungen 374), von denen wir in der Beweisführung des § 69 ausgingen.

Wir sahen in § 58, daß jedesmal, wenn zwischen den $2s$ Variabeln $p_1, p_2, \ldots q_s$ Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d p_h}{d t} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad \frac{d q_h}{d t} = -\frac{\partial E}{\partial p_h}$$

bestehen, wobei E eine beliebige Funktion $E(p, q, t)$ der p, q und der Zeit sein kann und keineswegs bezüglich der q homogen und vom zweiten Grade sein muß, deren Integrale aus einem vollständigen Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E\left(p, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0,$$

welche der Hamiltonschen vollkommen analog ist, hergeleitet werden können. Dies gilt also auch hier, da die Gleichungen 413) genau die in Rede stehende Form haben. Die entsprechende partielle Differentialgleichung wäre, wenn wir das betreffende W mit dem Index 1 versehen:

414) $$\frac{\partial W_1}{\partial t} - \Omega = 0$$

wo in Ω die p und q durch t, α und β auszudrücken sind und nachher für jedes β_h zu setzen ist $\frac{\partial W}{\partial \alpha_h}$.

Nehmen wir an, wir hätten ein vollständiges Integral dieser partiellen Differentialgleichung $W_1(\alpha_h, \alpha'_h, t)$ gefunden, wobei die α'_h die s unabhängigen Integrationskonstanten sind, von denen keine additiv zu W hinzukommen darf. Dann sind durch die Gleichungen

$$\frac{\partial W_1}{\partial \alpha'_h} = \beta'_h$$

die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen 413) gegeben. Die α' und β' sind die $2s$ Integrationskonstanten. Übrigens würde nichts hindern, die Rolle der α und β zu vertauschen. Dann würde

$$\frac{\partial W_1}{dt} + \Omega = 0,$$

die partielle Differentialgleichung und die α wären durch $\partial W_1 / \partial \beta$ zu ersetzen.

Man kann übrigens in der folgenden Weise umgekehrt, die partielle Differentialgleichung 414) direkt ableiten, und so W_1 durch die früher eingeführten Funktionen ausdrücken.

Sei W_0 ein vollständiges Integral der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} + E = \frac{\partial W_0}{\partial t} + T + V = 0$$

für das ungestörte Problem. α seien die s Konstanten desselben.

415)
$$\frac{\partial W_0}{\partial \alpha_h} = \beta_h$$

seien die Integrale der Gleichungen 386) des ungestörten Problems, die entsprechenden q sind durch die Gleichungen

416)
$$\frac{\partial W_0}{\partial p_h} = q_h$$

gegeben. Es sei nun W die Wirkungsfunktion für das variierte Problem, also

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E + \Omega = 0,$$

wobei W als Funktion von t, p und deren Anfangswerte p^0 ausgedrückt zu denken ist. Dann ist bei konstanten p^0

417)
$$\frac{d W}{d t} = \frac{\partial W}{\partial t} d t + \sum \frac{\partial W}{\partial p_h} d p_h = -(E + \Omega) d t + \sum q_h d p_h .$$

Es sollen nun in den Gleichungen 415) die α und β gleich solchen Funktionen der Zeit gesetzt werden, daß die daraus folgenden Werte von p die Lösungen der Gleichungen 387) für das gestörte Problem sind. Setzt man in W_0 ebenfalls α und β gleich diesen Funktionen der Zeit, so soll es in $\overline{W}_0$ übergehen, was keineswegs mit W identisch ist, da $\overline{W}_0$ die Größe ist, in welche

$$\int_{t_0}^{t} (T + V) d t$$

übergeht, wenn man vor Ausführung der Integration darin die p und q aus den Gleichungen 415) und 416) entnimmt, und dabei α und β konstant betrachtet und erst nach Aus-

führung der Integration α und β gleich den betreffenden Funktionen der Zeit setzt, wogegen in

$$W = \int_{t_0}^{t} (T + V + \Omega)\, dt$$

die p und q zwar auch den Gleichungen 415) und 416) zu entnehmen, aber schon vor Ausführung der Integration die α und β als Funktionen der Zeit zu betrachten sind. Es folgt

$$d\overline{W}_0 = \frac{\partial W_0}{\partial t} dt + \sum_1^s {}^h \frac{\partial W_0}{\partial p_h} dp_h + \sum_1^s {}^h \frac{\partial W_0}{\partial \alpha_h} d\alpha_h$$

und da die Gleichungen 415) und 416) bei konstanten α und β genau ebenso wie bei variabeln aussehen

$$d\,\overline{W}_0 = -E\,dt + \sum_1^s {}^h q_h\, dp_h + \sum_1^s {}^h \beta_h\, d\alpha_h .$$

Subtrahiert man hiervon die Gleichung 417), so folgt also

$$d(\overline{W}_0 - W) = \Omega\, dt + \sum_1^s {}^h \beta_h\, d\alpha_h .$$

Bezeichnen wir nun die Differenz $\overline{W}_0 - W$ mit W_1, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = \Omega, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_h} = \beta_h .$$

Drückt man in der ersten dieser Gleichungen Ω durch t und die α und β aus und substituiert statt der β wieder $\frac{\partial W}{\partial \alpha}$, so hat man wieder die partielle Differentialgleichung, welche der Hamiltonschen vollkommen analog ist.

§ 74. Anwendung auf die Astronomie.

Wir haben schon in § 67 bemerkt, daß wir alle physikalischen Probleme ohne Ausnahme nur angenähert zu lösen vermögen, so daß der Fall die Regel bildet, daß größere

Annäherungen an die Wirklichkeit nach einer Methode gefunden werden müssen, welche dem Wesen nach mit der eben entwickelten Störungsrechnung übereinstimmt. Die höchste Vollendung hat aber diese Störungsrechnung in der Astronomie gefunden und es sei daher hier gestattet, die Grundprinzipien der astronomischen Störungstheorie gewissermaßen als typisches Beispiel zu entwickeln.

Wir betrachten zu diesem Behufe die Sonne samt allen Planeten und stellen uns die Aufgabe, die Störungen zu berechnen, welche die Bahn eines derselben (wir wollen ihn Kürze halber den Mars nennen) durch die übrigen Planeten erfährt. Wir betrachten sämtliche Himmelskörper als materielle Punkte von bestimmter Masse, welche nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze aufeinander wirken. Wir beziehen sie zunächst auf ein fest mit dem Fixsternhimmel verbundenes Koordinatensystem. Sei m_s die Sonnenmasse, ξ_s, η_s, ζ_s ihre rechtwinkligen Koordinaten zu einer bestimmten Zeit t. Dieselben Größen sollen zur selben Zeit für den Mars die Werte m_0, ξ_0, η_0, ζ_0, für die anderen Planeten m_1, ξ_1, η_1, ζ_1, m_2, ξ_2, η_2, $\zeta_2 \ldots m_n$, ξ_n, η_n, ζ_n haben. Ferner sei r_{hk} die Entfernung der Masse mit dem Index h und der mit dem Index k und $\varkappa$ die Gravitationskonstante.

Dann können die Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden

$$\frac{d^2 \xi_h}{d t^2} = - \varkappa \sum_{s,0}^{n} {}^k \frac{(\xi_h - \xi_k) m_k}{r_{hk}^3}.$$

Dabei wurde mit m_h wegdividiert. Dem h kann jeder der Werte s, 0, 1, 2 ... n erteilt werden und ebenso ist die Summe so zu verstehen, daß dem k die Werte s, 0, 1, 2 ... n zu erteilen sind. Das Glied, für welches $h = k$ ist, ist aus der Summe wegzulassen. Analoge Gleichungen gelten für die y- und z-Achse.

Wir setzen nun

$$\xi_h - \xi_s = x_h, \quad \eta_h - \eta_s = y_h, \quad \zeta_h - \zeta_s = z_h$$
$$\varrho_h = \sqrt{x_h^2 + y_h^2 + z_h^2} = r_{sh},$$

so daß ϱ_k die Entfernung des Planeten mit der Masse m_k von der Sonne ist und

$$r_{hk} = \sqrt{(x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2}$$

wird. Dann lautet die auf die x-Achse bezügliche Bewegungsgleichung für die Sonne

$$\frac{d^2 \xi_s}{d t^2} = \frac{\varkappa m_0 x_0}{\varrho_0^3} + \varkappa \sum_1^n k \frac{m_k x_k}{\varrho_k^3},$$

die entsprechende Gleichung für den Mars aber lautet

$$\frac{d^2 \xi_0}{d t^2} = - \frac{\varkappa m_s x_0}{\varrho_0^3} - \varkappa \sum_1^n k \frac{m_k (x_0 - x_k)}{r_{0k}^3}.$$

Die Subtraktion der beiden letzten Gleichungen liefert

$$\frac{d^2 x_0}{d t^2} = - \frac{\varkappa (m_0 + m_s) x_0}{\varrho_0^3} - \varkappa \sum_1^n k m_k \left(\frac{x_k}{\varrho_k^3} + \frac{x_0 - x_k}{r_{0k}^3} \right).$$

Analoge Gleichungen gelten für die y- und z-Richtung. Wir werden im folgenden den Index Null weglassen, die übrigen Indizes aber unverändert beibehalten, so daß die letzte Gleichung sich so schreibt

$$418) \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = - \varkappa \frac{(m_s + m) x}{\varrho^3} - \varkappa \sum_1^n k m_k \left(\frac{x_k}{\varrho_k^3} + \frac{x - x_k}{r_k^3} \right)$$

mit zwei analogen, für die y- und z-Richtung.

Hier sind x, y, z die Koordinaten des Planeten, dessen Störung wir bestimmen wollen bezüglich eines Koordinatensystems OX, OY, OZ, dessen Koordinatenachsen fixe Richtungen im Raume (gegen den Fixsternhimmel) haben, dessen Ursprung aber immer im Sonnenmittelpunkte liegt. Die zeitlichen Änderungen von x, y, z bestimmen also die Bewegung des Mars relativ gegen die Sonne, also jene Bewegung, welche gerade der Beobachtung zugänglich ist. x_k, y_k, z_k sind die Koordinaten irgend eines anderen Planeten relativ gegen das Koordinatensystem OX, OY, OZ, also relativ gegen die Sonne,

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ist die Entfernung des Mars von der Sonne,

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}$$

die von jenem anderen Planeten,

$$\varrho_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}$$

die jenes anderen Planeten von der Sonne.

Es stellt nun das erste Glied der rechten Seite der Gleichung 418) die ungestörte Bewegung des Mars relativ gegen die Sonne dar, welche genau so erfolgt, wie seine absolute Bewegung im Raume erfolgen würde, wenn die Sonne ein im Raume fixer Zentralkörper von der Masse $m_s + m$ wäre; die übrigen Glieder aber stellen die Störungen durch die anderen Planeten dar. Alle betreffenden Kräfte haben eine Kraftfunktion. Setzt man nämlich

$$419)\quad V = -\frac{\varkappa(m_s + m)}{\varrho}, \quad \Omega = \varkappa \sum_1^n {}_k\, m_k \left(\frac{x x_k + y y_k + z z_k}{\varrho_k^3} - \frac{1}{r_k} \right),$$

so kann die Gleichung 415) so geschrieben werden:

$$419a)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{d t^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, & \dfrac{d^2 y}{d t^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ & \dfrac{d^2 z}{d t^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{cases}$$

Es ist also V die Kraftfunktion bei der ungestörten Bewegung, Ω die der störenden Kräfte. Wir haben daher folgende beiden Aufgaben zu lösen: 1. Wir haben die ungestörte Bewegung mittels der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung zu bestimmen, wobei wir sechs Integrationskonstanten α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 erhalten. 2. Wir haben statt dieser Konstanten mittels der Gleichungen 413) solche Funktionen der Zeit einzuführen, daß die gestörte Bewegung dargestellt wird.

§ 75. Hamilton-Jacobische Methode der Lösung des Zwei-Körperproblems.

Die erste Aufgabe fällt sachlich zusammen mit der Bestimmung der elliptischen Bahn eines Planeten um die

Sonne, welche wir schon im I. Teile § 21 ausgeführt haben. Wir müssen also hier diese Aufgabe ein zweites Mal nach einer ganz verschiedenen Methode lösen.

Wir bestimmen die Lage des in Betracht kommenden Planeten M (des Mars) im Raume in folgender Weise. Wir denken uns die Sonne S im Mittelpunkte des kugelförmigen Himmelsgewölbes und die Ekliptik als größten Kreis des letzteren. Daß die Lage dieses größten Kreises so gewählt wird, daß die (natürlich ebenfalls gestörte) Erdbahn zu einer gewissen Zeit in seine Ebene fällt, ist für unsere Rechnungen unwesentlich. Nur daß alle Planeten sich nicht allzu weit von dieser Ebene entfernen, wird benutzt. Der größte Kreis der Himmelskugel, welcher durch den Pol der Ekliptik und den Planeten M geht, treffe die Ekliptik im Punkte N. Der Winkelabstand dieses Punktes vom Frühlingspunkte (die Länge des Planeten) heiße φ, der Winkel MSN (die Breite des Planeten) heiße ϑ (vergl. Fig. 10 S. 298). Dann sind ϱ, ϑ und φ gewöhnliche Polarkoordinaten. Die Formeln 419a) zeigen, daß die Bewegung des Mars relativ gegen die Sonne genau so vor sich geht, wie dessen absolute im Raume geschähe, wenn seine Masse gleich eins wäre und V resp. Ω die Kraftfunktionen für die ungestörte Bewegung resp. die der störenden Kräfte wären. Es genügt daher das letztere Problem zu lösen. Für dasselbe wäre die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2}[\varrho'^2 + \varrho^2 \vartheta'^2 + \varrho^2 \cos^2 \vartheta \, \varphi'^2]$$

(vgl. § 11, wo r für ϱ und $90^0 - \vartheta$ für ϑ geschrieben ist).

Daraus ergibt sich

$$q_1 = \frac{\partial T}{\partial \varrho'} = \varrho', \quad q_2 = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = \varrho^2 \vartheta', \quad q_3 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \varrho^2 \cos^2 \vartheta \, \varphi',$$

daher

$$T = \frac{1}{2}\left[q_1^2 + \frac{q_2^2}{\varrho^2} + \frac{q_3^2}{\varrho^2 \cos^2 \vartheta}\right].$$

Setzt man $\varkappa(m_s + m) = \lambda$, so wird also

$$V = -\frac{\lambda}{\varrho}, \quad E = T - \frac{\lambda}{\varrho}.$$

Die **Hamilton**sche partielle Differentialgleichung $\frac{\partial W}{d t}+E=0$ lautet also, wenn man für E den Wert $T-\frac{\lambda}{\varrho}$ und darin für q_1, q_2, q_3 die Ausdrücke $\frac{\partial W}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial W}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial W}{\partial \varphi}$ substituiert, wie folgt:

$$\frac{\partial W}{d t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \varrho}\right)^2+\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2+\frac{1}{\varrho^2 \cos^2 \vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right]-\frac{\lambda}{\varrho}=0.$$

Ein vollständiges Integrale dieser partiellen Differentialgleichung finden wir folgendermaßen: Wir setzen

$$W=\alpha_1 t+\alpha_2 \varphi+P+\Theta,$$

wobei P nur Funktion von ϱ, Θ nur Funktion von ϑ sein soll. Dadurch nimmt die partielle Differentialgleichung die Gestalt an:

$$\alpha_1+\frac{1}{2}\left(\frac{d P}{d \varrho}\right)^2+\frac{1}{2 \varrho^2}\left(\frac{d \Theta}{d \vartheta}\right)^2+\frac{\alpha_2^2}{2 \varrho^2 \cos^2 \vartheta}-\frac{\lambda}{\varrho}=0,$$

welcher genügt wird, wenn man setzt

$$\left(\frac{d \Theta}{d \vartheta}\right)^2=\alpha_3^2-\frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}, \qquad \left(\frac{d P}{d \varrho}\right)^2=\frac{2 \lambda}{\varrho}-2 \alpha_1-\frac{\alpha_3^2}{\varrho^2}.$$

Bezeichnet man mit ϑ_1 und ϱ_1 die unteren Integrationsgrenzen, welche wir nach Belieben wählen können, so wird also

$$\Theta=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta} d \vartheta \sqrt{\alpha_3^2-\frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}}, \qquad P=\int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d \varrho}{\varrho} \sqrt{2 \lambda \varrho-2 \alpha_1 \varrho^2-\alpha_3^2}.$$

420)
$$\left\{\begin{aligned} W= & \alpha_1 t+\alpha_2 \varphi+\int_{\vartheta_1}^{\vartheta} d \vartheta \sqrt{\alpha_3^2-\frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}}+ \\ & +\int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d \varrho}{\varrho} \sqrt{2 \lambda \varrho-2 \alpha_1 \varrho^2-\alpha_3^2}. \end{aligned}\right.$$

Die drei Integrale der Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}=\beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}=\beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3}=\beta_3$$

verwandeln sich daher in:

$$421)\quad \beta_1 = t - \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}}$$

$$422)\quad \beta_2 = \varphi - \alpha_2 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\vartheta}}}$$

$$423)\quad \beta_3 = \alpha_3 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\vartheta}}} - \alpha_3 \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}}.$$

Aus dem zweiten folgt

$$424)\qquad d\varphi = \alpha_2 \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\vartheta}}}.$$

Ist daher $\alpha_2 = \alpha_3$, so ist ϑ immer gleich Null und die Bahn des Planeten fällt genau in die Ekliptik. In allen anderen Fällen muß $\alpha_2 < \alpha_3$ sein. Nun bewegen sich aber alle Planeten in Bahnen, die der Ekliptik nahe liegen, um die Sonne. Es wächst also φ fortwährend, ϑ dagegen schwankt zwischen einem positiven und negativen Werte, also, da der Grenzwert von ϑ nur eintreten kann, wenn die Wurzel der Formel 424) verschwindet, zwischen dem kleinsten positiven und den dem Zahlenwerte nach kleinsten negativen Winkel, dessen Kosinus gleich α_2/α_3 ist. Dieser Winkel ist aber der Winkel ψ zwischen der Bahnebene des Planeten und der Ekliptik. Es ist also

$$425)\qquad \cos\psi = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}.$$

ϑ nimmt jedenfalls auch den Wert Null an, wir können daher $\vartheta_1 = 0$ setzen.

Aus Formel 421) erhalten wir

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{\varrho}\sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}.$$

Für das Perihel und Aphel verschwindet $d\varrho/dt$. Ist also ϱ_1 die Perihel-, ϱ_2 die Apheldistanz des Planeten (Mars) von der Sonne, so sind diese Größen die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^2 - \frac{\lambda}{\alpha_1}\varrho + \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} = 0.$$

Es ist also

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{\lambda}{\alpha_1}, \qquad \varrho_1\varrho_2 = \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1}.$$

ϱ_1 soll zugleich in den Integralen 420) bis 423) als untere Grenze für ϱ gewählt werden. Wenn wir dann mit τ eine der Zeiten bezeichnen, wann der Planet (Mars) das Perihel passiert, folgt aus Gleichung 421)

426) $$\beta_1 = \tau.$$

Ist nun a die große, b die kleine Halbachse der Bahnellipse des Mars, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ die Exzentrizität dieser Ellipse, so folgt

$\varrho_1 = a(1-e), \quad \varrho_2 = a(1+e), \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 2a, \quad \varrho_1\varrho_2 = a^2(1-e^2),$

daher

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{2a}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{\lambda a(1-e^2)} = \sqrt{\lambda p},$$

wobei p der Parameter, die zum Brennpunkte gehörige Ordinate der Bahnellipse ist.

Wir wollen uns nun in Fig. 10 die Lage der verschiedenen Punkte auf der Himmelskugel versinnlichen. XY sei die Ekliptik, X der Frühlingspunkt, Z der Pol der Ekliptik, K der aufsteigende Knoten der Marsbahn, P das Perihel des Mars, M der Punkt, wo sich der Mars zu irgend einer Zeit t befindet. Dann sind $\sphericalangle XSN = \varphi$ und $\sphericalangle MSN = \vartheta$ die Polarkoordinaten des Mars M zur Zeit t, $\sphericalangle MKN = \psi$ ist die Neigung der Marsbahn gegen die Ekliptik, $\sphericalangle XSK = \theta$ ist die Länge des aufsteigenden Knotens der Marsbahn.

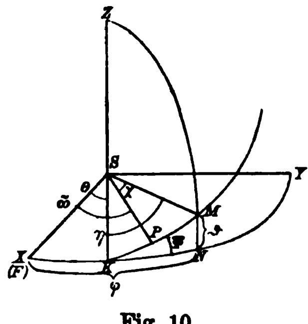


Fig. 10.

Bezeichnen wir den Winkel KSM mit η, so folgt aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke MKN

427) $$\sin\vartheta = \sin\psi \sin\eta$$

und wir können, da ψ konstant ist, in dem ersten Integrale der Gleichung 423) η statt ϑ als Integrationsvariable einführen. Da $\cos\psi = \alpha_2/\alpha_3$ war und wir $\vartheta_1 = 0$ wählten, so wird dieses Integral

$$\alpha_3 \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\vartheta}}} = \eta$$

und die Gleichung 423) geht über in

428) $$\beta_3 = \eta - \alpha_3 \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}}.$$

Da man für den aufsteigenden Knoten K hat $\vartheta = 0$, so folgt aus 422)

$$\beta_2 = \theta$$

und aus 428) folgt

$$\beta_3 = \eta_P,$$

wobei η_P der dem Perihel der Marsbahn zugehörige Wert des η ist. In der Astronomie nennt man die Summe $\theta + \eta_P$ die Länge $\tilde{\omega}$ des Perihels der Marsbahn, den Winkel MSP die wahre Anomalie χ des Mars zur Zeit t, $\eta + \theta = \tilde{\omega} + \chi$ seine in der Bahn gemessene Länge, φ aber seine in der Ekliptik gemessene Länge. Es ist also

$$\beta_3 = \eta_P = \tilde{\omega} - \theta$$
$$\chi = \eta + \theta - \tilde{\omega} = \eta - \eta_P.$$

Zwischen den sechs Integrationskonstanten

429) $$a,\ e,\ \psi,\ \tau,\ \theta,\ \tilde{\omega}$$

und

430) $$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$$

bestehen also die Gleichungen:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{2a}, \quad \alpha_2 = \cos\psi\sqrt{\lambda a(1-e^2)}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\lambda a(1-e^2)} = \sqrt{\lambda p}.$$

431) $$\beta_1 = \tau, \quad \beta_2 = \theta, \quad \beta_3 = \varpi - \theta$$
$$a = \frac{\lambda}{2\alpha_1}, \quad e^2 = 1 - \frac{2\alpha_1 \alpha_2^2}{\lambda^2}, \quad \cos\psi = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

Die beiden Konstanten θ und ψ bestimmen die Lage der Bahnebene jedes beliebigen Planeten, ϖ bestimmt dann die Richtung nach dem Perihel, τ die Durchgangszeit durch das Perihel.

Wie man dann mittels a, e den wirklichen Ort des Planeten im Raume zu jeder Zeit finden kann, sahen wir schon im I. Teile § 21. Man führt die mittlere Anomalie ein, indem man in Gleichung 421) setzt

432) $$\varrho = a(1 - e\cos u).$$

Die Integration liefert

433) $$\frac{\lambda}{\sqrt{a^3}}(t - \tau) = u - e\sin u.$$

Ist t gegeben, so wird zunächst aus dieser Gleichung das dazu gehörige u bestimmt; Gleichung 432) liefert dann ϱ. Die Einführung des Wertes 432) in 427) und Ausführung der Integration aber liefert:

$$\chi = \eta + \theta - \varpi = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}\right).$$

Aus dem Werte von η aber findet man ϑ mittels der Gleichung 427), während das sphärische Dreieck MKN der Fig. 10 liefert:

$$\mathrm{tg}(\varphi - \theta) = \cos\psi\,\mathrm{tg}\,\eta.$$

Es sind also sämtliche Polarkoordinaten ϱ, ϑ, φ und daher auch die rechtwinkligen x, y, z als Funktionen von t, a, e, ψ, τ, θ und ϖ, daher vermöge der Gleichungen 431) auch als Funktionen von t, α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 gefunden.

§ 76. Gleichungen für die Störung der Bahn eines Planeten durch die übrigen.

In erster Annäherung geschieht nun die Bewegung des Mars in der Nähe einer gegebenen Zeit t in einer elliptischen Bahn mit gewissen Werten der Konstanten 429), daher auch

der Konstanten 430). Die Störungen kann man so auffassen, als ob die Werte dieser Konstanten langsam geändert würden und es liefern die Gleichungen 413):

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}, \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3},$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}, \quad \frac{d\beta_3}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}.$$

Nun folgt aus den Gleichungen 431):

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} = \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} = \frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\beta_2} + \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial\beta_2} = \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega},$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3} = \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega},$$
$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda}{2\alpha_1^2}\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{2a^2}{\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau},$$
$$\frac{de}{dt} = -\frac{\alpha_3^2}{\lambda^2 e}\frac{d\alpha_1}{dt} - \frac{2\alpha_1^3}{\lambda^2 e}\frac{d\alpha_3}{dt} = \frac{p}{\lambda e}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} + \frac{1}{ae}\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega},$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\alpha_3\sin\psi}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega}\right) - \frac{\alpha_2}{\alpha_3^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda p}\sin\psi}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + (1-\cos\psi)\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde\omega}\right],$$

ferner ist

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} =$$
$$= -\frac{\lambda}{2\alpha_1^2}\frac{\partial\Omega}{\partial a} - \frac{\alpha_3^2}{\lambda^2 e}\frac{\partial\Omega}{\partial e} = -\frac{2a^2}{\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial a} - \frac{p}{e\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial e}.$$

Analog folgt

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda p}\sin\psi}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3} = -\frac{1}{ae}\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\frac{\partial\Omega}{\partial e} + \frac{\cot\psi}{\sqrt{\lambda p}}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi},$$

daher

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{2a^2}{\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial a} - \frac{p}{e\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial e},$$
$$\frac{\partial\theta}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda p}\sin\psi}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi},$$
$$\frac{d\tilde\omega}{dt} = \frac{d\beta_2}{dt} + \frac{d\beta_3}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda p}}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi} - \frac{1}{ae}\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\frac{\partial\Omega}{\partial e}.$$

Hiermit sind sämtliche Störungsformeln berechnet. In der Astronomie bezeichnet man gewöhnlich den Faktor von $t - \tau$ in Gleichung 433) mit n und führt statt λ die Konstante n mittels der Gleichung $\lambda = n\sqrt{a^3}$ ein.

Berechnet man nur die Störungsglieder erster Ordnung so addieren sich die von den verschiedenen Himmelskörpern bewirkten Störungen. Um die Störung des Mars durch einen anderen Planeten (den Jupiter) zu berechnen, braucht man im Ausdrucke 419) für Ω nur ein Glied beizubehalten, hat also

$$\Omega = \frac{\varkappa m_1 (x x_1 + y y_1 + z z_1)}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}^3} - \frac{\varkappa m_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}.$$

Hier sind sowohl die Koordinaten x, y, z des Mars, als auch die Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Jupiter in der früher auseinandergesetzten Weise durch t und die Werte der Größen 429) auszudrücken, welche für den betreffenden Planeten gelten. Bei der partiellen Differentiation nach den für den Mars geltenden Größen 429) ist t als konstant anzusehen. Die für den Jupiter geltenden Werte der Größen 429) sind bei Berechnung der Glieder erster Ordnung überhaupt als konstant zu betrachten, so daß Ω bloß als Funktion von t und den für den Mars geltenden Größen 429) ausgedrückt erscheint. Erst bei Berechnung der Störungsglieder höherer Ordnung müßte auch berücksichtigt werden, daß sich die Jupiterbahn, während derselbe störend wirkt, selbst ebenfalls langsam ändert.

VII. Gleichungen für die relative Bewegung.

§ 77. Absolute und relative Bewegung.

Wir können bloß die Abstände der Teile der verschiedenen Körper voneinander, also bloß deren relative Lage bestimmen. Es gibt keine Erfahrung, in der sich ein absoluter Raum bemerkbar machen würde. Trotzdem haben

wir zu Anfang des I. Teiles ein bestimmtes Koordinatensystem eingeführt, welches nahezu die Rolle eines absoluten Raumes spielt. Wir taten dies bloß, weil sich bei Einführung dieses bestimmten Koordinatensystems die Gesetze für die relative Bewegung der Körper viel einfacher aussprechen lassen, als bei Einführung anderer ganz willkürlich gewählter Koordinatensysteme.

Wir wollen damit keineswegs die Wahrscheinlichkeit oder gar die Notwendigkeit behaupten, daß noch neue Erfahrungen gefunden werden könnten, mittels deren dieses besondere Koordinatensystem sich näher bestimmen ließe, oder welche eine Auswahl eines bestimmten, aus allen den Systemen, welche wir in § 11 des I. Teiles taugliche Bezugssysteme nannten und damit die Bestimmung eines absoluten Raumes gestatten, welche, wie man sich ausdrückt, die Existenz des absoluten Raumes beweisen würden.

Wir sahen nämlich in § 11 des I. Teiles, daß diese Reduktion der Bewegungsgesetze auf die einfachste Form keineswegs bloß bei Zugrundelegung eines einzigen bestimmten Koordinatensystems S eintritt, sondern daß man mit gleichem Erfolge sehr verschiedene Koordinatensysteme zugrunde legen kann. Alle diese Koordinatensysteme nannten wir dort taugliche Bezugssysteme. Die Richtung der Achsen im Raume kann dabei für einen bestimmten Zeitmoment und die Lage des Koordinatenanfangspunktes für zwei Zeitmomente ganz beliebig relativ gegen das eine schon als taugliches Bezugssystem gefundene Koordinatensystem S orientiert sein. Hat man jedoch für einen Zeitmoment die Richtung der Achsen gewählt, so ist sie dadurch für alle übrigen Zeitmomente bestimmt. Man bezeichnet alle Richtungen, welche eine bestimmte Achse dann zu allen Zeiten hat, als parallel.

Hat man ferner die Lage des Koordinatenursprungs zu zwei Zeitmomenten gewählt, so ist wieder die Lage des Koordinatenursprungs zu allen übrigen Zeitmomenten bestimmt. Man nennt die Bewegung, welche der Koordinatenursprung hierbei macht, eine geradlinige und gleichförmige.

Die Frage, wie sich die Gesetze der Lagenänderung der Körper modifizieren, d. h. wie sich die Bewegungs-

gleichungen verändern, wenn wir zu den verschiedenen Zeiten Coordinatensysteme zugrunde legen, welche diesen Bedingungen nicht genügen, ist offenbar von hohem theoretischen Interesse.

Sie ist aber auch von praktischem Werte; denn wir beobachten stets nur die Relativbewegung eines materiellen Systems gegen ein zweites, welches nahezu unveränderlich ist oder wenigstens als unveränderlich angesehen wird. So beobachten wir die Bewegung des Planetensystems relativ gegen den Fixsternhimmel, die irdischer Körper relativ gegen die Erde oder irgend welche fix mit ihr verbundene Objekte. Bei gewissen Experimenten beobachten wir auch die Bewegung von Flüssigkeiten oder sonstigen Gegenständen relativ gegen ein absichtlich in Rotation versetztes Gefäß oder Gehäuse. Die in einem bewegten Wagen oder Schiffe befindlichen Personen können die Bewegung ihrer Körper und anderer Gegenstände relativ gegen den Wagen oder das Schiff beobachten usw.

In allen diesen Fällen handelt es sich für uns lediglich um die relative Bewegung des ersten Systems gegen das zweite oder ein mit dem zweiten fix verbundenes Koordinatensystem. Letzteres hat in allen Fällen bis auf den ersten sicher nicht die Eigenschaften eines tauglichen Bezugssystems. Die Natur der Fixsterne ist uns viel zu unbekannt und der Fixsternhimmel selbst ein viel zu unbestimmter Begriff, als daß man mit Sicherheit entscheiden könnte, ob ein mit ihm fix verbundenes Koordinatensystem ein taugliches Bezugssystem wäre; aber Eigenbewegungen von Fixsternen sind bereits konstatiert und jedenfalls ist es auch da von Wichtigkeit zu wissen, was für einen Einfluß es auf die Bewegungsgleichungen des Planetensystems hätte, wenn das zugrunde gelegte Koordinatensystem kein taugliches Bezugssystem wäre.

Wenn die Bewegung eines Körpersystems relativ gegen ein zweites berechnet werden soll und die Bewegung des zweiten Systems relativ gegen ein taugliches Bezugssystem bekannt ist, so könnte man in jedem speziellen Falle so verfahren: man könnte zuerst die Bewegung des ersten

Systems relativ gegen dasselbe Bezugssystem berechnen und erst dann aus der relativen Bewegung beider Systeme gegen das gemeinsam zugrunde gelegte taugliche Bezugssystem die relative Bewegung des ersten Systems gegen das zweite berechnen.

Es ist aber von großem Vorteile, diese Arbeit nicht in jedem speziellen Falle besonders auszuführen, sondern ein für allemal die Regeln anzugeben, nach denen unmittelbar die Bewegung des ersten Systems relativ gegen das zweite System oder ein damit fix verbundenes Koordinatensystem gefunden werden kann, sobald die des zweiten Systems gegen ein taugliches Bezugssystem gegeben ist, welches wir das ruhende Koordinatensystem nennen. Wir nehmen an, daß sämtliche Teile des zweiten Systems starr miteinander verbunden sind. Mit ihm denken wir uns ein zweites (das bewegliche) Koordinatensystem starr verbunden. Die Aufgabe ist dann, die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung des ersten Körpersystems relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem zu finden.

§ 78. Erster Spezialfall. Das bewegliche Koordinatensystem dreht sich nicht.

Wir betrachten nun zuerst den Spezialfall, daß das zweite System, daher auch das damit verbundene bewegliche Koordinatensystem keine Drehung relativ gegen ein taugliches Bezugssystem hat. Die Achsen des letzteren wollen wir mit $O_1 X_1$, $O_1 Y_1$ und $O_1 Z_1$ bezeichnen. Die Achsen OX, OY und OZ des beweglichen fest mit dem zweiten System verbunden Koordinatensystems wollen wir zu irgend einer Zeit den ersteren Koordinatenachsen parallel wählen. Sie werden ihnen dann zu allen Zeiten parallel bleiben und die Lage des beweglichen Koordinatensystems relativ gegen das taugliche Bezugssystem ist zu jeder Zeit bestimmt, wenn wir die Koordinaten a, b, c ihres Koordinatensprungs O bezüglich des tauglichen Bezugssystems kennen.

Da sich unserer Annahme gemäß alle Körper kontinuierlich bewegen, so wird auch die Bewegung des Systems,

welches wir das zweite genannt haben, jedenfalls so beschaffen sein, daß a, b, c kontinuierliche Funktionen der Zeit sind, welche endliche erste und zweite Differentialquotienten haben. Dies soll also angenommen werden, da die entgegengesetzte Annahme keine physikalische Bedeutung hätte. Die Bewegung des zweiten Systems soll uns ferner gegeben sein. Es sollen also a, b, c bekannte Funktionen der Zeit sein.

Wir bezeichnen mit x_1, y_1, z_1 die auf das taugliche Bezugssystem bezogenen Koordinaten irgend eines materiellen Punktes m des ersten Systems, dessen Bewegung berechnet werden soll, während die des zweiten Systems und daher auch die der beweglichen Koordinatenachsen als gegeben vorausgesetzt wird.

Vermöge der Definition eines tauglichen Bezugssystems gelten für x_1, y_1, z_1 die gewöhnlichen Gleichungen der Mechanik

434) $$m\frac{d^2 x_1}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2 y_1}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z,$$

wobei X, Y, Z die Komponenten der auf m wirkenden Gesamtkraft in den drei Koordinatenrichtungen sind.

Diese drei Gleichungen würden uns die Bewegung des materiellen Punktes m relativ gegen das taugliche Bezugssystem bestimmen. Wir suchen aber nicht diese, sondern die Bewegung relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem, also die Gleichungen für die Veränderungen der Koordinaten x, y, z, welche dem Massenpunkte m zukommen, wenn wir ihn auf das bewegliche Koordinatensystem beziehen.

Da die Achsen beider Koordinatensysteme immer parallel bleiben und die Koordinaten des Ursprungs des beweglichen Koordinatensystems bezüglich des tauglichen Bezugssystems a, b, c sind, so ist

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b, \quad z_1 = z + c.$$

Substituiert man dies in die Gleichungen 434), so erhält man

$$435)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X - m\dfrac{d^2a}{dt^2}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y - m\dfrac{d^2b}{dt^2}, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z - m\dfrac{d^2c}{dt^2}. \end{cases}$$

Dies sind die gewünschten Gleichungen, welche uns die Änderung der Koordinaten x, y, z eines beliebigen Massenpunktes m des fraglichen materiellen Systems, dessen relative Bewegung wir finden wollen und welches wir das erste System nannten, bezüglich des beweglichen mit dem zweiten System fix verbundenen Koordinatensystems angeben.

Die Bewegung des ersten Systems relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem geschieht also genau so, als ob letzteres ein taugliches Bezugssystem wäre und auf jedes Massenteilchen m außer den Kräften X, Y, Z, welche in der Tat darauf wirken, noch die drei Kräfte $-m\,d^2a/dt^2$, $-m\,d^2b/dt^2$, $-m\,d^2c/dt^2$ in den drei Koordinatenrichtungen wirken würden.

Dadurch haben wir die neue Aufgabe auf eine schon bekannte zurückgeführt. Wir haben die Rechnung ganz so auszuführen, als ob das bewegliche Koordinatensystem ein taugliches Bezugssystem wäre; nur müssen wir den in der Tat wirkenden Kräften noch diese neuen Kräfte hinzufügen, durch deren Hinzufügung sich dann die Bewegungsgleichungen auf die alte uns schon gewohnte Form reduzieren; deshalb nennen wir diese hinzuzufügenden Kräfte die Reduktionskräfte.

Sei umgekehrt die Bewegung des ersten Systems relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem gegeben und seien

$$X_1 = X - m\frac{d^2a}{dt^2}, \qquad Y_1 = Y - m\frac{d^2b}{dt^2},$$
$$Z_1 = Z - m\frac{d^2c}{dt^2}$$

die Kräfte, welche dieselbe Bewegung relativ gegen ein taugliches Bezugssystem erzeugen würden, so sind

$$X = X_1 + m\frac{d^2 a}{d t^2}, \quad Y = Y_1 + m\frac{d^2 b}{d t^2},$$
$$Z = Z_1 + m\frac{d^2 c}{d t^2}$$

die Kräfte, welche die Bewegung relativ gegen das in der vorgeschriebenen Weise bewegte Koordinatensystem erzeugen. Wir müssen daher den Kräften X_1, Y_1, Z_1, welche diese Bewegung relativ gegen ein taugliches Bezugssystem erzeugen würden, noch die Kräfte $m\frac{d^2 a}{d t^2}$, $m\frac{d^2 b}{d t^2}$, $m\frac{d^2 c}{d t^2}$ hinzufügen, um das System außerdem noch so zu führen, daß es dieselbe Bewegung relativ gegen das in der vorgeschriebenen Weise bewegte Koordinatensystem ausführt, weshalb wir die letzteren hinzuzufügenden Kräfte die Führungskräfte nennen wollen.

Es bestätigt sich neuerdings, daß die Reduktionskräfte nur gleich Null sind, d. h. daß die alte Form der Bewegungsgleichungen ohne Hinzufügung neuer Kräfte nur dann erhalten bleibt, wenn die Bewegung des zweiten Koordinatensystems relativ gegen das erste eine geradlinige und gleichförmige ist.

Wenn jede Masse jedes der beiden Systeme eine gleichgerichtete, der Masse proportionale Kraft wirken würde, so würde dadurch die Relativbewegung beider Systeme gar nicht geändert. Derartige Kräfte wären also für denjenigen, der nur jene beiden Systeme wahrnimmt, nicht bemerkbar. Größe und Richtung der auf die Masseneinheit wirkenden Kraft könnten dabei natürlich noch beliebig mit der Zeit veränderlich sein.

§ 79. Beispiele.

Als Beispiel für die Reduktionskräfte betrachten wir einen Eisenbahnwagen, welcher in der Richtung der Abszissenachse fährt. Irgend ein bestimmter Punkt desselben habe zur Zeit t die Abszisse a. An der Decke sei eine Hängelampe befestigt, auf einem fest mit dem Wagen verbundenen Tischchen stehe ein Glas, das eine Flüssigkeit enthält. So-

bald die Geschwindigkeit des Wagens zu- oder abnimmt, bewegt sich die Lampe, sowie die im Glase enthaltene Flüssigkeit eventuell das Glas selbst, wenn es nicht genug Reibung gegen die Tischplatte hat, für einen relativ gegen den Wagen ruhenden Beschauer genau so, als ob zu jeder Zeit auf jedes Massenteilchen außer den in der Tat darauf wirkenden Kräften noch die Kraft $-m\,d^2a/dt^2$ in der Richtung der Bewegung des Wagens wirkte.

Den Begriff der Führungskräfte illustriert folgende Betrachtung: Um in dem besprochenen Eisenbahnwagen einen menschlichen Körper ruhig auf einer Bank sitzend zu erhalten, muß zu den Kräften, welche auch im ruhenden Wagen wirken würden, auf jedes Massenteilchen noch die Kraft $m\,d^2a/dt^2$ in der Bewegungsrichtung des Wagens dazu kommen. Diese Kraft wird von der Rücklehne, dem Sitze eventuell dem Stützpunkte der Füße ausgehen und durch innere Kräfte passend auf die Massenteilchen des Körpers verteilt werden. Die Lehne wird bei Beschleunigung der Fahrt stärker, bei Verzögerung schwächer auf den Rücken drücken. Bei sehr starker Verzögerung, z. B. sehr plötzlichem Stillstand des Wagens kann der Druck der Lehne auf den Rücken negativ werden; man muß den Rücken mit Gewalt, z. B. die Füße anstemmend, an die Lehne andrücken, wenn der Oberkörper sich nicht nach vorne neigen soll.

Ein anderes Beispiel von Führungskräften ist folgendes. Man hält das eine Ende eines Fadens, den wir als unausdehnsam betrachten wollen, in der Hand; am anderen Ende des Fadens soll ein schwerer Körper befestigt sein. Die Hand soll dasjenige System sein, welches wir in der allgemeinen Theorie das zweite nannten, der schwere Körper soll das erste System sein. Wenn die Hand ruht oder sich gleichförmig bewegt, so muß die Spannung des Fadens, wenn der schwere Körper in relativer Ruhe gegen die Hand bleiben soll, genau gleich dem Gewichte desselben sein. Bewegt sich die Hand mit beschleunigter Bewegung vertikal nach abwärts, so muß auf den schweren Körper, wenn der Faden gleiche Länge behalten soll, eine abwärts wirkende Führungskraft hinzukommen, es muß daher, da dessen Ge-

wicht unverändert bleibt, die aufwärts ziehende Spannung des Fadens abnehmen. Bewegt sich dagegen die Hand verzögert nach abwärts oder beschleunigt nach aufwärts, so muß die Spannung des Fadens wachsen, so daß dieser bei raschem Anhalten einer Abwärtsbewegung oder raschem Beginn einer schnellen Aufwärtsbewegung der Hand reißen kann, selbst wenn seine Festigkeit erheblich größer, als das Gewicht der angehängten Last ist.

§ 80. **Zweiter Spezialfall. Das Koordinatensystem ist in Drehung begriffen.**

Wir wollen nun den Spezialfall betrachten, daß das System, welches wir als das zweite bezeichnet haben, keine andere Bewegung hat, als daß es sich um eine in einem tauglichen Bezugssysteme fixe Achse relativ gegen dieses dreht.

Wir wählen die Drehungsachse $OZ = OZ_1$ zur Z-Achse. OX_1 und OY_1 seien zwei beliebige andere aufeinander und auf $OZ = OZ_1$ senkrechte Koordinatenachsen, deren Lage gegen das taugliche Bezugssystem unverändert bleibe, so daß die Koordinatenachsen OX_1, OY_1, OZ_1 selbst ein taugliches Bezugssystem bilden, da sie mit einem solchen fix verbunden sind.

Dagegen seien OX, OY zwei andere aufeinander und auf OZ senkrechte, ebenfalls durch den Punkt O gehende Koordinatenachsen, welche zu irgend einer Zeit (dem Zeitanfange) mit OX_1, OY_1 zusammenfielen, aber immer mit dem zweiten Systeme fest verbunden mit rotieren, so daß der Winkel $X_1 OX$ gleich demjenigen Winkel w ist, um welchen sich das zweite System zur betreffenden Zeit relativ gegen ein taugliches Bezugssystem im positiven Sinne gedreht hat. Derselbe soll eine gegebene Funktion der Zeit sein, welche einen endlichen ersten und zweiten Differentialquotienten hat, wodurch die Bewegung des zweiten Systems vollständig gegeben ist.

Wir suchen die Relativbewegung irgend eines anderen Massensystems (des ersten) gegen das zweite, also gegen die Achsen OX, OY, OZ. Wir haben also die Aufgabe, die Veränderungen der Koordinaten x, y, z eines beliebigen

Massenteilchens m des ersten Systems bezogen auf dieses Koordinatensystem zu finden. Wir könnten diese Aufgabe folgendermaßen lösen.

Seien x_1, y_1, z_1 die Koordinaten desselben Massenteilchens bezüglich des Koordinatensystems OX_1, OY_1, OZ_1 und X_1, Y_1, Z_1 die Komponenten der gesamten auf m wirkenden Kräfte in den Richtungen OX_1, OY_1, OZ_1; dann ist, da die letzteren Achsen ein taugliches Bezugssystem bilden

436) $$m\frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1, \quad m\frac{d^2 y_1}{dt^2} = Y_1, \quad m\frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z_1.$$

Da ferner w der Winkel der beiden x-Achsen ist, so hat man

437) $$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x\cos w - y\sin w, \\ y_1 &= x\sin w + y\cos w, \\ z_1 &= z. \end{aligned}\right.$$

Da w als Funktion von t gegeben ist, kann man daraus die zweiten Differentialquotienten von x_1, y_1, z_1 nach der Zeit berechnen. Substituiert man sie in die Gleichungen 436), so ergeben sich daraus nach passenden Reduktionen die Gleichungen für die zweiten Differentialquotienten von x, y, z nach der Zeit, welche man sucht.

Doch ist dies Verfahren, wenn man es nicht durch Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen abkürzt, wovon später die Rede sein soll, etwas umständlich. Kürzer gelangt man zum Ziele, wenn man Semipolarkoordinaten einführt.

Sei r der senkrechte Abstand des Massenteilchens m von der z-Achse und seien ϑ und ϑ_1 die Winkel, welche r mit den beiden positiven Abszissenachsen OX und OX_1 einschließt. Dann sind r, ϑ_1 und z gewöhnliche Semipolarkoordinaten zur Bestimmung der Lage bezüglich eines tauglichen Bezugssystems. Wenn wir daher die Richtung der positiven z-Achse kurz als die z-Richtung, die Richtung der Verlängerung von r, welches wir uns immer von der z-Achse gegen die Masse m hingezogen denken, als die Richtung von r, und die auf beiden senkrechte in dem Sinne, in dem sich m bei wachsenden ϑ und ϑ_1 bewegt, gezogene Richtung

als die Richtung von ϑ, und mit Z, R und Θ die Komponenten der auf m wirkenden Gesamtkraft in diesen drei Richtungen bezeichnen, so hat man nach § 11

$$438)\quad \begin{cases} m\frac{d^2 r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}\right)^2 = R, \\ m\cdot r\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} + 2m\frac{d\vartheta_1}{dt}\frac{dr}{dt} = \Theta. \\ m\frac{d^2 z}{dt^2} = Z. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen, welche uns die absolute Bewegung der Masse m, d. h. deren Bewegung bezogen auf ein taugliches Bezugssystem geben, finden wir sofort die gesuchte Relativbewegung, wenn wir statt ϑ_1 den Polarwinkel ϑ mit der beweglichen Achse OX einführen, da ja r und z von der Drehung nicht affiziert werden. Da wir den Winkel der beiden Abszissenachsen zur Zeit t mit w bezeichnet haben, so ist, wenn wir die Winkelgeschwindigkeit dw/dt des zweiten Koordinatensystems relativ gegen das taugliche Bezugssystem mit ω bezeichnen

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} + \omega, \quad \frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt}.$$

Substituiert man dies in die Gleichungen 438), so folgt:

$$439)\quad \begin{cases} m\frac{d^2 r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = R + mr\omega^2 + 2mr\omega\frac{d\vartheta}{dt}, \\ mr\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2m\frac{d\vartheta}{dt}\frac{dr}{dt} = \Theta - mr\frac{d\omega}{dt} - 2m\omega\frac{dr}{dt}, \\ m\frac{d^2 z}{dt^2} = Z. \end{cases}$$

§ 81. Interpretation der gefundenen Gleichungen.

Die Gleichungen für die Veränderung von r, ϑ und z sind hiermit wieder genau in die Form der Gleichungen 438) gebracht. Die Bewegung relativ gegen das sich drehende Koordinatensystem geschieht also wieder genau so, als ob dasselbe fix (d. h. ein taugliches Bezugssystem) wäre und auf irgend einen materiellen Punkt m außer den Kräften,

welche tatsächlich darauf wirken, noch folgende Kräfte wirksam wären:

1. Eine Kraft von der Intensität $m r \omega^2$, in der Richtung von r, welche wir die Zentrifugalkraft K_1 nennen wollen.

2. Eine Kraft von der Intensität $m r d\omega/dt$, welche der Richtung, die wir die Richtung ϑ genannt haben, gerade entgegenwirkt. Diese zweite Kraft wollen wir die tangentiale Reduktionskraft nennen und mit K_2 bezeichnen.

3. Eine Kraft von der Intensität $2 m \omega p$, wobei p die Projektion der gesamten Geschwindigkeit c des materiellen Punktes m auf die xy-Ebene ist. Diese dritte Kraft heißt die Coriolissche Kraft K_3. Ihre Richtung liegt in der xy-Ebene, steht senkrecht auf der Richtung der mit p bezeichneten Geschwindigkeitskomponente, also auch auf der Geschwindigkeit c selbst, und wirkt in dem Sinne, daß ihre Richtung in die Richtung von p durch eine Drehung in dem Sinne, in dem sich der Bezugskörper dreht, also bei positivem ω in demselben Sinne, wie die positive x-Achse in die positive y-Achse auf kürzestem Wege übergeführt wird.

Diese drei Kräfte wollen wir wieder die Reduktionskräfte nennen. Fügen wir sie für jeden materiellen Punkt m des Systems, welches wir das erste genannt haben, den ohnehin darauf wirkenden Kräften bei, so können wir die relative Bewegung dieses Systems gegen die in Drehung begriffenen Koordinatenachsen (oder gegen das damit fest verbundene zweite System) genau so berechnen, als ob dieselben ruhen würden, d. h. ein taugliches Bezugssystem wären.

Was wir unter 1. und 2. von der Zentrifugalkraft K_1 und der tangentialen Reduktionskraft K_2 gesagt haben, lehrt der unmittelbare Anblick der Gleichungen 439). Nur das unter 3. von der Coriolisschen Kraft K_3 Behauptetete bedarf noch der Erläuterung. Wenn man die Zentrifugalkraft K_1 und die tangentiale Reduktionskraft K_2 hinzugefügt hat, so muß man, wie der Anblick der Gleichungen 439) lehrt, noch zwei Kräfte hinzufügen, um aus den Gleichungen 439) solche Gleichungen zu erhalten, welche genau

die Form der Gleichungen 438) haben, d. h. damit die Bewegung genau so geschieht, als ob die Achsen OX, OY, OZ ein taugliches Bezugssystem wären.

Diese beiden Kräfte, deren Hinzufügung noch notwendig ist, sind: 1. Die Kraft $R' = 2m\omega r\, d\vartheta/dt$ in der Richtung r. 2. Die Kraft $\Theta' = -2m\omega\, dr/dt$ in der Richtung von ϑ. Wir haben also noch nachzuweisen, daß die Coriolissche Kraft K_3 in der Tat die resultierende dieser beiden Kräfte ist. Dies geschieht so: dr/dt, $r\,d\vartheta/dt$ und dz/dt sind die drei Komponenten der Geschwindigkeiten c in den drei Richtungen r, ϑ und z. Die beiden ersten dieser Größen sind daher die Projektionen der mit p bezeichneten Geschwindigkeitskomponente in den Richtungen r und ϑ, so daß man hat:

$$\frac{dr}{dt} = p\cos(p, r), \qquad r\frac{d\vartheta}{dt} = p\sin(p, r).$$

Daher ist:

$$440)\left\{\begin{aligned} R' &= 2m\omega p\sin(p, r) = 2m\omega p\cos[\sphericalangle(p, r) - 90^0], \\ \Theta' &= 2m\omega p\cos(p, r) = 2m\omega p\sin[\sphericalangle(p, r) - 90^0], \end{aligned}\right.$$

R' und Θ' sind also in der Tat die Komponenten einer einzigen Kraft von der Intensität $K_3 = 2m\omega p$, deren Richtung um 90^0 gegen die Richtung von p in dem der Drehung des Bezugskörpers entgegengesetzten Sinne gedreht ist, also in dem Sinne, in welchem man die positive y-Achse auf kürzestem Wege in die Richtung der positiven x-Achse drehen kann.

Wenn umgekehrt gewisse Kräfte R_1, Θ_1 eine bestimmte Bewegung bezüglich eines tauglichen Bezugssystems hervorbringen, so müssen ihnen noch die Kräfte $-K_1$, $-K_2$ und $-K_3$ zugefügt werden, um dieselbe Bewegung relativ gegen ein sich mit der veränderlichen Winkelgeschwindigkeit ω drehendes Koordinatensystem zu erzeugen, $-K_1$, $-K_2$, und $-K_3$ sind also die Führungskräfte, welche den zur Erzeugung einer gewissen Bewegung bezüglich eines ruhenden Koordinatensystems erforderlichen Kräften noch hinzugefügt werden müssen, um jede Masse so zu führen, daß sie dieselbe Bewegung relativ gegen ein sich drehendes Koordinatensystem macht.

§ 82. **Weitere Spezialisierung.**

Wir können auf das erste materielle System gewisse äußere Kräfte wirkend denken, und nun die Kräfte, welche das zweite System auf das erste ausüben müßte, wenn das zweite ruhte, mit denjenigen vergleichen, welche es auf das erste ausüben muß, wenn sich das zweite in gegebener Weise bewegt, wobei in beiden Fällen dieselbe gegebene Relativbewegung angenommen wird. Die Kräfte, welche im zweiten Falle dazu kommen müssen, sind die Führungskräfte.

Wenn sich das bewegliche Koordinatensystem gleichförmig dreht und jedes Massenteilchen des ersten Systems relativ gegen dasselbe ruht, so verschwinden K_2 und K_3. Dann muß also das zweite System auf das erste, um die relative Ruhe zu erhalten, genau dieselben Kräfte ausüben, als ob bei gleichen äußeren Kräften beide ruhen würden, aber auf jedes Massenteilchen des ersten Systems noch die Zentrifugalkraft K_1 wirken würde, welche also in diesem Falle die einzige Zusatzkraft ist.

Auf jedes Massenteilchen des ersten Systems muß außer den Kräften, welche bei Ruhe beider Systeme das Gleichgewicht herhalten würden, noch eine der Zentrifugalkraft entgegengesetzte Kraft, die Zentripetalkraft, wirken, welche also die Führungskraft ist, die jedes Massenteilchen des ersten Systems in dem Kreise herumführt, den es bei der Drehung beschreibt.

Sobald die Drehung des zweiten Systems beschleunigt oder verzögert ist, tritt zur Zentripetalkraft noch die der tangentialen Reduktionskraft K_2 entgegengesetzte Kraft hinzu, von der im übrigen das Gleiche gilt wie von der Zentripetalkraft. Doch reichen auch diese beiden Kräfte noch nicht aus, sobald das erste System eine Bewegung relativ gegen das zweite macht. Dann tritt auch noch die der Coriolisschen Kraft K_3 entgegengesetzte auf. Will man den für die Relativbewegung des ersten Systems gegen das bewegliche Koordinatensystem geltenden Gleichungen dieselbe Form geben, als ob dieses ein taugliches Bezugssystem

wäre, so muß man K_1, K_2, K_3 hinzufügen. Zu den Kräften aber, welche das ruhend gedachte zweite System auf das erste ausübt, muß man $-K_1$, $-K_2$, $-K_3$ hinzufügen, um die Kräfte zu finden, die es bei seiner vorgeschriebenen Bewegung auf das erste ausüben muß, um bei diesem die gleiche Relativbewegung zu unterhalten.

Sei z. B. der Hohlraum eines Gefäßes ein Rotationskörper mit vertikaler Achse, um welche das Gefäß mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in Drehung begriffen sei. Im Gefäße soll sich Quecksilber. Wasser und Öl befinden, eventuell sollen auch feste Körper darin sein. Vermöge der Reibung wird ein stationärer Zustand erst eintreten, wenn alle Flüssigkeiten und feste Körper weder untereinander noch gegen das rotierende Gefäß mehr eine Relativbewegung haben. Das betreffende Gleichgewicht kann genau so berechnet werden, als ob das Gefäß samt seinem Inhalte ruhen würde, aber auf jedes Massenteilchen des letzteren außer der Schwere noch die entsprechende Zentrifugalkraft wirken würde. Dadurch wird auch auf die Gefäßwand im ruhenden Gefäße derselbe Druck erzeugt, welcher im bewegten Gefäße unter dem Einflusse der Schwere allein herrscht.

Ebenso kann das Gleichgewicht eines an einem Faden aufgehängten schweren Körpers, der in gleichförmiger Rotation begriffen ist, genau so gefunden werden, als ob derselbe ruhte und auf jeden Punkt desselben außer der Schwere noch die Zentrifugalkraft wirkte. Vom Widerstande der nur teilweise mitrotierenden Luft ist dabei natürlich abgesehen. Damit dieser nicht stören würde, müßte der Aufhängefaden samt der umgebenden Luft in einem mit gleicher Geschwindigkeit rotierenden Gefäße eingeschlossen sein.

Wenn ein schwerer Körper irgendwo auf der Erde an einer unausdehnsamen oder elastischen Schnur aufgehängt ist und relativ gegen die Erde ruht, so verhält er sich genau so, als ob er samt der Erde ruhte und außer der Anziehung der Erde und der Spannung der Schnur noch die Zentrifugalkraft infolge der Achsendrehung der Erde auf ihn wirkte. Die Schnur nimmt also die Richtung der Resultierenden aus der wirklichen Anziehung der Erde auf den

Körper und der Zentrifugalkraft infolge der Erdrotation an. Diese Richtung heißt die Richtung der scheinbaren Schwere oder der scheinbaren Beschleunigung der Schwere oder kurz die Vertikalrichtung an der betreffenden Stelle der Erdoberfläche. Sie trifft, wenn diese Stelle auf der nördlichen Erdhälfte liegt, die Erdachse nicht im Erdmittelpunkte O', sondern südlich davon im Punkte O. Die Spannung der Schnur, welche den Körper trägt, ist ebenfalls nicht gleich der Anziehungskraft der Erde auf den Körper, sondern der Resultierenden dieser Anziehungskraft und der Zentrifugalkraft. Man nennt diese Resultierende, welche die Spannung der Schnur oder den Druck des schweren Körpers auf seine Unterlage im Falle der relativen Ruhe gegen den Erdkörper stets bestimmt, das scheinbare Gewicht jenes schweren Körpers an dieser Stelle der Erde. Das durch die Masse des Körpers dividierte scheinbare Gewicht nennt man die scheinbare Beschleunigung der Schwere an der betreffenden Stelle der Erde. Wenn ein Körper daselbst frei fällt, d. h. wenn außer der Erdanziehung keine Kraft auf ihn wirkt,[1]) so hat übrigens, wie wir sehen werden, seine Beschleunigung relativ gegen die Erde nur in Momenten, wo er gerade die Geschwindigkeit Null relativ gegen die Erde hat, genau die Größe und Richtung der im betreffenden Punkte herrschenden scheinbaren Beschleunigung der Schwere.

Wir werden in der Hydrostatik sehen, daß im Falle des Gleichgewichtes die Oberfläche einer Flüssigkeit immer senkrecht zur Resultierenden aller Kräfte stehen muß, die auf ein Teilchen der Oberfläche wirken. Die Meeresfläche muß daher im Zustande der relativen Ruhe gegen die Erde an jedem Orte senkrecht auf der Vertikalrichtung dieses Ortes stehen. Die Erfahrung lehrt, daß auch die Oberfläche des festen Erdkörpers, abgesehen von den gegen die Dimensionen der Erde verschwindend kleinen Erhebungen, Hügeln

[1]) Die durch seine Bewegung und die Erddrehung bedingten Zusatzkräfte sind dabei natürlich nicht zu den auf den Körper wirkenden Kräften gerechnet, da wir sie bloß fingieren, um uns die Rechnung zu erleichtern.

und Bergen, senkrecht auf dieser Richtung steht, vielleicht weil dieser zu einer Zeit, wo die Erde schon nahezu dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit hatte, flüssig war, vielleicht auch, weil er noch immer genügend verschiebbar ist, um in so langer Zeit die entsprechende Gestalt anzunehmen. Es ist daher die Erde keine Kugel, sondern nahezu ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid.

§ 83. Wiedereinführung rechtwinkliger Koordinaten.

Wir wollen zunächst in den Gleichungen 439) wieder die rechtwinkligen Koordinaten einführen, welche sich auf die Achsen OX, OY, OZ beziehen, von denen wir schon zu Anfang des § 80 Gebrauch gemacht hatten. Wir können dies am leichtesten, wenn wir bedenken, daß die Bewegung genau so vor sich geht als ob sie relativ gegen ein taugliches Bezugssystem geschähe, wenn wir zu den tatsächlich auf m wirkenden Kräften, deren Resultierende in den Richtungen der drei Koordinatenachsen OX, OY, OZ die Komponenten X, Y, Z haben soll, noch die drei Kräfte K_1, K_2, K_3 hinzufügen, welche alle in der Richtung OZ die Komponente Null haben. Da K_1 die Richtung von r hat, so sind $m\omega^2 x$ und $m\omega^2 y$ seine Komponenten in den Richtungen OX und OY. Da ferner die Kraft $K_2 = mr\,d\omega/dt$ auf r senkrecht steht und nach der früher angegebenen Regel in dem Sinne wirkt, in dem w wächst, so daß wenn $d\omega/dt$ und die Koordinaten des materiellen Punktes m positiv sind, ihre x-Komponente positiv, ihre y-Komponente aber negativ ist, so sind: $my\,d\omega/dt$, $-mx\,d\omega/dt$ ihre Komponenten in den Richtungen OX und OY. Da endlich K_3 senkrecht auf der mit p bezeichneten Geschwindigkeit steht und für positive Werte von dx/dt und dy/dt in der x-Richtung eine positive, in der y-Richtung eine negative Komponente hat, so sind $2m\omega\,dy/dt$ und $-2m\omega\,dx/dt$ seine Komponenten in den Richtungen OX und OY. Fügen wir alle diese Kräfte den tatsächlich auf m wirkenden Kräften X, Y, Z bei, so erhalten wir die

gewöhnlichen Bewegungsgleichungen, welche nach Division durch m folgendermaßen lauten:

$$441)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \dfrac{1}{m} X + \omega^2 x + y \dfrac{d\omega}{dt} + 2\omega \dfrac{dy}{dt}, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} = \dfrac{1}{m} Y + \omega^2 y - x \dfrac{d\omega}{dt} - 2\omega \dfrac{dx}{dt}, \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} = \dfrac{1}{m} Z. \end{cases}$$

Sehr leicht findet man diese Gleichungen direkt mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen für generalisierte Koordinaten. Man kann offenbar die Koordinaten x, y, z der Masse m relativ gegen das rotierende Koordinatensystem als Variable betrachten, welche dessen Position zu jeder Zeit eindeutig bestimmen und daher Langranges Gleichungen anwenden, in denen x, y, z für $p_1, p_2, p_3 \ldots$ zu setzen ist. Aus den Gleichungen 437) folgt:

$$x'_1 = x' \cos w - y' \sin w - x\omega \sin w - y\omega \cos w,$$
$$y'_1 = x' \sin w + y' \cos w + x w \cos w - y\omega \sin w.$$

Die lebendige Kraft der Masse m ist

$$T = \frac{m}{2}(x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1) = m\left[\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + \right.$$
$$\left. + (x^2 + y^2)\frac{\omega^2}{2} + (xy' - yx')\omega\right].$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m(\omega^2 x + \omega y'), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = m(\omega^2 y - \omega x'), \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x'} = m(x' - \omega y), \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = m(y' + \omega x), \quad \frac{\partial T}{\partial z'} = m z'.$$

Die Substitution dieser Werte in die Lagrangeschen Gleichungen, welche in diesem Falle lauten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = X$$

mit zwei analogen für die y- und z-Achse liefert sofort die Gleichungen 441).

Es ist dies ein Beispiel für die Anwendung generalisierter Koordinaten, welche die Zeit explizit enthalten, weshalb auch die lebendige Kraft T hier eine inhomogene quadratische Funktion der x', y', z' ist.

§ 84. Grundgleichungen für die Bewegung eines schweren Körpers relativ gegen die rotierende Erde.

Wir wollen nun in Kürze eines der wichtigsten Probleme der Relativbewegung behandeln, nämlich das der Bewegung eines schweren Körpers relativ gegen die in Drehung begriffene Erde. Wir betrachten bloß die Bewegung eines schweren materiellen Punktes von der Masse m relativ gegen die Erde.

Es sei N der Nordpol der Erde, A der auf der nördlichen Hemisphäre gelegene Punkt, wo sich der materielle Punkt m zu Anfang der Zeit befand. Wir ziehen durch A ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die $A\zeta$-Achse ist der Richtung der scheinbaren Schwere im Punkte A entgegengesetzt. Die negative $A\zeta$-Achse schneidet die Erdachse im Punkte O. Den Winkel NOA bezeichnen wir mit $90 - \varepsilon$, so daß ε die geographische Breite von A ist. Die $A\eta$-Achse ist im Punkte A südlich, die $A\xi$-Achse westlich gerichtet. Die Normale vom Punkte A auf die Erdachse habe den Fußpunkt O', AA' sei ihre Verlängerung über A hinaus. Sowohl der Punkt A als auch die Achsen $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ sind während der Drehung der Erde fest mit dieser verbunden.

Zu irgend einer Zeit t habe der Punkt m die Koordinaten ξ, η, ζ bezüglich dieses Koordinatensystems. c sei seine Geschwindigkeit relativ gegen die Erde, $u = \frac{d\xi}{dt}$, $v = \frac{d\eta}{dt}$, $w = \frac{d\zeta}{dt}$ deren Komponenten bezüglich derselben Koordinatenachsen. Ξ, H, Z seien die Komponenten der Gesamtkraft mit Einschluß der Zentrifugalkraft, welche auf m wirkt, in den Koordinatenrichtungen, so daß also, wenn nur die Anziehung der Erde wirken würde, im Punkte A selbst $\Xi = \mathrm{H} = 0$, $-Z$ gleich dem scheinbaren Gewichte mg der

Masse m wäre, wenn g die scheinbare Beschleunigung der Schwere in A ist.

Wir können die für ruhende Körper geltenden Gleichungen der Mechanik anwenden, wenn wir den Kräften Ξ, H, Z noch die Coriolissche Kraft beifügen. Man beweist leicht, daß die Resultierende der durch mehrere Geschwindigkeiten geweckten Coriolisschen Kräfte gleich der durch die Resultierende jener Geschwindigkeiten geweckten Coriolisschen Kraft ist.

Die durch die Geschwindigkeitskomponente u geweckte Coriolissche Kraft hat die Intensität $2mu\omega$ und steht auf u senkrecht in einer zur Erdachse normalen Ebene. Sie hat die Richtung AO', da diese durch die Erddrehung auf kürzestem Wege in die positive $A\xi$-Richtung übergehrt. ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung. Die Komponenten der durch u geweckten Coriolisschen Kraft in den Richtungen $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ sind also Null, $-2mu\omega\sin\varepsilon$, $-2mu\omega\cos\varepsilon$.

Um die durch die Geschwindigkeitskomponenten v und w geweckten Coriolisschen Kräfte zu finden, müssen wir diese beiden Geschwindigkeitskomponenten auf eine zur Erdachse senkrechte Ebene projizieren. Die Projektionen sind $v\sin\varepsilon$ und $w\cos\varepsilon$ und haben beide die Richtung AA'. Die durch sie geweckten Coriolisschen Kräfte haben daher beide die Richtung $A\xi$ und sind $2m\omega v\sin\varepsilon$ bezw. $2m\omega w\cos\varepsilon$.

Fügen wir alle diese Coriolisschen Kräfte den Kräften Ξ, H, Z bei, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

$$442)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{m}\Xi + 2\omega(v\sin\varepsilon + w\cos\varepsilon),\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m}\mathsf{H} - 2\omega u\sin\varepsilon,\\ \frac{dw}{dt} &= \frac{1}{m}\mathsf{Z} - 2\omega u\cos\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Man pflegt diese Gleichungen gewöhnlich auf einem anderen Wege abzuleiten. Man wählt zuerst O als Koordinatenursprung, ON als positive x-Achse und legt die y-Achse durch O in den geographischen Meridian des Ortes A. Sind

x, y, z die Koordinaten des Punktes m zur Zeit t bezüglich dieses Koordinatensystems, so gelten für x, y, z die Gleichungen 441). In diese Gleichungen werden dann ξ, η, ζ durch Koordinatentransformation eingeführt. Die Transformationsgleichungen sind, wie man leicht sieht, die folgenden:

$$443)\quad \begin{cases} \xi = x, \quad \eta = y\sin\varepsilon - z\cos\varepsilon, \quad \zeta = y\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon - OA, \\ y = \eta\sin\varepsilon + (\zeta + OA)\cos\varepsilon, \quad z = -\eta\cos\varepsilon + (\xi + OA)\sin\varepsilon, \\ \Xi = X, \quad \mathrm{H} = Y\sin\varepsilon - Z\cos\varepsilon, \quad \mathrm{Z} = Y\cos\varepsilon + Z\sin\varepsilon. \end{cases}$$

Es folgen wieder die Gleichungen 442).

Man hat hierbei einen Vorteil. Die Gravitationswirkung der Erde auf m hat jedenfalls eine Kraftfunktion φ, welche mit genügender Annäherung als Funktion von z und $\sqrt{x^2+y^2}$ betrachtet werden kann. Wirkt daher nur die Schwere, so sind X, Y, Z die negativen partiellen Ableitungen 443) von $\psi = \varphi - \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$ nach den Koordinaten.

Um $-\Xi$, $-\mathrm{H}$, $-\mathrm{Z}$ zu erhalten aber braucht man bloß in diesen Ausdruck ξ, η, ζ für x, y, z einzuführen und dann nach ξ, η, ζ partiell zu differenzieren.

Man erhält so ganz allgemein die Gleichungen:

$$444)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{m}\left(\Xi' - \dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + 2\omega(v\sin\varepsilon + \omega\cos\varepsilon), \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}\left(\mathrm{H}' - \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) - 2\omega u\sin\varepsilon, \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{1}{m}\left(\mathrm{Z}' - \dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right) - 2\omega u\cos\varepsilon, \end{cases}$$

wobei die ψ enthaltenden Glieder die Wirkung der Schwere und Zentrifugalkraft darstellen, Ξ', H', Z' aber sind die Komponenten der Kräfte, welche etwa sonst noch auf die Masse m wirken.

Es läßt sich aber die Funktion ψ doch nur angenähert ermitteln und wir werden mit der Gleichungen 442) auskommen.

§ 85. Beispiele.

Es möge sich der Punkt m nur wenig von seiner Ausgangsstelle A entfernen. Da daselbst die $A\zeta$-Achse der scheinbaren Schwere entgegengerichtet ist, so ist dort, wenn nur die Schwere wirkt, $\Xi = \mathsf{H} = 0$, $Z = -mg$. In unmittelbarer Nähe von A hat man daher die Gleichungen:

$$445)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 2\,\omega\,(v \sin\varepsilon + w \cos\varepsilon), \\[2mm] \dfrac{dv}{dt} = -\,2\,\omega\,u \sin\varepsilon, \\[2mm] \dfrac{dw}{dt} = -\,g - 2\,\omega\,u \cos\varepsilon. \end{cases}$$

1. *Schuß nach Süden.* Der Punkt m habe zu Anfang eine sehr große horizontale südlich gerichtete Geschwindigkeit v. Aus der ersten der Gleichungen 445) folgt, daß er allmählich dazu eine westliche Geschwindigkeit $u = 2\omega t v \sin\varepsilon$ erhält. Er weicht also westlich ab. Erst wenn u größer geworden ist, wirkt es wieder auf v, und wenn die Vertikalbewegung länger gedauert hat, wirkt auch sie auf u; das erste, was man bemerkt, ist aber die westliche Abweichung. Da ihre Geschwindigkeit u der Zeit proportional ist, so ist die Westverschiebung $\xi = \omega t^2 v \sin\varepsilon$ dem Quadrate der Zeit proportional.

Ebenso erfährt ein westlich geworfener Körper eine Norddeviation, ein nördlich geworfener eine Ost- und ein östlich geworfener eine Süddeviation. Man sagt der südlich geworfene Körper kommt in Gegenden, wo die absolute östliche Geschwindigkeit der Punkte der Erdoberfläche infolge der Erdrotation größer ist, bleibt also westlich zurück, wogegen ein nördlich geworfener Körper östlich der darunter befindlichen Erdoberfläche voraneilt.

Ein nach West geworfener Körper aber bewegt sich absolut im Raume in der durch den im Raume fix gedachten Punkt A gehenden Vertikalebene. Geht dagegen der Punkt mit der Erde mit, so dreht sich die durch A gehende

Vertikalebene, und zwar ihre westliche Hälfte nach Süd, so daß die alte Vertikalebene nach Nord davon abweicht.

2. *Benzenbergs Fallversuche.* Der Punkt m falle ohne Anfangsgeschwindigkeit frei. Es ist in erster Annäherung:

$$w = -g t, \quad u = -\omega g t^2 \cos \varepsilon, \quad \xi = -\frac{\omega}{3} g t^3 \cos \varepsilon .$$

Der Körper fällt also nicht in der Vertikalen (der Richtung eines durch einen ruhenden schweren Körper gespannten Fadens), sondern weicht östlich ab und es ist der Absolutwert der Deviation der dritten Potenz der Fallzeit proportional. Es wäre leicht, die Annäherung weiter zu treiben und die Glieder mit ω^2 zu berechnen, doch erscheint dies nicht notwendig.

3. *Foucaults Pendel.* Wenn ein langes Pendel nur kleine Exkursionswinkel beschreibt, so kann man es mit genügender Annäherung als einen materiellen Punkt betrachten, welcher sich in der $\xi\eta$-Ebene bewegt und auf den immer eine gegen dessen Ruhelage A wirkende und der Entfernung von derselben proportionale Kraft wirkt. Es ist also in den Gleichungen 442) zu setzen $w = 0$, $\Xi = -m a^2 \xi$, $\mathrm{H} = -m a^2 \eta$. Diese verwandeln sich daher in

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = -a^2 \xi + 2 b \frac{d \eta}{d t},$$
$$\frac{d^2 \eta}{d t^2} = -a^2 \eta - 2 b \frac{d \xi}{d t},$$

wobei $b = \omega \sin \varepsilon$.

Das allgemeine Integral ist

$$\xi = A \cos (n_1 t + B) + C \cos (n_2 t + D),$$
$$\eta = A \sin (n_1 t + B) - C \sin (n_2 t + D),$$

wobei

$$n_1 = \sqrt{a^2 + b^2} - b, \quad n_2 = \sqrt{a^2 + b^2} + b,$$

oder da b klein gegen a ist

$$n_1 = a - b, \quad n_2 = a + b .$$

Die einfachste partikuläre Lösung ist

$$\xi = A[\cos(a-b)t + \cos(a+b)t] = 2A\cos bt\cos at,$$
$$\eta = A[\sin(a-b)t - \sin(a+b)t] = -2A\sin bt\cos at.$$

Das Pendel schwingt daher anfangs westöstlich nach der Zeit $\frac{\pi}{2b} = \frac{\pi}{2\omega\sin s}$ nordsüdlich, d. h. die Westelongation ist kontinuierlich in eine Nordelongation übergegangen usw. Die Schwingungsebene dreht sich in der Zeit 24 Stunden mal $\sin s$ um 360^0 der Erddrehung entgegengesetzt, also genau so, als ob die Lage der Schwingungsebene im Raume fix wäre und sich die Erde mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega\sin s$ darunter hinwegdrehen würde, was die Komponente ihrer Winkelgeschwindigkeit um die Vertikale des Punktes A als Achse ist. Doch geschieht die Bewegung nur, wenn A einer der Pole der Erde ist, exakt in dieser Weise. Für alle anderen Lagen bewirken die durch die Vertikalbewegung des Pendels verursachten Deviationen kleine Abweichungen, welche wir mit diesen Vertikalbewegungen vernachlässigt haben.

§ 86. Bewegung auf einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere.

Da die Schwere groß ist gegenüber der Coriolisschen Kraft, so werden, wenn sich die Masse m weit bewegt, zuerst die Störungen bemerkbar sein, welche dadurch entstehen, daß die Schwere in Richtung und Größe variiert. Ist der Punkt m gezwungen, sich auf einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere zu bewegen, so wird aber diese durch den Gegendruck, welcher ihn hierzu zwingt, immer aufgehoben. Dann kann man also mit größerer Annäherung als sonst die Bahn des Beweglichen aus den Gleichungen 442) berechnen, ohne daß man die Funktionen φ und ψ zu kennen braucht.

Es soll außer der scheinbaren Schwere und der Kraft, welche den Punkt m zwingt, auf einer Niveaufläche derselben zu bleiben, keine Kraft wirken. Dann erhält man so lange die Niveaufläche, als eben (mit der $\xi\eta$-Ebene zusammen-

fallend) betrachtet werden darf, aus 442) die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = 2 \omega \sin \varepsilon \frac{d \eta}{d t}, \qquad \frac{d^2 \eta}{d t^2} = - 2 \omega \sin \varepsilon \frac{d \xi}{d t}.$$

Ist für $t = 0$ z. B. $\xi = \eta = 0$, $\frac{d \xi}{d t} = u_0$, $\frac{d \eta}{d t} = v_0$, so liefert die Integration

$$\xi = \frac{v_0}{c} [1 - \cos (c t)] + \frac{u_0}{c} \sin (c t),$$

$$\eta = \frac{u_0}{c} [\cos (c t) - 1] + \frac{v_0}{c} \sin (c t),$$

wobei $c = 2 \omega \sin \varepsilon$. Die Gleichung der Bahn ist

$$\left(\xi - \frac{v_0}{c}\right)^2 + \left(\eta + \frac{v_0}{c}\right)^2 = \frac{u_0^2 + v_0^2}{c^2}.$$

Dieselbe ist also ein Kreis vom Radius $\frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{2 \omega \sin \varepsilon}$. Dies ist der Weg, den ein mit der Geschwindigkeit $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$ bewegter Körper etwa in $\frac{2}{\sin \varepsilon}$ Stunden zurücklegen würde. Der ganze Kreis wird in $\frac{12}{\sin \varepsilon}$ Stunden beschrieben, während welcher Zeit die Bewegungshindernisse wohl längst die Geschwindigkeit des Beweglichen aufgezehrt haben. Die früher gefundenen Seitenabweichungen horizontal geworfener Körper sind dadurch bedingt, daß sich diese in Bögen dieses Kreises bewegen. Umgekehrt folgt aus der schon früher gefundenen Tatsache, daß die Seitenabweichung für jede horizontale Wurfbewegung im selben Sinne erfolgt und gleiche Krümmung erzeugt, von selbst wieder die Bewegung im Kreise.

Wollte man die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere nicht relativ gegen die Erde, sondern absolut im Raume berechnen, so müßte man bedenken, daß die Schwere allein nicht senkrecht auf der besprochenen Niveaufläche steht, sondern tangential dazu eine Komponente hat, die der der Zentrifugalkraft immer gerade entgegengesetzt ist. Diese Komponente bewirkt, daß ein Körper, welcher gezwungen ist, sich in einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere zu bewegen,

wenn er anfangs die Geschwindigkeit hat, welche derselben Stelle des Erdkörpers vermöge der Erdrotation zukommt, sich absolut im Raume nicht in einer geodätischen Linie der Niveaufläche der scheinbaren Schwere, sondern in einem zur Erdachse senkrechten Parallelkreise derselben bewegt. Wenn er eine gleichgerichtete, aber größere oder kleinere Geschwindigkeit hat, erklärt diese Komponente die Seitenabweichung, falls man von der Betrachtung der Absolutbewegung des Körpers ausgeht und diese erst nachher mit der der Erde vergleicht.

§ 87. **Allgemeinste Gleichungen für die Relativbewegung.**

Wir wollen nur noch weniges über den allgemeinen Fall sagen, daß ein beliebiges starres System (das zweite System) eine vollständig beliebige Bewegung macht und die Bewegung eines anderen (des ersten Systems) relativ gegen die des zweiten zu berechnen ist.

Wir können die Bewegung des zweiten Systems zusammensetzen aus einer Bewegung eines Punktes Ω desselben (des Schwerpunktes oder auch irgend eines anderen Punktes) in einer Kurve und einer Drehung um eine stets durch diesen Punkt gehende Achse, die augenblickliche Drehungsachse, wobei jedoch sowohl die Lage der Achse als auch die Winkelgeschwindigkeit der Drehung sich kontinuierlich mit der Zeit ändern kann. Wir führen ganz wie in § 80 ein fixes Koordinatensystem OX, OY, OZ und ein bewegliches $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ ein. Die Achsen des letzteren sollen fix mit dem zweiten Systeme verbunden sein, sein Ursprung soll der besprochene Punkt Ω sein.

Was wir suchen, sind die Gleichungen für die Veränderung der Koordinaten ξ, η, ζ irgend eines materiellen Punktes m des ersten Systems bezüglich des zweiten beweglichen Koordinatensystems, während wir auf die Koordinatenachsen x, y, z desselben Punktes bezüglich des fixen Koordinatensystems die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen der Mechanik anwenden können. Am raschesten kommen wir da unzweifelhaft wieder mittels der Lagrangeschen

Gleichungen zum Ziele. Wir bezeichnen, wie in § 26 die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes Ω des zweiten Systems in den Richtungen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, welche augenblicklich die beweglichen Koordinatenachsen haben, mit u, v, w; ferner die Komponenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit des zweiten Systems, also auch des beweglichen Koordinatensystems in denselben Richtungen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ und $\Omega\zeta$ mit λ, μ, ν. Wenn dann ein Punkt mit den Koordinaten ξ, η, ζ bezüglich des beweglichen Koordinatensystems fest mit diesem verbunden wäre, so daß ξ, η, ζ mit der Zeit unveränderlich wären, so wären dessen Geschwindigkeitskomponenten in den Richtungen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ und $\Omega\zeta$ nach den Gleichungen 156)

446) $$u + \mu\zeta - \nu\eta, \quad v + \nu\xi - \lambda\zeta, \quad w + \lambda\eta - \mu\xi.$$

Wir können uns die Bewegung des zweiten Systems und damit die des beweglichen Koordinatensystems dadurch gegeben denken, daß uns dessen Anfangslage und die Werte von u, v, w, λ, μ, ν zu jeder Zeit gegeben sind. Ist die Bewegung des zweiten Systems irgendwie anders gegeben, so können doch daraus die Werte dieser sechs Größen für jede Zeit berechnet werden. Die Koordinaten ξ, η, ζ irgend eines Massenteilchens m des ersten Systems bezüglich des beweglichen Koordinatensystems sind im allgemeinen nicht mit der Zeit unveränderlich. Ihre Differentialquotienten nach der Zeit seien ξ', η', ζ'. Wir finden daher die Gesamtkomponenten der Geschwindigkeit des Massenteilchens m in den Richtungen, welche $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ und $\Omega\zeta$ augenblicklich haben, indem wir zu den drei Ausdrücken 446) noch ξ' bezw. η' und ζ' addieren. Diese drei gesamten Geschwindigkeitskomponenten des Massenteilchens m sind also

$$\xi' + u + \mu\zeta - \nu\eta, \quad \eta' + v + \nu\xi - \lambda\zeta, \quad \zeta' + w + \lambda\eta - \mu\xi,$$

und die augenblickliche lebendige Kraft des Massenteilchens m ist

$$T = \frac{m}{2}[(\xi' + u + \mu\zeta - \nu\eta)^2 + \\ + (\eta' + v + \nu\xi - \lambda\zeta)^2 + (\zeta' + w + \lambda\eta - \mu\xi)^2].$$

Bezeichnen wir also mit Ξ die Kraft, welche in der Richtung $\Omega\xi$ auf das Bewegliche wirkt, so ist die auf die Abszissenrichtung bezügliche Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = \Xi,$$

oder nach Substitution des Wertes für T

$$\frac{d}{dt}(\xi' + u + \mu\zeta - \nu\eta) - \frac{1}{m}\Xi =$$
$$= \nu(\eta' + v + \nu\xi - \lambda\zeta) - \mu(\zeta' + w + \lambda\eta - \mu\xi) =$$
$$= \nu(\eta' + v) - \mu(\zeta' + w) + \xi(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \lambda(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta).$$

Die auf die beiden anderen Koordinatenachsen bezüglichen Gleichungen entstehen daraus durch zyklische Vertauschung.

Es wäre leicht, Gleichungen abzuleiten, in denen andere zur Bestimmung der Bewegung des zweiten Systems dienende Variable vorkommen, z. B. die Komponenten der Geschwindigkeit von Ω und der Rotationsgeschwindigkeit in den Richtungen der fixen Koordinatenachsen, sowie die verschiedenen Zusatz- bezw. Reduktionskräfte geometrisch zu diskutieren. Doch will ich hierauf nicht näher eingehen, da diese allgemeinen Gleichungen bisher keine Anwendung gefunden haben. Es sei nur noch bemerkt, daß, wenn man die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit eines starren Systems in Komponenten zerlegt, zwar die wirkliche augenblickliche Geschwindigkeit jedes Punktes die Superposition der Geschwindigkeiten ist, die er infolge der Komponenten hätte, dies aber keineswegs von den Beschleunigungen gilt, die ja aus unendlich kleinen zweiter Ordnung folgen und unendlich Kleines zweiter Ordnung wurde beim Beweise des Satzes von der Zusammensetzung der Drehungen vernachlässigt. Deshalb sind auch die Zusätze, Reduktions- und Führungskräfte, welche wegen einer Rotation des Bezugssystems anzubringen sind, keineswegs einfach die Superposition derjenigen, welche infolge jeder der Komponenten der Rotation anzubringen wären, wenn diese allein vorhanden wäre.

§ 88. Das Trägheitsgesetz.

Wir wollen nun zum Schlusse auf eine fundamentale Schwierigkeit zurückkommen, welche sich in den einfachsten Grundgesetzen der Mechanik findet, nämlich auf die Formulierung des Trägheitsgesetzes, wenn man keinen absoluten, transzendenten Raum einführen will. Wir sind dieser Schwierigkeit in der einfachsten Weise aus dem Wege gegangen, indem wir von etwas Wirklichem oder Existierenden gar nicht sprachen, sondern die Materie durch bloße Gedankenbilder, die materiellen Punkte ersetzten, unbekümmert darum, ob dies nicht auch in anderer Weise (z. B. unter Zugrundelegung eines anderen Koordinatensystems) mit gleichem Erfolge geschehen könne.

Gedankenbilder zu formen, wie wir wollen, kann uns niemand verwehren und daher auch nicht nebst den materiellen Punkten noch ein Koordinatensystem (das taugliche Bezugssystem) in dieselben aufzunehmen. Wir nennen diese Gedankenbilder nur deshalb hinterher wahr, weil sie uns nützlich sind, die künftigen Erscheinungen (unsere künftigen Empfindungen) möglichst vollständig und mühelos vorauszusagen, d. h. ihnen unsere Willensimpulse anzupassen.

Ein innerer Grund der Behauptung, daß die Gedankenbilder, in denen das Bezugssystem vorkommt, nicht exakt mit der Erfahrung sollten stimmen können, ist mir nicht erfindlich. Ich finde im Gegenteile, daß gerade diese Behauptung a priori etwas über die Erfahrung auszusagen bestrebt ist, was diese uns nicht früher selbst sagte. Ich kann daher in dieser Beziehung Mach nicht beipflichten, welcher, wenn ich ihn recht verstanden habe, daraus, daß unsere Gedanken nur Beziehungen zwischen den Objekten darzustellen haben, schließt, daß das Trägheitsgesetz nur durch die Fixsternwelt bestimmt sein könnte. Wäre das hier entwickelte Bild absolut richtig, so wären eben die Beziehungen zwischen den Objekten so, daß zu ihrer einfachsten Darstellung im Geist ein solches Bezugssystem gehörte. Daß der Fixsternhimmel bezüglich dieses Bezugs-

systems absolut drehungsfrei ist, wäre keine Notwendigkeit, daß er es sehr angenähert ist, aber wäre aus der großen Entfernung, die bei starker Drehung enorme Zentripetalkräfte fordern würde, erklärbar.

Für jemand, der die ganze, endlich gedachte Fixsternwelt übersähe, bestünde sogar die theoretische Möglichkeit, ihre Drehung mittels des Foucaultschen Pendels oder eines Gyrotrops zu konstatieren, wie wir sie für die Erde konstatieren könnten, wenn uns das Licht und damit die Kenntnis anderer Himmelskörper fehlte. Allerdings wäre diese Konstatierung keine unbedingte. Aber, wollte man sie leugnen, so müßte man die noch weit unnatürlichere und den Voraussetzungen dieses Buches zuwiderlaufende Annahme einer von einer fixen Geraden auf alle Massen ausgeübten, der Masse und Entfernung proportionalen Kraft und dazu noch der entsprechenden, auch von der Geschwindigkeit und Lage im Raume (gegen die Fixsternwelt) abhängigen Coriolisschen Kraft machen. Auch würde ein einziges Foucaultsches Pendel oder Gyrotrop nicht hinreichen; denn da könnte die Möglichkeit so kleiner störender Kräfte wohl kaum sicher verneint werden. Aber wenn die verschiedensten Foucaultschen Pendel, Streintzschen Gyrotrope, nach Lange geschleuderten materiellen Punkte usw. usw. in ihrer relativen Bewegung gegen die Sternenwelt, die ich natürlich endlich und als Ganzes beobachtbar annehme, alle auf eine Rotation der letzteren hinwiesen, so könnten wir doch als höchstwahrscheinlich hinstellen, daß sich bei Annahme derselben, also Aufnahme eines Bezugssystems in unser Gedankenbild, die Erscheinungen am einfachsten erklären oder sagen wir lieber beschreiben, im Gedanken nachbilden lassen, wie wir ja schon jetzt überzeugt sind daß sich bei Annahme einer Rotation der Erde die kosmischen Erscheinungen allein in vernünftiger Weise beschreiben lassen.

Daß es einen wirklichen Körper α gebe, der stets bezüglich unseres tauglichen Bezugssystems ruhte und dasselbe daher ersetzen könnte, wäre eine absurde Idee. Als bloßes Gedankending aber nenne ich es lieber „Bezugssystem“ als

„Körper α“. Schon der Name „Körper“ scheint mir so unpassend, wie möglich.

Bleiben wir also wieder bei der Annahme, die in diesem Buche beschriebenen Bilder würden die Natur exakt darstellen und die Welt wäre endlich. Dann müßte allerdings ihre durch ihren Schwerpunkt gehende invariable Achse bezüglich jedes tauglichen Bezugssystems ihre Richtung unveränderlich beibehalten und das gesamte Flächenmoment der Welt bezüglich derselben müßte konstant sein. Das hat aber keine andere Bedeutung als die folgende: Gegeben sind uns nur die relativen Lagen aller Teile der Welt zu allen Zeiten. Wir können sie auf ein beliebiges zu jeder Zeit wieder beliebig anders gewähltes Koordinatensystem beziehen und auch je zwei Zeitstrecken nach Belieben gleich oder verschieden lang nennen. Aber nur bei einer bestimmten Bezeichnung der Zeitstrecken als gleich lang und nur bei bestimmten zeitlichen Reihenfolgen der Lagen dieser Koordinatensysteme ist die Bedingung erfüllt, daß die auf sie bezogenen Veränderungen jedes materiellen Punktes der Welt die einfachen in diesem Buche dargelegte Gleichungen der Mechanik erfüllen. Nur wenn dies der Fall ist, nennen wir die zeitliche Reihenfolge der betreffenden Koordinatensysteme ein taugliches Bezugssystem.

Für jedes solche taugliche Bezugssysteme nun muß nach dem Bewiesenen die durch den Schwerpunkt der Welt gehende Achse, bezüglich welcher die Summe der Flächenmomente der Welt ein Maximum ist, eine unveränderliche Lage haben und diese Summe muß selbst eine Konstante sein. Natürlich ist dabei noch vorausgesetzt, daß man sich die Welt überhaupt endlich denken will. Es könnten aber ganz gut die mechanischen Differentialgleichungen für eine solche Reihenfolge von Lagen des Koordinatensystems ihre einfache Form annehmen, für welche das konstante Flächenmoment der Welt um seine durch den Schwerpunkt gehende invariable Achse nicht den Wert Null hat, so daß also gewissermaßen die Welt in Drehung begriffen wäre, die freilich im selben Maße klein sein müßte als die Welt groß ist.

So gänzlich unwahrscheinlich es ist, daß unsere Kenntnisse wirklich sich jemals so ausbreiten werden, so können wir uns doch im Gedanken in die Lage versetzen, daß wir die ganze Fixsternwelt, wenn wir uns dieselbe überhaupt endlich denken, so gut kennen würden, als wir heute unsere Erde kennen und daß wir eine Drehung derselben so sicher nachweisen könnten, als die der Erde. Wenn es das Licht nicht gäbe, uns also außer der Erde kein Himmelskörper bekannt wäre, so wären wir sicher viel später zum Begriffe der absoluten Drehung gelangt. Wir hätten aber auch sicher durch Versuche an Gyroskopen, Pendeln usw. dazu gelangen können und wären auch wahrscheinlich dazu gelangt. Es ist also keineswegs bloß die Beziehung zum Fixsternhimmel, was diesen Begriff bedingt.

Daß die sukzessiven Lagen der Hauptträgheitsachsen der Welt bezüglich ihres Schwerpunkts ein solches taugliches Bezugssystem bilden, wäre natürlich möglich und unserer bisherigen Erfahrung nicht widersprechend, nach welcher beliebige, unveränderlich mit dem nahe unveränderlichen Fixsternhimmel verbundene Achsen taugliche Bezugssysteme sind. Unter dieser Annahme wäre die Aufnahme eines besonderen Koordinatensystems überflüssig, da dessen Lage aus den sukzessiven relativen Lagen aller Teile der Welt für jeden Zeitmoment berechnet werden könnte. Da aber die Richtigkeit einer solchen Annahme durch nichts bewiesen oder beweisbar ist, so ist es zwar sicher gut, auf ihre Möglichkeit hinzuweisen, es wäre aber offenbar eine unerlaubte Beschränkung der Allgemeinheit, sie an die Spitze der Mechanik zu stellen.

Ganz hiervon unabhängig ist die Frage, ob die hier entwickelten mechanischen Gleichungen und damit auch das Trägheitsgesetz nicht vielleicht bloß angenähert richtig sind und ob nicht bei einer richtigeren Formulierung die Unwahrscheinlichkeit oder sagen wir Inhomogenität, die in der Notwendigkeit der Aufnahme eines Koordinatensystems neben den materiellen Punkten in das Bild liegt, von selbst wegfällt.

Da wies Mach auf die Möglichkeit hin, daß wir ein richtigeres Bild durch die Annahme erhalten, nur die Be-

schleunigung der Entfernungsänderung je zweier Massenteilchen sei hauptsächlich durch die benachbarten Massen, die Geschwindigkeit dieser Änderung aber durch eine Formel bestimmt, in welcher die sehr entfernten Massen den Ausschlag geben. Dadurch wird natürlich jede Aufnahme eines Koordinatensystems in das Bild vermieden, da jetzt nur von Entfernungen die Rede ist. Freilich führt Mach dafür andere Schwierigkeiten ein, so die Endlichkeit der Welt, eine Art Fernwirkung auf die allergrößten Distanzen usw. Diese Schwierigkeiten schienen mir speziell nicht so groß, wie vielleicht manchem anderen Physiker, sie haben aber immerhin das Mißliche, daß sie jede erfahrungsmäßige Kontrolle für alle Zeiten auszuschließen scheinen. Auch die exakte Ableitung des Superpositionsgrinzips durch fortwährende Anwendung der neuen Form des Trägheitsgesetzes auf den Schwerpunkt der in Wechselwirkung begriffenen Massen scheint mir nicht unmittelbar auf der Hand zu liegen. Ferner ist $\frac{d^2 \Sigma m r}{d t^2} = 0$ erst eine Gleichung, also doch nicht der Aussage ganz äquivalent, daß sich ein Punkt geradlinig und gleichförmig bewegt.

Unter allen Umständen erscheint mir eine derartige Erweiterung unseres Blickes durch den Hinweis auf die Möglichkeit, daß das, was uns das Gewisseste und Naheliegendste scheint, vielleicht nur angenähert richtig ist, höchst wertvoll. Es steht in einer Linie mit dem Hinweise auf die Möglichkeit, daß sich die Entfernungen der Fixsterne vielleicht nur in einem nichteuklidischen Raume von enorm geringer Krümmung konstruieren lassen, was ja insofern auch mit dem Trägheitsgesetze zusammenhängt, daß dann ein bewegter Körper, auf den keine Kräfte wirken, in Äonen an die alte Stelle zurückkehren müßte, falls das betreffende Krümmungsmaß positiv ist.

In allen diesen Betrachtungen gingen wir von der Voraussetzung der Endlichkeit der ganzen Welt aus. Denkt man sich die Welt unendlich, so werden Begriffe, wie der Schwerpunkt, die invariable Achse, die Hauptträgheitsachsen usw. der Welt vollkommen gegenstandslos. Man müßte

dann annehmen, daß das Trägheitsgesetz durch eine Formel bestimmt wird, nach welcher die naheliegenden Massen von verschwindenden, die in Siriusweiten befindlichen vom größten, die noch viel entfernteren Massen aber wieder von verschwindendem Einfluß auf die Formulierung des Trägheitsgesetzes sind.

Alle Schwierigkeiten bei Formulierung des Trägheitsgesetzes vermeidet die elektromagnetische Theorie der Materie, indem sie annimmt, daß die Maxwellschen Gleichungen für das Verhalten des Lichtäthers und die Bewegung der Elektronen in demselben das Primäre sind, aus dem für letztere das Trägheitsgesetz für die Bewegung relativ gegen den Lichtäther und die übrigen Gesetze der Mechanik folgen. Für die Teilchen des Lichtäthers aber gilt das Trägheitsgesetz nicht; die Maxwellschen Gleichungen müßten so gefaßt werden, daß sie bloß die Wechselwirkung nebeneinanderliegender Volumelemente bestimmen, zu ihrer Fassung also kein absoluter Raum erforderlich ist. Eine Entwicklung dieser gegenwärtig noch ganz unausgearbeiteten Theorie liegt uns hier ferne.

Berichtigungen.

[illegible] statt [illegible]

[illegible] statt [illegible]

[illegible] statt [illegible]

[illegible] muß lauten:

$$[illegible] - T - \sum_{1}^{s} \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t}\right) \frac{\partial T}{\partial p'_h} [illegible]$$

[illegible] Z. [illegible] bis [illegible] v. u. müssen lauten:

$$[illegible] \frac{\partial V}{\partial p_i} + \sum_{1}^{s} \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \, \partial p_i} \delta p_i [illegible]$$

und daher wird:

$$[illegible] \Omega = \int_{t_0}^{t_1} \delta p_i \, d t \sum_{1}^{s} \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \, \partial p'_i} [illegible]$$

S. 234 Z. [illegible] v. u. muß lauten:

$$\sum_{1}^{s} \left(p'_h - \frac{d p_h}{d t}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \, \partial p'_i} = 0.$$

S. 234 Z. [illegible] v. u. $\frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \, \partial p'_i} = a_{hi}$ statt $\frac{\partial T}{\partial p'_h \, \partial p'_i} = a_{hi}$.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Früher erschien:

Vorlesungen
über die

Prinzipe der Mechanik.

Von

Ludwig Boltzmann,

Professor der theoretischen Physik an der Universität Wien.

I. Teil:

enthaltend die Prinzipe, bei denen nicht Ausdrücke nach der Zeit integriert werden, welche Variationen der Koordinaten oder ihrer Ableitungen nach der Zeit enthalten.

X, 241 S. mit 16 Figuren. 1897. M. 6.—; geb. M. 7.—.

Aus den Besprechungen:

Zeitschrift für physikal. Chemie: Unter allen Umständen gewährt es einen großen Reiz, zu beobachten, wie sich ein Mann, wie der Verfasser, in dem von ihm gewählten eigentümlichen Fahrwasser bewegt, und kein Leser, stehe er nun auf dem Standpunkte des Verfassers, oder auf einem entgegengesetzten, wird das Buch ohne Nutzen und Vergnügen aus der Hand legen.

Zeitschrift für österreichische Gymnasien: Wir müssen gestehen, daß das Studium des vorliegenden Werkes ein in jeder Beziehung genußreiches ist und durch dasselbe viele Anregungen für weitere Untersuchungen gegeben werden. Das was der Verfasser anstrebte, Klarheit in die Prinzipien der Mechanik zu bringen und die Beziehungen derselben darzulegen, ist ihm vollständig gelungen.

Fortschritte der Physik: Das Buch ist eine eigentümliche Darstellung der Begriffe und Sätze der Mechanik von einem allgemeinen Standpunkte aus, unter fortlaufender Kritik von Seiten der Philosophie und der Mathematik. In dieser Gestalt wird es berufen sein, in der Folgezeit einen bestimmenden Einfluß auf die Vortragsweise der theoretischen Mechanik auszuüben, mag es nun Beistimmung oder Widerspruch hervorrufen. Obgleich in der Vorrede der Anspruch auf Vollständigkeit und Neuheit abgelehnt wird, so dürfte doch keine wichtige allgemeine Frage unberührt geblieben sein, wennschon manchmal nur in wenigen Sätzen eine Erwähnung geschehen ist, und bei einem so originalen Denker, wie Boltzmann, findet der Leser in der Behandlung von Gegenständen, die scheinbar abgeschlossen sind, immer wieder neue Beleuchtungen, welche Klarheit über die Dinge verbreiten.

Gustav Robert Kirchhoff

Gedächtnisrede

von **Ludwig Boltzmann.**

32 Seiten mit Kirchhoffs Porträt. 1888. M. 1.—.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Vorlesungen über die Maxwellsche Theorie
der
Elektricität und des Lichtes
von
Dr. Ludwig Boltzmann,
Professor der theoretischen Physik an der Universität Wien.

I. Teil:
Ableitung der allgemeinen Gleichungen für ruhende, homogene, isotrope Körper.

XII, 189 S. mit vielen Textfig. u. 2 lith. Taf. 1891. M. 5.—, geb. M. 6.—

II. Teil:
Verhältnis zur Fernwirkungstheorie, spezielle Fälle der Elektrostatik, stationäre Strömung und Induction.

VIII, 166 S. mit Textfiguren u. 2 Tabellen. 1893. M. 5.—, geb. M. 6.—.

Aus den Besprechungen:

Zeitschr. f. phys. u. chem. Unt.: ... Nur ein Boltzmann konnte den oft unentwirrbar komplizierten Plan des Maxwellschen Lehrgebäudes bis in alle Details so verstehen, um ihn mit dieser Klarheit bloßzulegen. Aus den einfachsten Annahmen — den Gesetzen der cyklischen Bewegungen und der Lagrangeschen Gleichung — entwickeln sich die weittragendsten Schlüsse mit einer Klarheit und Eleganz, die neben der vollendeten wissenschaftlichen Befriedigung auch einen hervorragenden ästhetischen Genuß bietet.

Elektrotechn. Zeitschr.: ... Dem Werke eines unserer bedeutendsten mathematischen Physiker wird zweifellos allseitig das größte Interesse entgegengebracht werden.

... Von allen Versuchen, welche bisher unternommen wurden, um die Maxwellsche Theorie in folgerechter Entwickelung darzustellen, müssen die Boltzmannschen Vorlesungen an erster Stelle genannt werden.

Zeitschr. f. d. österr. Gymnas.: ... Die Arbeit ist zweifelsohne unter allen bisher erschienenen die geeignetste, um den Zusammenhang der alten und neuen Elektrizitätslehre zu erfassen und das leichtere Studium Maxwells anzubahnen.

Zeitschr. f. d. Realschulw.: ... Die Fülle schöner Details, die Eleganz der mathematischen Darlegungen, die trotz der großen Ansprüche, die an den Leser gestellt werden, doch äußerst klare Ausdrucksweise werden dem Buche gewiß viele Freunde sichern.

Deutsche Litteraturztg.: ... Die Darstellung, die sich durch Klarheit, Kürze und Übersichtlichkeit auszeichnet, läßt die Maxwellschen Ideen in einem neuen Lichte erscheinen und ist wohl geeignet, uns auch das, was in der Theorie zuerst fremdartig anmutet, zum Verständnis zu bringen. Das Buch, das erste seiner Art, das in Deutschland veröffentlicht ist, kann daher als eine wesentliche Bereicherung der Literatur über Maxwells Theorie bezeichnet werden.

Beibl. d. Annalen d. Phys. u. Ch.: ... Selbst der mit der Maxwellschen Theorie in ihren verschiedenen Formen schon voll Vertraute wird das originell geschriebene, an Anregungen und an pädagogischen Feinheiten in der Darstellung reiche Buch mit Genuß lesen.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Vorlesungen über Gastheorie

von

Dr. Ludwig Boltzmann,

Professor der theoretischen Physik an der Universität Wien.

I. Teil:

Theorie der Gase mit einatomigen Molekülen, deren Dimensionen gegen die mittlere Weglänge verschwinden.

IV, 200 Seiten. 1895. M. 6.—, geb. M. 7.—.

II. Teil:

Theorie van der Waals'; Gase mit zusammengesetzten Molekülen; Gasdissoziation; Schlußbemerkungen.

X, 265 Seiten. 1898. M. 7.—; geb. M. 8.—.

In dem vorliegenden Werke, das aus an der Münchener und Wiener Universität gehaltenen Vorlesungen entstanden ist, versucht der Verfasser vor allem die bahnbrechenden Arbeiten von Clausius und Maxwell übersichtlich wiederzugeben. Aber auch seinen eigenen Arbeiten ist Platz gegönnt.

Aus den Besprechungen:

Literar. Centralbl.: Der Verfasser, der im Laufe seiner Studien selbst namhafte Beiträge zur Entwickelung der kinetischen Gastheorie geliefert hat, bringt uns eine hochinteressante Bearbeitung des gesamten Gebietes, indem er zugleich vielfach neue Gesichtspunkte darbietet und neues Geschütz ins Feld führt gegen die sich mehrenden Angriffe von seiten der Energetik. . . . Das Werk ist überall verständlich geschrieben und birgt eine Fülle der schätzbarsten Untersuchungen.

Elektrotechnische Zeitschrift: Das Buch ist nicht nur ein hervorragendes Lehrbuch, das die schwierigsten Gegenstände glänzend behandelt, es ist zugleich ein Kampfbuch gegen die energetischen Anschauungen der neueren Zeit und als solches für die Anhänger der Energetik ebenso unentbehrlich, wie es als Publikation einer der ersten deutschen theoretischen Physiker den Interessen aller Mathematiker und Physiker sicher ist.

Zeitschrift für Realschulwesen, Wien: Das Erscheinen eines Buches von Boltzmann ist ein literarisches Ereignis . . . . Wir unterfangen uns zum Schlusse gar nicht, das Werk den Lesern dieser Zeitschrift noch zu empfehlen, sondern sind überzeugt, daß es ohnedies die verdiente Verbreitung finden und allenthalben Nutzen bringen wird.

Journ. of Phys. Chem.: . . . In conclusion, the student desirous of studying the Kinetic Theory of Gases can hardly do better than take up this book, confident that he will here find a clear and mathematically sound treatment of the subject.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Vorlesungen

über

Theoretische Physik

von

H. von Helmholtz.

In sechs Bänden.

I. Band, I. Abt.: **Einleitung zu den Vorlesungen**, herausgegeben von **Arthur König** und **Carl Runge**. [VIII, 50 Seiten mit 1 Porträt.] 1903. M. 3.—; geb. M. 4.50.

I. Band, 2. Abt.: **Dynamik diskreter Massenpunkte**, herausgegeben von **Otto Krigar-Menzel**. [X, 380 Seiten mit 21 Figuren.] 1898. M. 15.—; geb. M. 16.50.

II. Band: **Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen**, herausgegeben von **Otto Krigar-Menzel**. [VIII, 248 Seiten mit 9 Figuren.] 1902. M. 12.—; geb. M. 13.50.

III. Band: **Mathematische Prinzipien der Akustik**, herausgegeben von **Arthur König** und **Carl Runge**. [XIV, 256 Seiten mit 21 Figuren.] 1898. M. 12.—; geb. M. 13.50.

IV. Band: **Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus**, herausgegeben von **Otto Krigar-Menzel**. Soll bald erscheinen.

V. Band: **Elektromagnetische Theorie des Lichtes**, herausgegeben von **Arthur König** und **Carl Runge**. [XII, 370 Seiten mit 54 Figuren.] 1897. M. 14.—; geb. M. 15.50.

VI. Band: **Theorie der Wärme**, herausgegeben von **Franz Richarz**. [XII, 418 S. mit 40 Fig.] 1903. M. 16.—; geb. M. 17.50.

Aus den Besprechungen:

Elektrot. Zeitschr.: Wir begnügen uns damit, der Genugtuung Ausdruck zu geben, daß H's wertvolle Vorlesungen in dieser Weise erhalten bleiben und wünschen dem Unternehmen guten Fortgang und guten Erfolg.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften: Die Herausgabe der gesamten Vorlesungen, die Helmholtz über theoretische Physik gehalten hat, ist ein wichtiges Ereignis für die Wissenschaft. Denn wenn auch die großen Ideen, mit denen Helmholtz die Wissenschaft befruchtet, die Resultate seiner Forschungen, durch die er ihr neue Bahnen wies, in seinen wissenschaftlichen Abhandlungen niedergelegt sind, so enthalten doch auch seine Vorlesungen bei der eigentümlichen Art, wie sie entstanden, viele neue Gedanken, tiefgehende Anregungen, die, wie sie schon auf den engeren Kreis seiner Schüler gewirkt haben, so jetzt auch auf die weitesten Kreise wirken werden.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Festschrift

Ludwig Boltzmann

gewidmet
zum sechzigsten Geburtstage 20. Februar 1904.

XII, 980 Seiten. Mit einem Porträt, 101 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. 1904. M. 18.—.

Die Festschrift enthält 117 Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Physik, Elektrotechnik und physikalischen Chemie, und die bedeutendsten Fachgelehrten haben daran mitgearbeitet, wir nennen nur die Namen:

S. Arrhenius, H. du Bois, O. Chwolson, P. Duhem, H. Ebert, J. H. van't Hoff, H. Kayser, W. König, E. Lecher, O. Lehmann, H. A. Lorentz, E. Mach, W. Nernst, C. Neumann, L. Pfaundler, M. Planck, F. Richarz, E. Riecke, A. Righi, C. Runge, A. Sommerfeld, J. D. van der Waals, E. Wiedemann, W. Wien u. v. a.

Aus den Besprechungen:

Zeitschrift für das Realschulwesen, XXIX. Jahrg., Heft 4: Fast alle Gebiete der Physik sind vertreten, in erster Reihe die Elektrizitätslehre, dann die Optik, die Gastheorie, die Wärmelehre, die Molekularphysik, die Mechanik, die physikalische Chemie; viele der Arbeiten knüpfen unmittelbar an Boltzmanns eigene Forschungen an. Einige wenige der Arbeiten gehören der reinen Mathematik zu. Der internationale Charakter des Huldigungsaktes drückt sich in der nationalen Zugehörigkeit der Mitarbeiter und in den Sprachen aus, die hier zu einem harmonischen Akkord zusammenklingen: Außer aus Österreich (29) und Deutschland (44) sind Beiträge eingelangt aus Amerika (8), England (7), Frankreich (6), Rußland (6), Holland (5), Italien (4), Schweden (4), Norwegen (1), Belgien (1), Australien (1), Japan (1), die in fünf verschiedenen Sprachen abgefaßt sind: Deutsch (90), Englisch (15), Französisch (7), Italienisch (4), Holländisch (1).

Was bei der Festschrift noch besonders freudig berührt, ist, daß sie nicht einen Nachruf auf einen Gelehrten bedeutet, der seine Bahn bereits durchmessen hat, sondern einem Manne gilt, der noch in der vollen Kraft des Schaffens unter uns wirkt. ***Cz.***

Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes

von

J. D. van der Waals.

2 Teile.

gr. 8°. 1899—1900. M. 9.—; geb. M. 11.—.

I. Teil: Zweite, verbesserte Aufl. VIII, 182 S. mit 2 Tafeln. 1899. M. 4.—; geb. M. 5.—.

II. Teil: Binäre Gemische. gr. 8°. 192 S. mit 23 Figuren im Text. 1900. M. 5.—; geb. M. 6.—.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Schloemilchs Handbuch der Mathematik

Zweite Auflage.

Herausgegeben von

Prof. Dr. R. Henke
Konrektor d. Annen-Realgymnasiums in Dresden

und

Dr. R. Heger
Hon.-Professor an der K. S. Technischen Hochschule und Gymnasial-Oberlehrer in Dresden.

3 Bände. Lex. 8°. Mit vielen Abbildungen im Text und auf Tafeln.
1904. Preis M. 60.—; in Halbfranz gebunden M. 67.50.

I. Band. Elementarmathematik. XII, 611 Seiten mit 321 Figuren 1904. M. 20.—, gebunden M. 22.50.
II. Band. Höhere Mathematik, I. Teil. VIII, 765 Seiten mit 281 Figuren und 12 Tafeln. 1904. M. 20.—, geb. M. 22.50.
III. Band. Höhere Mathematik, II. Teil. VIII, 622 Seiten mit 94 Fig. und 20 Tafeln. 1904. M. 20.—, gebunden M. 22,50.

Schloemilchs Handbuch der Mathematik, das in seiner ersten Auflage innerhalb des Rahmens der Enzyklopädie der Naturwissenschaften erschien, ist jetzt gänzlich umgearbeitet und, auf drei Bände erweitert, innerhalb Jahresfrist wieder aufgelegt worden.

An Stelle des verstorbenen Verfassers der Abteilung über Elementarmathematik F. Reidt, besorgte Herr Professor Dr. R. Henke in Dresden die Bearbeitung dieser Abteilung, während die Abteilung über höhere Mathematik wieder, wie bei der ersten Auflage, Herr Professor Dr. R. Heger in Dresden bearbeitete.

Die Ausdehnung, die die Mathematik in den letzten Jahren erfahren hat, machte es notwendig, das bisher in zwei Bänden erschienene Werk in drei Bände zu zerlegen und mehrere neue Abschnitte einzufügen; es enthält nunmehr **Band I** die Elementarmathematik (Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie), Band II und III die höhere Mathematik, und zwar **Band II** die darstellende Geometrie, die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes und die Differentialrechnung, **Band III** die Integralrechnung, einen Abriß der Ausgleichungsrechnung (auf Henkes Grundlage), die mathematischen Grundlagen der Lebens- und Invalidenversicherung (mit versicherungstechnischen Tabellen) und eine kurzgefaßte Darstellung der mathematischen Kartenentwurfslehre sowie ein Sachregister zu allen drei Bänden.

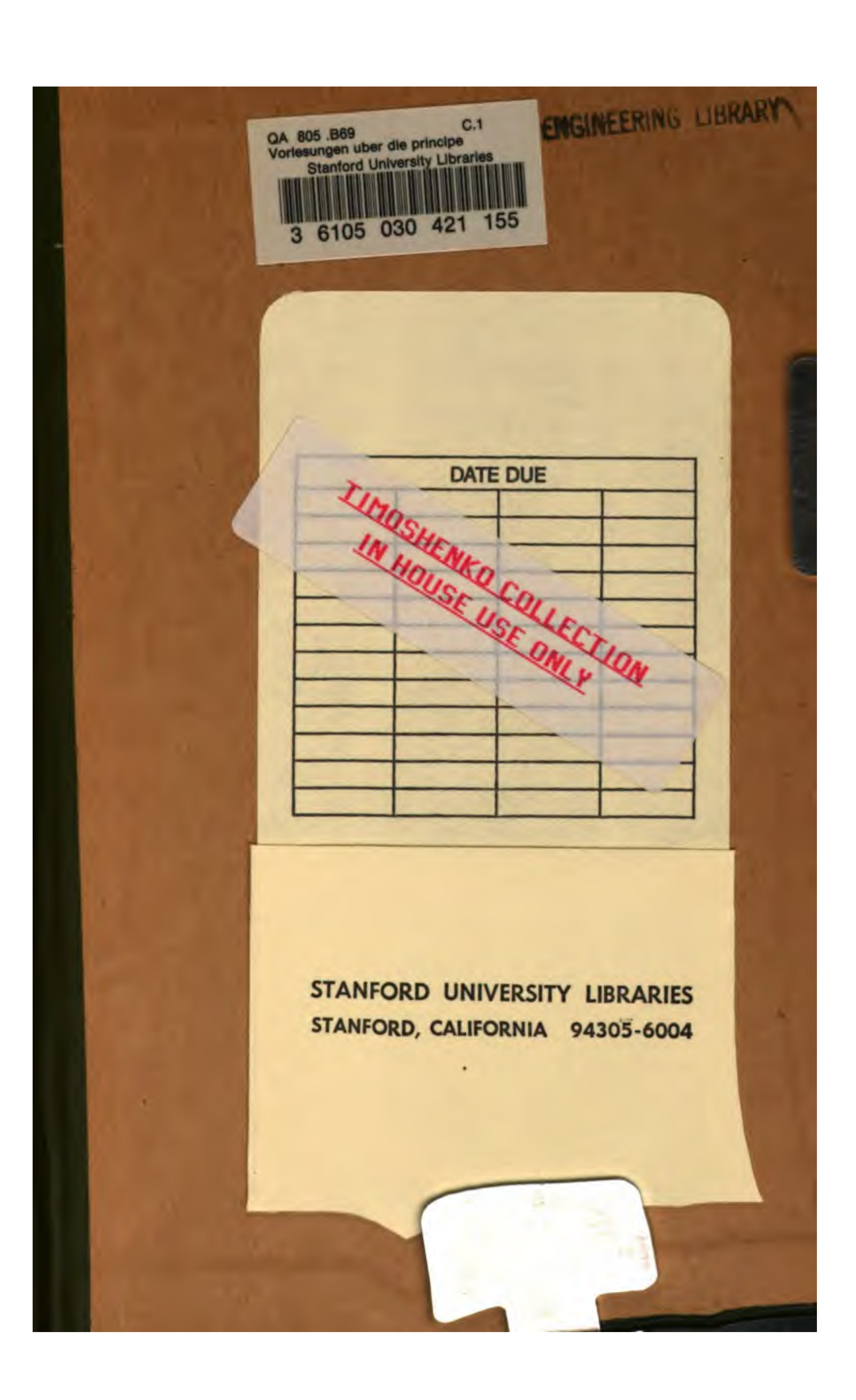
Aus den Besprechungen:

Zeitschrift für österreichische Gymnasien: Wir glauben, daß das Buch für das Selbststudium auch schwieriger Partien der elementaren und höheren Mathematik sich sehr gut eignen wird. Die Verf. mußten zu diesem Zwecke manche Partie breiter gestalten, als es in einer Abhandlung möglich ist, und es mußten auch mehrfach Wiederholungen eintreten. Die Klarheit der Darstellung, die mannigfache Unterstützung des Textes durch sehr gelungen ausgeführte Figuren und Tafeln, wie sich diese auf die darstellende Geometrie beziehen, werden jedenfalls zur Erreichung des angestrebten Zweckes beitragen.

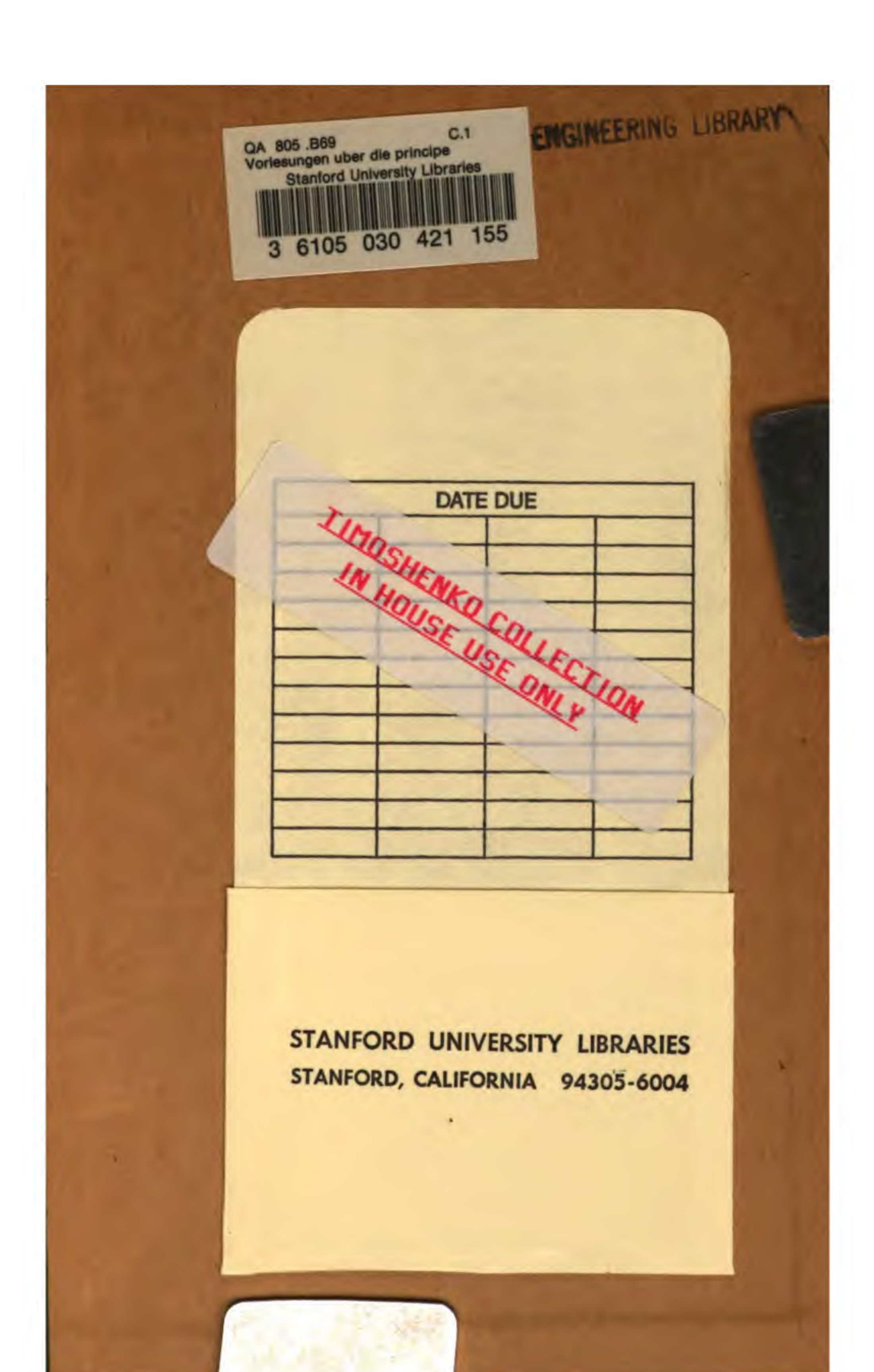
Zeitschrift für physikalische Chemie: Man findet die Darstellung überall ungemein schlicht bei aller sachlichen Strenge, und so wird der Jünger, der sich diesen seit der halbvergessenen Schulzeit vom Geruch außerordentlicher Schwierigkeiten erfüllten Hallen der Not gehorchend, nicht dem eignen Trieb, zu nähern wagt, sich freundlich berührt fühlen von der Unmittelbarkeit, mit der er geführt wird.

Es ist keinem Zweifel unterworfen, daß das bewährte Werk sich auch den neu heranwachsenden Geschlechtern als ein zuverlässiger und verhältnismäßig bequemer Führer bewähren und lieb machen wird.





QA 805 .B69 C.1
Vorlesungen uber die principe
Stanford University Libraries
3 6105 030 421 155
ENGINEERING LIBRARY
DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004



QA 805 .B69 C.1
Vorlesungen uber die principe
Stanford University Libraries
3 6105 030 421 155
ENGINEERING LIBRARY
DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004





